平成 28 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$　$(0 < \alpha < \beta)$ があり，曲線 $C : y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a，b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を 1 度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となり得る点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1, -1)$，$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

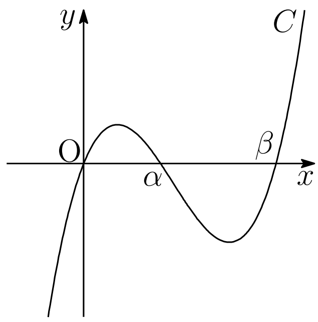
(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x=0,\ \alpha,\ \beta$ であるから，$C: y=f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して $(0<\alpha<\beta)$



$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0)=0,\quad F(\alpha)=-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta,\quad F(\beta)=-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[\ F(x)\ \Big]_0^\alpha-\Big[\ F(x)\ \Big]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha)-F(\beta)-F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta\right)-\left(-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta-\frac{1}{6}\alpha\beta^3+\frac{1}{12}\beta^4} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2\beta-\frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha-\beta)\{2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2\} \end{aligned}$$

$0<\alpha<\beta$ であるから　　$2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2>0$

したがって

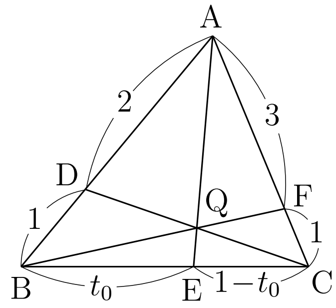
α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，S を最小にする α は　　$\boldsymbol{\alpha=\frac{\beta}{2}}$

2 (1) チェバの定理により

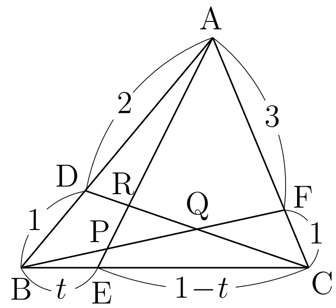
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて $\boldsymbol{t_0=\dfrac{3}{5}}$



(2) △AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$



したがって $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{t}$

よって $k=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって $\ell=\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\dfrac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって $\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3(1-t)}{4t}$ $\cdots$①

$t=\dfrac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので $\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$②

よって $\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}{\cdot}\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}{\cdot}\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5)^2$$

(3) の結果から　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2{\cdot}\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると[1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 白玉を1度だけ取り出すので，赤玉を m 回 $(m=0,1,\cdots,n-1)$ 取り出すとすると，青玉を取り出す回数は $n-m-1$ であるから，到達点 $(x,\ y)$ は

$$x=m-1, \quad y=(n-m-1)-1=n-m-2$$

よって，到達点は　$\boldsymbol{(m-1,\ n-m-2)\quad (m=0,1,\cdots,n-1)}$

(2) 赤玉，青玉，白玉を取り出す回数を，それぞれ i，j，k とすると，到達点 $(x,\ y)$ は $(i+j+k=n)$

$$x=i-k, \quad y=j-k$$

このとき，$k=n-i-j$ であるから

$$(*)\begin{cases} x=i-(n-i-j)=2i+j-n \\ y=j-(n-i-j)=i+2j-n \end{cases}$$

ここで

$$2i+j-n=2i'+j'-n, \quad i+2j-n=i'+2j'-n$$

とすると

$$2(i-i')+(j-j')=0, \quad (i-i')+2(j-j')=0$$

これを解くと　　$(i,\ j)=(i',\ j')$

したがって，$(i,\ j)\neq(i',\ j')$ のとき

$$(2i+j-n,\ i+2j-n)\neq(2i'+j'-n,\ i'+2j'-n)$$

このことから，$(i,\ j,\ k)$ の組合せの個数とその到達点の個数は一致する．

よって，求める到達点の個数は，赤玉，青玉，白玉の3種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

(3) $(*)$ から

$$i=\frac{2x-y}{3}+\frac{n}{3},\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+\frac{n}{3}\quad\cdots(**)$$

$n=3$ のとき，上式より

$$i=\frac{2x-y}{3}+1,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+1$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ (1,-1,\ 2,\ 0,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{6}+\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{25}{72}}$$

(4) $n=3N$ のとき，$(**)$ より

$$i=\frac{2x-y}{3}+N,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+N$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3N-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ N-1,\ N+1,\ N),\ (0,\ 0,\ N,\ N,\ N),\\ (1,-1,\ N+1,\ N-1,\ N)$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_{3N}=&\frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&+\frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&+\frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\=&\boldsymbol{\frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 仮定から　$10^n \equiv a_n, \quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から　$10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって　$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より　$\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q \\ &\equiv p{\cdot}4 + 2{\cdot}3 + 9 + 6{\cdot}10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166