

平成28年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部(経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 座標平面において, x 軸上に3点 $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ ($0 < \alpha < \beta$) があり, 曲線 $C: y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの3点で交わっているものとする。ただし, a, b は実数である。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を S とする。 S を α と β の式で表せ。
- (2) β の値を固定して, $0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき, S を最小とする α を β の式で表せ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が1である三角形 ABC において, 辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1, t:1-t, 1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また, AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 3直線 AE, BF, CD が1点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下, t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

- (2) $AP = kAE, CR = lCD$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。
- (3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。
- (4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

- 3** 袋の中に、赤玉が15個、青玉が10個、白玉が5個入っている。袋の中から玉を1個取り出し、取り出した玉の色に応じて、以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 (x, y) にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x + 1, y)$ に移動、青玉を取り出したときには点 $(x, y + 1)$ に移動、白玉を取り出したときには点 $(x - 1, y - 1)$ に移動し、取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0, 0)$ にコインを置き、この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後、コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

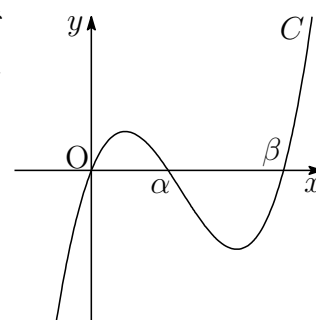
- (1) 操作を n 回繰り返したとき、白玉を1度だけ取り出したとする。このとき、到達点となり得る点をすべて求めよ。
 - (2) 操作を n 回繰り返したとき、到達点となり得る点の個数を求めよ。
 - (3) 座標平面上の4点 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき、到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。 P_3 を求めよ。
 - (4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。
- 4** 自然数 n に対して、 10^n を13で割った余りを a_n とおく。 a_n は0から12までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を13で割った余りに等しいことを示せ。
- (2) a_1, a_2, \dots, a_6 を求めよ。
- (3) 以下の3条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 - (i) N を十進数で表示したとき6桁となる。
 - (ii) N を十進数で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと2016となる。
 - (iii) N は13で割り切れる。

解答例

- 1 (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x = 0, \alpha, \beta$ であるから, $C: y = f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して ($0 < \alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \end{aligned}$$



関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0) = 0, \quad F(\alpha) = -\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta, \quad F(\beta) = -\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx = \left[F(x) \right]_0^\alpha - \left[F(x) \right]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) - F(0) \\ &= 2 \left(-\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\alpha^3\beta \right) - \left(-\frac{1}{12}\beta^4 + \frac{1}{6}\alpha\beta^3 \right) \\ &= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3 + \alpha^2\beta - \frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha - \beta)\{2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2\} \end{aligned}$$

$0 < \alpha < \beta$ であるから $2\alpha(\beta - \alpha) + \beta^2 > 0$

したがって

α	(0)	...	$\frac{\beta}{2}$...	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		-	0	+	
S		\searrow	極小	\nearrow	

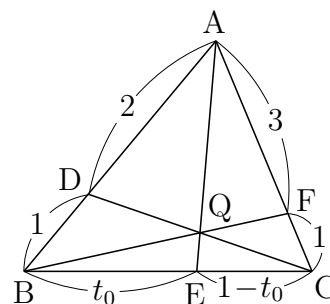
よって, S を最小にする α は $\alpha = \frac{\beta}{2}$



- 2 (1) チェバの定理により

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{これを解いて} \quad t_0 = \frac{3}{5}$$

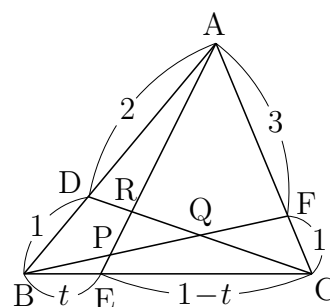


- (2) $\triangle AEC$ および直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AP}{PE} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{AP}{PE} = \frac{3}{t}$$

$$\text{よって} \quad k = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{3+t}$$



- $\triangle BCD$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{CR}{RD} = \frac{3(1-t)}{2t}$$

$$\text{よって} \quad l = \frac{CR}{CD} = \frac{3(1-t)}{3(1-t) + 2t} = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

- (3) (2) の図について、 $\triangle BCF$ および直線 AE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AF} \cdot \frac{FP}{PB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FP}{PB} = 1$$

$$\text{したがって} \quad \frac{FP}{PB} = \frac{3(1-t)}{4t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$t = \frac{3}{5} \text{ のとき, } P \text{ は } Q \text{ に一致するので} \quad \frac{FQ}{QB} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{よって} \quad \triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(4) $t = \frac{3}{5}$ のとき, R は Q に一致するので, (2) の結果から

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{3(1 - \frac{3}{5})}{3 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

したがって $CQ : QR = \frac{1}{2} : \frac{3(1-t)}{3-t} - \frac{1}{2} = 3-t : 3-5t$

また, ①, ② から

$$BQ : PQ = \frac{2}{3} : \frac{3(1-t)}{3(1-t)+4t} - \frac{1}{3} = 3+t : 3-5t$$

$\triangle BCQ : \triangle PQR = BQ \cdot CQ : PQ \cdot QR$ であるから

$$\triangle BCQ : \triangle PQR = (3+t)(3-t) : (3-5t)^2$$

(3) の結果から $\triangle PQR = \frac{1}{6} \times \frac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)} = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$

解説 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}}{2+1} = \frac{\vec{b} + 2 \cdot \frac{3}{4}\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}$$

$CR : RD = 3(1-t) : 2t$ であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2t\overrightarrow{AC} + 3(1-t)\overrightarrow{AD}}{3(1-t) + 2t} = \frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b} + 2t\vec{c}\}$$

したがって $\overrightarrow{QP} = \frac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b} - 3\vec{c})$, $\overrightarrow{QR} = \frac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b} - 3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え, 外積の性質を用いると¹

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = -\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b} \times \vec{c}$$

よって $\triangle PQR : \triangle ABC = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} : 1$

外積は高校数学の範囲外であるから, 2次試験では使えないが, センター試験では, 非常に有効な計算法である. なお, 外積(ベクトル積)の演算について, 次式が成り立つことに注意したい.

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$$

また, これに $\vec{c} = \vec{b}$ を代入すると $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

- 3 (1) 白玉を1度だけ取り出すので、赤玉を m 回 ($m = 0, 1, \dots, n-1$) 取り出すとすると、青玉を取り出す回数は $n-m-1$ であるから、到達点 (x, y) は

$$x = m - 1, \quad y = (n - m - 1) - 1 = n - m - 2$$

よって、到達点は $(m - 1, n - m - 2)$ ($m = 0, 1, \dots, n - 1$)

- (2) 赤玉, 青玉, 白玉を取り出す回数を, それぞれ i, j, k とすると, 到達点 (x, y) は $(i + j + k = n)$

$$x = i - k, \quad y = j - k$$

このとき, $k = n - i - j$ であるから

$$(*) \begin{cases} x = i - (n - i - j) = 2i + j - n \\ y = j - (n - i - j) = i + 2j - n \end{cases}$$

ここで

$$2i + j - n = 2i' + j' - n, \quad i + 2j - n = i' + 2j' - n$$

とすると

$$2(i - i') + (j - j') = 0, \quad (i - i') + 2(j - j') = 0$$

これを解くと $(i, j) = (i', j')$

したがって, $(i, j) \neq (i', j')$ のとき

$$(2i + j - n, i + 2j - n) \neq (2i' + j' - n, i' + 2j' - n)$$

このことから, (i, j, k) の組合せの個数とその到達点の個数は一致する. よって, 求める到達点の個数は, 赤玉, 青玉, 白玉の3種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

(3) (*) から

$$i = \frac{2x - y}{3} + \frac{n}{3}, \quad j = \frac{2x - y}{3} - x + y + \frac{n}{3} \quad \cdots (**)$$

$n = 3$ のとき, 上式より

$$i = \frac{2x - y}{3} + 1, \quad j = \frac{2x - y}{3} - x + y + 1$$

(x, y) が D 内にあるとき ($k = 3 - i - j$)

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 0, 1)$$

よって, 求める確率は

$$P_3 = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{6} + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{25}{72}$$

(4) $n = 3N$ のとき, (**) より

$$i = \frac{2x - y}{3} + N, \quad j = \frac{2x - y}{3} - x + y + N$$

(x, y) が D 内にあるとき ($k = 3N - i - j$)

$$(x, y, i, j, k) = (-1, 1, N - 1, N + 1, N), (0, 0, N, N, N), \\ (1, -1, N + 1, N - 1, N)$$

よって, 求める確率は

$$P_{3N} = \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ + \frac{(3N)!}{N!N!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{3}\right)^N \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ + \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{6}\right)^N \\ = \frac{(19N + 6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}$$

■

4 (1) 仮定から $10^n \equiv a_n, 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第1式から $10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって $a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より $a_1 = 10$

(1)の結果を用いると、法13について

$$a_2 \equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9$$

$$a_3 \equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12$$

$$a_4 \equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3$$

$$a_5 \equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4$$

$$a_6 \equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1$$

よって $a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$

(3) 整数 p, q を $1 \leq p \leq 9, 0 \leq q \leq 9$ とし、求める自然数 N を

$$N = p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

とおくと、法13に関して

$$N \equiv p \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 10^2 + 6 \cdot 10 + q$$

$$\equiv p \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 9 + 6 \cdot 10 + q = 4p + q + 75$$

$$\equiv 4p + q - 3$$

このとき、 $N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 (p, q) の組は

$$(p, q) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって、求める自然数 N は

$$220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166$$

