

平成27年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部(経済・経営))

1 座標平面上の2つの放物線

$$C_1: y = x^2$$

$$C_2: y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし, a, b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下, a, b が(1)の条件を満たすとし, C_1 と C_2 で囲まれる面積が9であると
する。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき, 放物線 C_2 の頂点が描く軌跡
を座標平面上に図示せよ。

2 1辺の長さが1である正四面体OABCを考える。辺OAの中点をP, 辺OBを
2:1に内分する点をQ, 辺OCを1:3に内分する点をRとする。以下の問い
に答えよ。

(1) 線分PQの長さと言分PRの長さを求めよ。

(2) \vec{PQ} と \vec{PR} の内積 $\vec{PQ} \cdot \vec{PR}$ を求めよ。

(3) 三角形PQRの面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を考える。

(操作) 袋から1個の玉を取り出し, それが赤玉ならば代わりに青玉1個
を袋に入れ, 青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に
入っている3個の玉がすべて青玉になるとき, 硬貨を1枚もらう。

この操作を4回繰り返す。もらう硬貨の総数が1枚である確率と, もらう硬貨
の総数が2枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき, $2^n - 1$ は3の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし, k を0以上の整数とする。 $2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p, k の組
をすべて求めよ。

解答例

1 (1) $y = x^2$ と $y = -x^2 + ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 = -x^2 + ax + b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - ax - b = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わる時, (*) より

$$(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-b) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 8b > 0$$

(2) 方程式 (*) の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{a}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{2} \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 - ax - b) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b} = 3 \quad \text{よって} \quad b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

(3) (2) の結果から, C_2 は

$$y = -x^2 + ax - \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

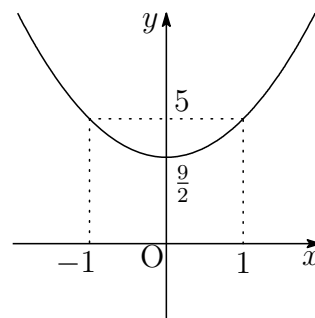
C_2 の頂点を (x, y) とすると

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって, C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

その軌跡は, 右の図のようになる.



2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

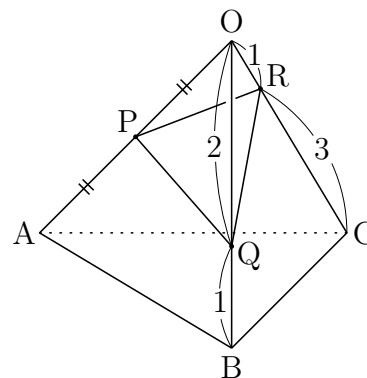
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$



したがって $|\overrightarrow{PQ}|^2 = \left| \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = \left| \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

よって $PQ = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $PR = \frac{\sqrt{3}}{4}$

別解 $\triangle OPQ$ および $\triangle OPR$ に余弦定理を適用すると

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{36}$$

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2OP \cdot OR \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

(2) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$$= \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{8}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{48}$$

(3) $\triangle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{36} \cdot \frac{3}{16} - \left(\frac{5}{48}\right)^2} = \frac{\sqrt{131}}{96}$

3 1, 3 回目の操作で青玉の個数は 2 個または 0 個.

2, 4 回目の操作で青玉の個数は 3 個または 1 個.

したがって, もらう硬貨の枚数は 0, 1, 2 枚のいずれかである.

2 回目の操作で青玉 3 個である確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

したがって, 2 回目の操作で青玉 1 個である確率は

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

2, 4 回目の操作で青玉 3 個, すなわち, もらう硬貨の総数が 2 枚である確率は

$$\frac{2}{9} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

2, 4 回目の操作で青玉 1 個, すなわち, 硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$$

よって, もらう硬貨の総数が 1 枚である確率は

$$1 - \left(\frac{2}{27} + \frac{49}{81} \right) = \frac{26}{81}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x, y)$ とすると

$$P(2, 3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

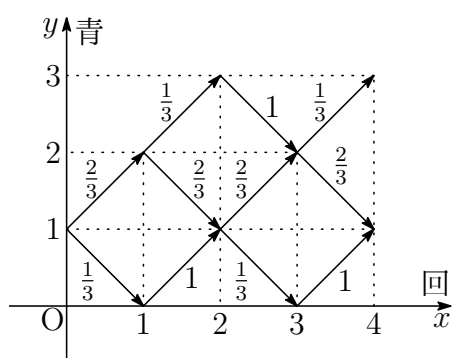
$$P(2, 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{9}$$

4 回の操作で硬貨を 2 枚もらう (青玉が 2 回 3 個になる) 確率は

$$P(2, 3) \times 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

4 回の操作で硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\{P(2, 1)\}^2 = \left(\frac{7}{9} \right)^2 = \frac{49}{81}$$



- 4 (1) n が正の偶数のとき, $\frac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

よって, $2^n - 1$ は 3 の倍数である.

- (2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数) $\cdots (*)$

(i) $p = 2$ のとき, $(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

(ii) $p \neq 2$ のとき, p は奇素数であるから, $p - 1$ は偶数である.

(1) の結果から, $2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である.

$(*)$ より, p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって $(p, k) = (2, 0), (3, 1)$