平成25年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

$\boxed{1}$ 一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし，OP = AP = BP = CPをみたす点Pを頂点とする四角錐POABCがある。辺APを$1:3$に内分する点をD，辺CPの中点をE，辺BCを$t:(1-t)$に内分する点をQとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$t$を用いて表せ。

(3) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の値を求めよ。

(4) 直線PQが平面ODEに垂直であるとき，tの値および線分OPの長さを求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面上で，次の連立不等式の表す領域をDとする。

$$x+2y \leqq 5, \quad 3x+y \leqq 8, \quad -2x-y \leqq 4, \quad -x-4y \leqq 7$$

点P$(x,\ y)$が領域D内を動くとき，$x+y$の値が最大となる点をQとし，最小となる点をRとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点Qおよび点Rの座標を求めよ。

(2) $a>0$かつ$b>0$とする。点P$(x,\ y)$が領域D内を動くとき，$ax+by$が点Qでのみ最大値をとり，点Rでのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$の値の範囲を求めよ。

3 横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表　と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏裏　となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

4 座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

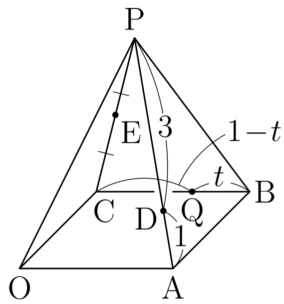
(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B をあわせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) D は線分 AP を 1 : 3 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1+3} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{OP}}}$$

E は線分 CP の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{OP}}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \{\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \boldsymbol{(1-t)\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{OC}} - \overrightarrow{\mathbf{OP}}}\end{aligned}$$

(3) OP = AP であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{POA} = 1\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(4) (3) と同様にして $\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\} \\ &= 3(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - (t+2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2}t - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 0 \quad \cdots ① \\ 2\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\} \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 0 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

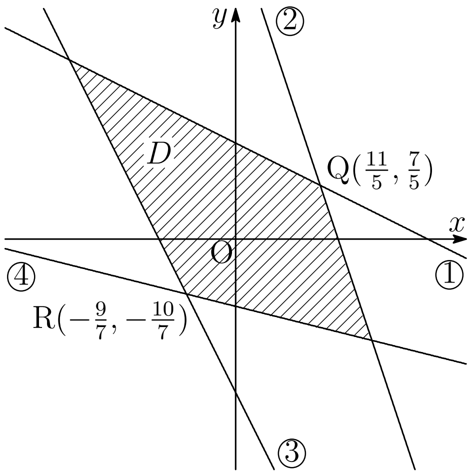
①，② より $\quad \boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{4}{3}$ $\quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathbf{OP}}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

2 (1) $x+2y=5\cdots$①, $3x+y=8\cdots$②, $-2x-y=4\cdots$③, $-x-4y=7\cdots$④

とおく．Dの表す領域は，図の斜線部分で，境界線を含む．直線$x+y=k$をlとする．lは傾き-1の直線で，①，② の直線の傾きは，それぞれ$-\frac{1}{2}$，-3であり，

$$-3<-1<-\tfrac{1}{2}$$

ゆえに，D内の点$\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$で，$k$は最大となる．



また，③，④の傾きは，それぞれ-2，$-\frac{1}{3}$であり，

$$-2<-1<-\tfrac{1}{4}$$

ゆえに，D内の点$\left(-\dfrac{9}{7},-\dfrac{10}{7}\right)$で，$k$は最小となる．

よって　　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}}\right)$，　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{-\dfrac{9}{7},-\dfrac{10}{7}}\right)$

(2) 直線$ax+by=k'$をl'とする．

l'は傾き$-\dfrac{a}{b}$，切片$\dfrac{k'}{b}$の直線である．$b>0$であるから，k'が最大・最小となるのは，それぞれ$\dfrac{k'}{b}$が最大・最小となるときである．

k'がQで最大値をとるとき，l'と①，②の傾きから

$$-3<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{2}\quad すなわち\quad \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<3\qquad\cdots(*)$$

k'がRで最小値をとるとき，l'と③，④の傾きから

$$-2<-\frac{a}{b}<-\frac{1}{4}\quad すなわち\quad \frac{1}{4}<\frac{a}{b}<2\qquad\cdots(**)$$

$a>0$，$b>0$より，$\dfrac{a}{b}$の符号に注意し，$(*)$，$(**)$の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1回目，2回目に出た目を，それぞれ i，j とすると，$|i-j|$ 枚の硬貨は1回だけ反転し，それ以外の硬貨は反転しないか，2回反転する．

したがって，この操作による表の枚数は $6-|i-j|$ である．

ゆえに表が1枚となるとき

$$6-|i-j|=1 \quad \text{すなわち} \quad |i-j|=5$$

これをみたすのは，$(i,\ j)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$ の2組である．

よって，求める確率は $\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$

(2) L および R において出た目を，それぞれ i，j とし，これらの操作による表の枚数を $LR(i,\ j)$ とする．

i) $2 \leqq i+j \leqq 6$ のとき，$(i+j)$ 枚の硬貨は1回だけ反転し，残りの硬貨は反転しないから $\quad LR(i,\ j)=6-(i+j)$

ii) $7 \leqq i+j \leqq 12$ のとき，$(i+j-6)$ 枚の硬貨は2回反転し，残りの硬貨は1回だけ反転するから $\quad LR(i,\ j)=i+j-6$

i),ii) より，$LR(i,\ j)=|i+j-6|$ となり，求める期待値は

$$\frac{1}{6^2}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6} LR(i,\ j)=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|i+j-6|=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-(7-i)+1|$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{1\leqq i,j\leqq 6}|j-i+1|$$

$$=\frac{1}{36}\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}|j-i+1|+\sum_{1\leqq i=j\leqq 6}|j-i+1|\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq j<i\leqq 6}(i-j-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i+1)+\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(j-i-1)+6\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\left\{\sum_{1\leqq i<j\leqq 6}(2j-2i)+6\right\}=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{j-1}(2j-2i)+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=2}^{6}\{2j(j-1)-j(j-1)\}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6}(j^2-j)+\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right)+\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{9}}$$

別解 $LR(i,\ j)=|i+j-6|$ の値は，右の表のようになる．したがって，求める期待値は

$j \backslash i$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4	3	2	1	0	1
2	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
4	1	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

$$\frac{1\cdot 10+2\cdot 8+3\cdot 6+4\cdot 4+5\cdot 2+6}{6^2}$$
$$=\frac{76}{36}=\boldsymbol{\frac{19}{9}}$$

(3) この操作により，すべての硬貨が表となるのは，L，R の操作が終わった時点で，次の (a)〜(f) の場合である．

(a) 裏表表表表表　(b) 裏裏表表表表　(c) 裏裏裏表表表
(d) 裏裏裏裏表表　(e) 裏裏裏裏裏表　(f) 裏裏裏裏裏裏

最初の L，R の操作で出た目をそれぞれ i，j とする．
(a)〜(e) となる $(i,\ j)$ の組は，順次,

$$(6,\ 5),\ (6,\ 4),\ (6,\ 3),\ (6,\ 2),\ (6,\ 1)$$

(f) となる $(i,\ j)$ の組は，$i+j=6$ をみたす 5 通り．
(a)〜(f) について，最後の L の操作における目の出方は，順次，1〜6 である．よって，求める確率は

$$\frac{5+5}{6^3}=\boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ と $y=x-2$ から y を消去すると

$$(x-1)^2+\{(x-2)-1\}^2=2 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2=0$$

ゆえに，$x=2$ で重解をもち，このとき $y=x-2$ より $y=0$
よって，直線 $y=x-2$ は円 C に点 **(2，0)** で接する．

(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ と $y=\frac{1}{4}x^2-1$ から y を消去し，整理すると

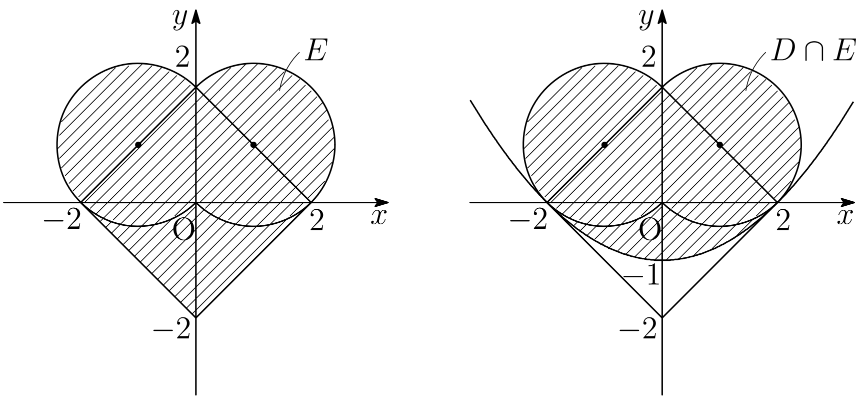
$$x^4-32x+48=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2\{(x+2)^2+8\}=0$$

ゆえに，$x=2$ で 2 重解をもち，このとき $y=\frac{1}{4}x^2-1$ より $y=0$
よって，求める共有点の座標は　**(2，0)**

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，A の表す領域は，x 軸，y 軸および直線 $x+y=2$ で囲まれた図形の内部および境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，x 軸，y 軸，原点に関して，それぞれ対称な点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ も不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ をみたす．したがって，A の表す領域は，4 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0, -2)$ を頂点とする四角形の内部およびその周上である．

$x \geqq 0$ のとき，B の表す領域は，y 軸の右側で，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の内部とその境界線である．このとき，$(x,\ y)$ に対して，y 軸と対称な点 $(-x,\ y)$ も不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ をみたす．

したがって，$A \cup B$ の表す領域 E および $D \cap E$ の表す領域は，次のようになる．ただし，境界線を含む．



3 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$$

放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の x 軸の下側の部分の面積は

$$-\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)dx = \frac{8}{3}$$

2 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ を直径とする円の半径は $\sqrt{2}$ である．

よって，求める面積は

$$4+\frac{8}{3}+\pi(\sqrt{2})^2 = \boldsymbol{\frac{20}{3}+2\pi}$$