平成26年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

$\boxed{1}$ 座標平面上の直線 $y=-1$ を ℓ_1，直線 $y=1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の2点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ell_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P},\ell_2) \geqq \mathrm{PA} \qquad \cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P},\ell)$ は点Pと直線 ℓ の距離である。

(1) 条件①を満たす点Pが存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件①を満たす点P全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし，a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を3で割った余りは0か1であることを証明せよ。

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a，b，c はすべて3で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{\textbf{3}}$ 鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C, \quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば △ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE}, \quad \tan B\tan C = 3$$

を証明せよ。

$\boxed{\textbf{4}}$ A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

解答例

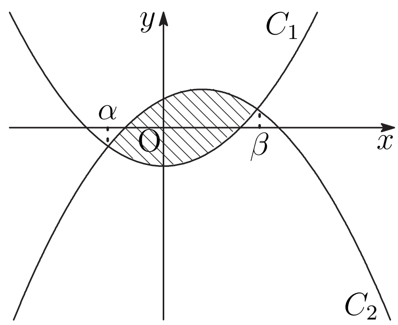
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $d(\mathrm{P}, \ell_1) = |y+1|$，$d(\mathrm{P}, \ell_2) = |y-1|$ であるから，① より

$$|y+1| \geqq \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{かつ} \quad |y-1| \geqq \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

これらを整理すると

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad y \leqq -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

上の 2 式を同時にみたす領域が存在する条件は，2 つの放物線



$$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$C_2 : y = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

が共有点をもつことであるから，2 次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

すなわち　$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \quad \cdots(*)$

が実数解をもてばよい．したがって，係数について

$$(-a)^2 - 4\cdot 1\left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right) \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2 \leqq a \leqq 2}$$

(2) $(*)$ の方程式の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$$
$$\beta - \alpha = \sqrt{4-a^2}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \left\{-\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\right\} dx \\
&= -\int_\alpha^\beta \left(x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 - 1\right) dx \\
&= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}(4-a^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 自然数 a を 3 で割った商を k，余りを r とすると ($r=0,\ 1,\ 2$)

$$
\begin{array}{ll}
r=0\ \text{のとき} & a^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2 \\
r=1\ \text{のとき} & a^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1 \\
r=2\ \text{のとき} & a^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1
\end{array}
$$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

(2) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすとき，a^2+b^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果から a^2，b^2 がともに 3 の倍数である．
このとき，自然数 l，m を用いて

$$a=3l, \quad b=3m$$

とおける．したがって

$$(3l)^2+(3m)^2=3c^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2=3(l^2+m^2)$$

c^2 は 3 の倍数であるから，(1) の結果により，c も 3 の倍数である．
よって，a，b，c はすべて 3 で割り切れる．

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c が存在すると仮定すると，(2) の結果から

$$a=3^nA, \quad b=3^nB, \quad c=3^nC$$

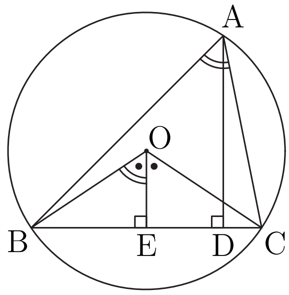
とおける (n は自然数，3 つの自然数 A，B，C の少なくとも 1 つは 3 で割り切れない)．このとき

$$
\begin{aligned}
(3^nA)^2+(3^nB)^2&=3(3^nC)^2 \\
A^2+B^2&=3C^2
\end{aligned}
$$

上式および (2) の結果から，A，B，C はすべて 3 で割り切れることになり，A，B，C の仮定に反する．
よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a，b，c は存在しない．

$\boxed{3}$ (1) 直角三角形 ABD において

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\sin B \quad \cdots ①$$



正弦定理を △ABC に適用すると

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R$ より　$\mathrm{AB} = 2R\sin C \quad \cdots ②$

② を ① に代入すると

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C \quad \cdots ③$$

$A < 90^\circ$ より，円周角と中心角の定理により　$\angle\mathrm{BOC} = 2A$

また，$\triangle\mathrm{BOE} \equiv \triangle\mathrm{COE}$ であるから　$\angle\mathrm{BOE} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOC} = A$

$\mathrm{OB} = R$ であるから △BOE において　$\mathrm{OE} = R\cos A \quad \cdots ④$

(2) △ABC の重心 G は，中線 AE 上にあるから，G と O が一致するとき，直線 AE は辺 BC の垂直二等分線であるから　$\mathrm{CA} = \mathrm{AB}$

同様に，辺 CA の中点を F とすると，$\mathrm{OF}\perp\mathrm{CA}$

G は，中線 BF 上にあるから，G と O か一致するとき，直線 BF は辺 CA の垂直二等分線であるから　$\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$

よって，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ より，△ABC は正三角形である．

別解 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

O と G が一致するとき，$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ であるから $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ より

$$(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{c})\cdot(-\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$ であるから　$2\vec{a}\cdot\vec{b} = -R^2$

同様にして　$2\vec{b}\cdot\vec{c} = 2\vec{c}\cdot\vec{a} = -R^2$

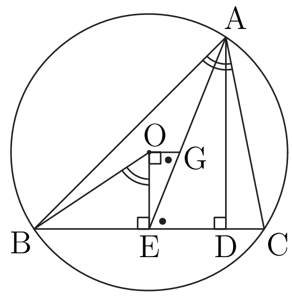
このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 3R^2$

同様にして　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = 3R^2$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$ より，△ABC は正三角形である．

(3) OG//BC より，△EGO ∽ △AED
EG : GA = 1 : 2 であるから

$$\text{OE} : \text{AD} = 1 : 3 \quad \text{ゆえに} \quad \text{AD} = 3\text{OE}$$



③，④ を上式に代入すると

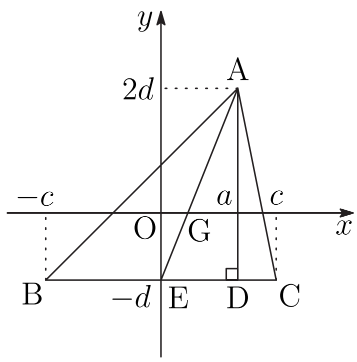
$$2R\sin B\sin C = 3R\cos A$$

$A + B + C = \pi$ より $\cos A = -\cos(B + C)$ であるから

$$\begin{aligned}2\sin B\sin C &= -3\cos(B + C)\\ &= -3(\cos B\cos C - \sin B\sin C)\end{aligned}$$

ゆえに　$3\cos B\cos C = \sin B\sin C$　よって　$\tan B\tan C = 3$

別解 O を座標平面上の原点とし，x 軸を辺 BC と平行にとり，A$(a,\ b)$ とし，B と C は y 軸に関して対称であるから，B$(-c, -d)$，C$(c, -d)$ とする．
OG//BC より，G は x 軸上にあるから，△ABC の重心 G の y 座標について



$$\frac{b + (-d) + (-d)}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2d$$

したがって

$$\text{OE} = |d|,\ \ \text{AD} = 3|d| \text{ より} \quad \text{AD} = 3\text{OE}$$

$$\text{BD} = |a + c|,\ \ \text{CD} = |c - a|$$

△ABC は鋭角三角形であるから，$|a| < |c|$ に注意して

$$\tan B\tan C = \frac{\text{AD}}{\text{BD}} \times \frac{\text{AD}}{\text{CD}} = \frac{3|d|}{|a + c|} \times \frac{3|d|}{|c - a|} = \frac{9d^2}{c^2 - a^2} \quad \cdots (*)$$

ここで，$\text{OA}^2 = \text{OC}^2$ であるから

$$a^2 + (2d)^2 = c^2 + (-d)^2 \quad \text{ゆえに} \quad c^2 - a^2 = 3d^2 \quad \cdots (**)$$

$d \neq 0$ であるから，$(**)$ を $(*)$ に代入すると　$\tan B\tan C = 3$

$\boxed{4}$ (1) A さん，B さんが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額をそれぞれ X，Y とすると

X	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	5	10	15	計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

よって，A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q は

$$p = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

$$q = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) (1) の X，Y に対して，ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額を Z とすると，Z およびその確率 $P(Z)$ を表にすると

合計金額 Z

X \ Y	**0**	**5**	**10**	**15**
0	15	0	0	0
5	30	15	5	5
10	30	25	15	10
15	30	25	20	15

合計金額の確率 $P(Z)$

X \ Y	**0**	**5**	**10**	**15**
0	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$
5	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
10	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}$
15	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}$

したがって

$$P(Z=0) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=5) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32}$$

$$P(Z=10) = \frac{3}{32}$$

$$P(Z=15) = q = \frac{8}{32}$$

$$P(Z=20) = \frac{1}{32}$$

$$P(Z=25) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32}$$

$$P(Z=30) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$$

よって，求める期待値 E は

$$E = 5 \times \frac{6}{32} + 10 \times \frac{3}{32} + 15 \times \frac{8}{32} + 20 \times \frac{1}{32} + 25 \times \frac{4}{32} + 30 \times \frac{7}{32} = \mathbf{\frac{255}{16}}$$