# 平成29年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
# 文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

**1** 定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 $C_1$，$C_2$ の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれ $a$ を用いて表せ。

(2) $C_1$ と(1)で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を $S_1$，$C_2$ と(1)で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積を $S_2$ とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

**2** 座標平面上に原点O，点A$(1,\ a)$，点B$(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) $a=1$ のとき，△OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3) △OAB が正三角形であり，$a$ が有理数であるとき，$s$ と $t$ のうち少なくとも1つは無理数であることを示せ。

**3** AとBの2人がA，B，A，B，$\cdots$ の順にさいころを投げ，先に3以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とはAとBが投げた回数の和のこととする。2と3の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げた回数が $n$ 回以下では勝敗が決まらない確率 $p_n$ $(n=1,2,\cdots)$ を求めよ。さらに，$p_n$ が0.005より小さくなる最小の $n$ を求めよ。

(2) さいころを投げた回数が3回以下でAが勝つ確率を求めよ。

(3) 自然数 $k$ に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下でAが勝つ確率を求めよ。

**4** 以下の問いに答えよ。

(1) 2017と225の最大公約数を求めよ。

(2) 225との最大公約数が15となる2017以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225との最大公約数が15であり，かつ1998との最大公約数が111となる2017以下の自然数をすべて求めよ。

**解答例**

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 求める直線を $l : y = px + q$ とおく．$C_1$ と $l$ の方程式から $y$ を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad ゆえに \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

$C_1$ と $l$ は接するので，方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2 - 4{\cdot}2(-q+1) = 0 \quad 整理すると \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots ①$$

同様に，$C_2$ と $l$ の方程式から $y$ を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad ゆえに \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

$C_2$ と $l$ は接するので，上の方程式の係数について

$$p^2 - 4{\cdot}1(q - a) = 0 \quad 整理すると \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から　$p^2 = \dfrac{8}{3}(1-a)$，$q = \dfrac{1}{3}(a+2)$

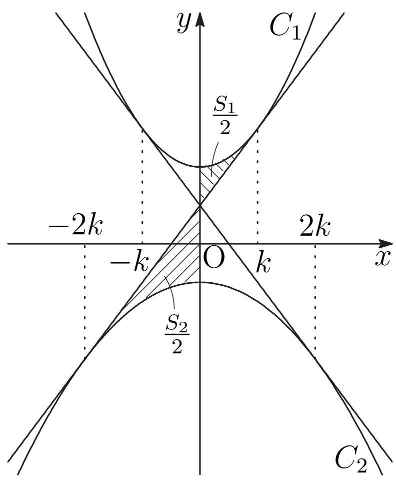
よって，求める 2 直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}\,x + \frac{1}{3}(a+2)}$$

(2) (1) の結果から，次の 2 式は平方式になることに注意して

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}$ のとき，$k = \dfrac{p}{4}$ とおく．$C_1$，$C_2$ および 2 接線は $y$ 軸に関して対称であることに注意して




$$\frac{S_1}{2} = \int_0^k 2(x-k)^2\,dx = \left[\ \frac{2}{3}(x-k)^3\ \right]_0^k = \frac{2k^3}{3},$$

$$\frac{S_2}{2} = \int_{-2k}^0 (x+2k)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}(x+2k)^3\ \right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3}$$

よって　$\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{16k^3}{3} \times \dfrac{3}{4k^3} = \mathbf{4}$

**解説** $y=kx^2\cdots$① は $y=x^2\cdots$② を $x$ 軸を元に $y$ 軸方向に $k$ 倍だけ拡大したものであるが，① 上の点 $\mathrm{P}(t,\ kt^2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとると

$$(x,\ y)=k(t,\ kt^2)\quad ゆえに\quad x=kt,\quad y=(kt)^2$$

これから，点Qの描く軌跡は，$y=x^2$ である．

したがって，① と ② は相似であり，その相似比は $1:|k|$ である．

一般に，放物線は相似であり，2つの放物線

$$C_1: y=a_1x^2+b_1x+c_1,\quad C_2: y=a_2x^2+b_2x+c_2$$

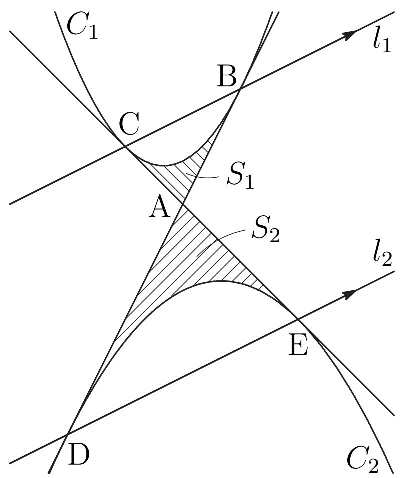
の相似比は $\dfrac{1}{|a_1|}:\dfrac{1}{|a_2|}$ である．

右の図のように，$C_1$，$C_2$ と2本の共通接線との接点をB，C，D，Eとすると，点Aは線分BDおよび線分CEを

$$\frac{1}{|a_1|}:\frac{1}{|a_2|}$$

に内分するである．また，2つの斜線部分の面積を $S_1$，$S_2$ とすると，面積比は相似比の2乗に比例するから

$$S_1:S_2=\frac{1}{{a_1}^2}:\frac{1}{{a_2}^2}$$




特に，$S_1=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ADE}$ である[1]．

本題の点Aは $C_1$ の頂点 $(0,\ 1)$ と $C_2$ の頂点 $(0,\ a)$ を $1:2$ に内分する点で

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2+a}{3}\right)$$

また，$C_1$ 上の点Pについて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をみたす点Qの軌跡が $C_2$ である．

点Aを通り，傾き $m$ の直線 $y=mx+\dfrac{2+a}{3}$ が $C_1: y=2x^2+1$ と接するとき，2次方程式 $2x^2-mx+\dfrac{1-a}{3}=0$ の係数により

$$(-m)^2-4\cdot2\cdot\frac{1-a}{3}=0\quad ゆえに\quad m=\pm2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(s,\ t)$ について，$\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形であるから，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$ より

$$1^2+1^2=s^2+t^2=(s-1)^2+(t-1)^2$$

整理すると　$s^2+t^2=2,\quad s+t=1$

これを解いて　$\boldsymbol{(s,\ t)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)}$　**(複号同順)**

(2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，自然数 $p$，$q$ を用いて

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\quad(p,\ q\ \text{は互いに素})$$

とおける．これから，$p=\sqrt{3}q$ の両辺を平方すると

$$p^2=3q^2\quad\cdots①$$

$p^2$ は 3 の倍数であるから，$p$ は 3 の倍数である．

したがって，$p=3k$ ($k$ は自然数) とおけ，これを ① に代入すると

$$(3k)^2=3q^2\quad\text{ゆえに}\quad q^2=3k^2$$

$q^2$ は 3 の倍数であるから，$q$ も 3 の倍数である．このことは，$p$ と $q$ が互いに素であることに反する．よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t)$ であるから，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積により

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin 60^\circ=\frac{1}{2}|t-as|$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2}(a^2+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}|t-as|\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt{3}=\frac{2|t-as|}{a^2+1}\quad\cdots(*)$$

$a$ が有理数であるとき，2 数 $s$，$t$ がともに有理数であるとすると，$(*)$ の右辺は有理数となり，(2) の結果に矛盾する．

よって，$s$ と $t$ のうち少なくとも 1 つは無理数である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) サイコロを1回投げるとき，勝敗が決まらない，すなわち，1または2の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$n$ 回以下では勝敗が決まらないのは，$n$ 回とも1または2の目が出ることであるから，よって，求める確率 $p_n$ は

$$p_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

$p_n$ が0.005より小さいとき

$$\frac{1}{3^n}<0.005=\frac{1}{200}\quad \text{ゆえに}\quad 3^n>200$$

$3^4=81$，$3^5=243$ であるから，求める最小の $n$ は　　$\boldsymbol{n=5}$

(2) サイコロを1回投げるとき，勝者が決まる，すなわち，3，4，5，6の目が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が3回以下でAが勝つのは，1回目または3回目でAが勝つことであるから，求める確率は

$$\frac{2}{3}+p_2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{20}{27}}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\sum_{i=1}^{k}p_{2i}\times\frac{2}{3}&=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^{2i}}=\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{9}\right)^i\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{9^{k+1}}\right)}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) ユークリッドの互除法を用いて

$$\begin{aligned} 2017 &= 225 \times 8 + 217, \\ 225 &= 217 \times 1 + 8, \\ 217 &= 8 \times 27 + 1 \end{aligned}$$

よって，求める最大公約数は　**1**

(2) $225 = 3^2 \times 5^2$，$2017 = 15 \times 134 + 7$
全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 134\}$ とし，その部分集合を

$$\begin{aligned} A &= \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}44\}, \\ B &= \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}26\} \end{aligned}$$

とすると

$$A \cap B = \{15{\cdot}1,\ 15{\cdot}2,\ 15{\cdot}3,\ \cdots,\ 15{\cdot}8\}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

(3) $225 = 3^2 \times 5^2$，$15 = 3 \times 5$，$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$，$111 = 3 \times 37$
求める数は 2017 以下で，$3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \,|\, n = 1, 2, 3\}$$

ただし，$n$ は 2，3，5 と互いに素であるから，求める数は　**555**