平成27年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 座標平面上の2つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし，a，bは実数とする。

(1) C_1とC_2が異なる2点で交わるためのa，bに関する条件を求めよ。

以下，a，bが(1)の条件を満たすとし，C_1とC_2で囲まれる面積が9であるとする。

(2) bをaを用いて表せ。

(3) aがすべての実数値をとって変化するとき，放物線C_2の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

2 1辺の長さが1である正四面体OABCを考える。辺OAの中点をP，辺OBを2 : 1に内分する点をQ，辺OCを1 : 3に内分する点をRとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分PQの長さと線分PRの長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$を求めよ。

(3) 三角形PQRの面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を考える。

(操作) 袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう。

この操作を4回繰り返す。もらう硬貨の総数が1枚である確率と，もらう硬貨の総数が2枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) nが正の偶数のとき，$2^n - 1$は3の倍数であることを示せ。

(2) pを素数とし，kを0以上の整数とする。$2^{p-1} - 1 = p^k$を満たすp，kの組をすべて求めよ。

解答例

1 (1) $y=x^2$ と $y=-x^2+ax+b$ から y を消去すると

$$x^2=-x^2+ax+b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-ax-b=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる2点で交わるとき，$(*)$ より

$$(-a)^2-4\cdot2\cdot(-b)>0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a^2+8b>0}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2},\quad \alpha\beta=-\frac{b}{2}$$

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b} \quad \cdots①$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\{(-x^2+ax+b)-x^2\}\,dx&=-\int_\alpha^\beta(2x^2-ax-b)\,dx\\&=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

したがって　$\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=9$　ゆえに　$\beta-\alpha=3$　$\cdots②$

①，② より　$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}=3$　よって　$\boldsymbol{b=-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，C_2 は

$$y=-x^2+ax-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}$$

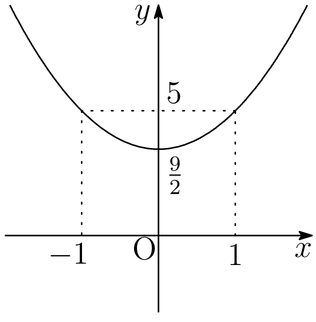
C_2 の頂点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

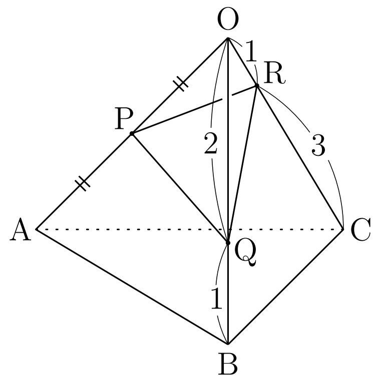
$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$$

その軌跡は，右の図のようになる．



■

2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって $\quad \mathbf{PQ}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{6}}$，$\mathbf{PR}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

別解 △OPQ および △OPR に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$$
$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{48}}$$

(3)
$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{131}}{96}}\ \blacksquare$$

3 1，3 回目の操作で青玉の個数は 2 個または 0 個.

2，4 回目の操作で青玉の個数は 3 個または 1 個.

したがって，もらう硬貨の枚数は 0，1，2 枚のいずれかである.

2 回目の操作で青玉 3 個である確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

したがって，2 回目の操作で青玉 1 個である確率は

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

2，4 回目の操作で青玉 3 個，すなわち，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率は

$$\frac{2}{9}\times 1\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

2，4 回目の操作で青玉 1 個，すなわち，硬貨を 1 枚ももらわない確率は

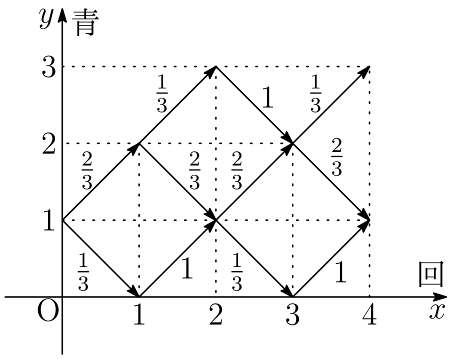
$$\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$$

よって，もらう硬貨の総数が 1 枚である確率は

$$1-\left(\frac{2}{27}+\frac{49}{81}\right)=\boldsymbol{\frac{26}{81}}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x,y)$ とすると

$$P(2,3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$
$$P(2,1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$$



4 回の操作で硬貨を 2 枚もらう (青玉が 2 回 3 個になる) 確率は

$$P(2,3)\times 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

4 回の操作で硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\{P(2,1)\}^2=\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$$

■

$\boxed{4}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数) $\quad \cdots (*)$

(i) $p = 2$ のとき，$(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

(ii) $p \neq 2$ のとき，p は奇素数であるから，$p - 1$ は偶数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である．

$(*)$ より，p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって $\quad \boldsymbol{(p,\ k) = (2,\ 0),\ (3,\ 1)}$

■