平成 24 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 原点を O とする座標空間に，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ 2)$，C$(-2,\ 1,\ 3)$ がある。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC において，$\angle$B は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(3) $\triangle$OAH の面積を求めよ。

2 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える。曲線 $C : y = f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ。

(2) (1) において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ P$(p,\ f(p))$，Q$(q,\ f(q))$ とする (ただし $p < q$)。このとき，点 P と点 Q は点 A$(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P，Q の間の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P，Q の x 座標 p，q もそれぞれ求めよ。

3 100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ。

$\dfrac{1}{3}(100 - 7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，

それ以外の場合は整数ではない。

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。

$\boxed{4}$ いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n = 1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(1,\ 0,-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 1,\ 1)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{1\cdot(-2)+0\cdot1+(-2)\cdot1}{\sqrt{5}\sqrt{6}}=\frac{-4}{\sqrt{30}}<0$$

よって　$\angle\mathrm{B}>\dfrac{\pi}{2}$

(2) 点Hは BC 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 0,\ 2)+t(-2,\ 1,\ 1)=(-2t,\ t,\ t+2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2t,\ t,\ t+2)-(1,\ 0,\ 0)=(-2t-1,\ t,\ t+2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(-2t-1)\cdot(-2)+t\cdot1+(t+2)\cdot1=0\quad これを解いて\quad t=-\frac{2}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$　よって　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\boldsymbol{-}\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$ および (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{2}{3}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{4}{3}$$

よって，△OAH の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAH}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot2^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ より，C 上の点 $(u,\ f(u))$ における接線の傾きが t であるとき，u は方程式

$$3x^2 + 6x + 1 = t \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + 6x + 1 - t = 0 \quad \cdots ①$$

の解である．この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = 3^2 - 3(1 - t) = 3t + 6$$

$t \geqq 0$ のとき，$D > 0$ であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ．
よって，C は傾きが t $(t \geqq 0)$ である接線を 2 本もつ．

(2) p，q は 2 次方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により

$$p + q = -2, \quad pq = \frac{1 - t}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(p) + f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) + (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\
&= p^3 + q^3 + 3(p^2 + q^2) + p + q - 2 \\
&= (p + q)^3 - 3pq(p + q) + 3\{(p + q)^2 - 2pq\} \\
&\qquad\qquad + (p + q) - 2 \\
&= (-2)^3 - 3 \times \frac{1 - t}{3} \times (-2) + 3\left\{(-2)^2 - 2 \times \frac{1 - t}{3}\right\} \\
&\qquad\qquad + (-2) - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{p + q}{2} = -1$，$\dfrac{f(p) + f(q)}{2} = 0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2$ であるから，まず

$$\begin{aligned}
f(p)-f(q)&=(p^3+3p^2+p-1)-(q^3+3q^2+q-1)\\
&=p^3-q^3+3(p^2-q^2)+p-q\\
&=(p-q)\{(p^2+pq+q^2)+3(p+q)+1\}\\
&=(p-q)\{(p+q)^2-pq+3(p+q)+1\}\\
&=(p-q)\left\{(-2)^2-\frac{1-t}{3}+3(-2)+1\right\}\\
&=\frac{1}{3}(t-4)(p-q)
\end{aligned}$$

次に　$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=(-2)^2-4\times\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{4}{3}(t+2)$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2&=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2\\
&=(p-q)^2+\frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2\\
&=(p-q)^2\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}\\
&=\frac{4}{3}(t+2)\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}=\frac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)
\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)$ $(t\geqq 0)$ の最小値を求めればよいから

$$g'(t)=\frac{4}{9}(t-1)(t-3)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{200}{27}$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$\frac{200}{27}$	$\nearrow$

上の増減表により，$g(t)$ は，$t=0,\ 3$ で最小値 $\dfrac{200}{27}$ をとる．

ゆえに，PQ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{6}}{9}}$ である．

$p,\ q$ $(p<q)$ は方程式 ① の解であるから

$t=0$ のとき，$3x^2+6x+1=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{6}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}}$$

$t=3$ のとき，$3x^2+6x-2=0$ を解いて

$$\boldsymbol{p=\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\quad q=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}}$$

補足

$f(x)$ を $3x^2+6x+1-t$ で割った商と余りは，それぞれ $\dfrac{1}{3}(x+1)$，$\dfrac{1}{3}(t-4)(x+1)$ であるから

$$f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(3x^2+6x+1-t)+\frac{1}{3}(t-4)(x+1)$$

p，q は方程式 $3x^2+6x+1-t=0$ の解であるから

$$f(p)=\frac{1}{3}(t-4)(p+1),\quad f(q)=\frac{1}{3}(t-4)(q+1)$$

これを次の計算に用いることができる．

(2) $f(p)+f(q)=\dfrac{1}{3}(t-4)(p+q+2)$

解と係数の関係により，$p+q=-2$ であるから，$f(p)+f(q)=0$

ゆえに $\dfrac{p+q}{2}=-1$，$\dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

よって，2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称である．

(3) $f(p)-f(q)=\dfrac{1}{3}(t-4)(p-q)$

次に $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=(-2)^2-4\times\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{4}{3}(t+2)$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2&=(p-q)^2+\{f(p)-f(q)\}^2\\
&=(p-q)^2+\frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2\\
&=(p-q)^2\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}\\
&=\frac{4}{3}(t+2)\left\{1+\frac{1}{9}(t-4)^2\right\}=\frac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)
\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{4}{27}(t^3-6t^2+9t+50)\ (t\geqq 0)$ の最小値を求めればよい． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$\frac{1}{3}(100-7x)=\frac{1}{3}(99-6x+1-x)=33-2x-\frac{x-1}{3}$$

上式が整数であるのは，$x-1$ が 3 の倍数，すなわち x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に限る．

(2) A を x セット，B を y セット，合計 100 枚の乗車券を購入すると

$$7x+3y=100 \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{3}(100-7x)$$

ここで，y は整数であるから，(1) の結果より，k を 0 以上の整数とすると，$x=3k+1\cdots$① とおける．このとき

$$y=\frac{1}{3}\{100-7(3k+1)\}=31-7k\cdots②$$

y は 0 以上の整数であるから　$31-7k \geqq 0$　ゆえに　$k \leqq 4$

$k=0,1,2,3,4$ であるから ①，② より，A，B それぞれの組合せは

(A，B) = (1，31)，(4，24)，(7，17)，(10，10)，(13，3)

(3) セット A とセット B を組み合せて購入金額が最も低くなるのは，同じ購入枚数であれば，セット A を最大に組み合せた場合である．A だけで 15 セット (乗車券 105 枚) 購入した場合は

$$480 \times 15 = 7200 \text{ (円)}$$

100 枚以上 104 枚以下の枚数の乗車券を A と B で組み合せる場合，B セットが 3 枚入りであるから

$$100 + 3 = 103, \quad 101 + 3 = 104$$

したがって，乗車券を 100 枚，101 枚，102 枚購入する場合について調べればよい．

i) 乗車券を 100 枚購入する場合，(2) の結果から，A を 13 セット，B を 3 セット購入するとき，購入金額は最小になり，その金額は

$$480 \times 13 + 220 \times 3 = 6900 \text{ (円)}$$

ii) 乗車券を 101 枚購入する場合，A を x_1 セット，B を y_1 セット購入するとき

$$7x_1 + 3y_1 = 101 \quad \text{ゆえに} \quad y_1 = \frac{1}{3}(101 - 7x_1) = 33 - 2x_1 - \frac{x_1 - 2}{3}$$

x_1 は 0 以上の整数 k_1 を用いて，$x_1 = 3k_1 + 2$ とおけるので，
$y_1 = 29 - 7k_1$ となり，y_1 は 0 以上の整数であるから，$0 \leqq k_1 \leqq 4$
購入金額が最小となるのは，$k_1 = 4$，すなわち A を 14 セット，B を 1 セット購入するときで，その金額は

$$480 \times 14 + 220 \times 1 = 6940 \text{ (円)}$$

iii) 乗車券を 102 枚購入する場合，A を x_2 セット，B を y_2 セット購入するとき

$$7x_2 + 3y_2 = 102 \quad \text{ゆえに} \quad y_2 = \frac{1}{3}(102 - 7x_2) = 34 - 2x_1 - \frac{x_2}{3}$$

x_2 は 0 以上の整数 k_2 を用いて，$x_2 = 3k_2$ とおけるので，
$y_2 = 34 - 7k_2$ となり，y_2 は 0 以上の整数であるから，$0 \leqq k_2 \leqq 4$
購入金額が最小となるのは，$k_2 = 4$，すなわち A を 12 セット，B を 6 セット購入するときで，その金額は

$$480 \times 12 + 220 \times 6 = 7080 \text{ (円)}$$

以上のことから，**A を 13 セット，B を 3 セット**購入したとき，購入金額は最小となり，その金額は **6900 円**である．

補足

(2) d を整数とする．整数 x，y を解とする次の 1 次不定方程式を考える．

$$7x + 3y = d \cdots (*)$$

$7x + 3y = 1$ の整数解の 1 つは $(x,\ y) = (1, -2)$ であるから，
$(*)$ の整数解の 1 つは　$(x,\ y) = (d, -2d)$
$7x + 3y = 0$ の整数解は，整数 k を用いて　$(x,\ y) = (-3k,\ 7k)$
ゆえに，$(x,\ y) = (d - 3k,\ -2d + 7k)$ は $(*)$ の解である．
$(x',\ y')$ が $(*)$ の解であるとすると

$$7x' + 3y' = d \cdots (**)$$

$(*)$，$(**)$ より　$7(x' - x) + 3(y' - y) = 0$
ゆえに，整数 k' を用いて　$x' - x = -3k',\ y' - y = 7k'$
したがって　　$x' = d - 3(k + k'),\ y' = -2d + 7(k + k')$
よって，$(x,\ y) = (d - 3k,\ -2d + 7k)$ は $(*)$ の一般解である．

$d = 100$ とすると，$(*)$ の解は　$(x,\ y) = (100 - 3k, -200 + 7k)$
このとき，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ であるから　$29 \leqq k \leqq 33$
よって　$(x,\ y) = (13,\ 3),\ (10,\ 10),\ (7,\ 17),\ (4,\ 24),\ (1,\ 31)$

(3) $(x,\ y) = (d - 3k,\ -2d + 7k)$ より，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ であるから，購入金額は

$$480(d - 3k) + 220(-2d + 7k) = 40d + 100k \quad \left(\frac{2d}{7} \leqq k \leqq \frac{d}{3}\right)$$

購入金額が最小となるのは，d に対して，最小の整数 k をとるときである．
$d \geqq 100$ において購入金額が最小となるのは，$d = 100$ のとき，$k = 29$ で，
その購入金額は 6900 円である．このとき，$x = 13$，$y = 3$ である．■

$\boxed{4}$ (1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている．

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

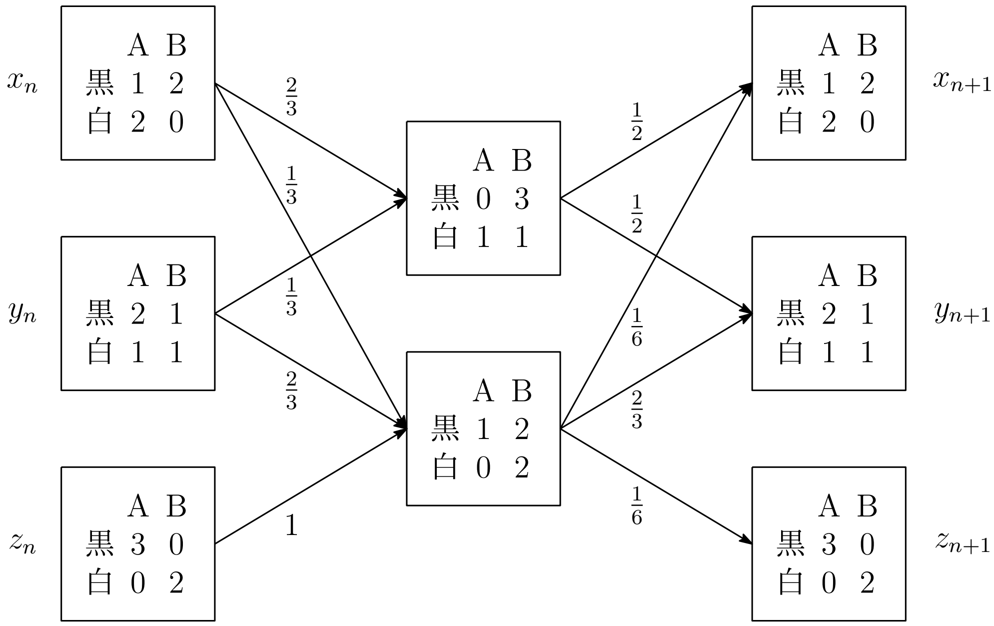
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 試行 T を n 回行ったとき，箱 A に黒玉が 1 個，2 個，3 個ある確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) y_n + 1 \times \frac{2}{3} z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$x_1 = p_1$，$y_1 = p_2$，$z_1 = p_3$ であるから　$x_1 = \dfrac{1}{6}$,　$y_1 = \dfrac{2}{3}$,　$z_1 = \dfrac{1}{6}$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18}x_n + \frac{5}{18}y_n + \frac{1}{6}z_n$$
$$y_{n+1} = \frac{5}{9}x_n + \frac{11}{18}y_n + \frac{2}{3}z_n$$
$$z_{n+1} = \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{9}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

したがって

$$x_2 = \frac{7}{18}x_1 + \frac{5}{18}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{7}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$
$$y_2 = \frac{5}{9}x_1 + \frac{11}{18}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = \frac{5}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$
$$z_2 = \frac{1}{18}x_1 + \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{1}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$q_1 = x_2$，$q_2 = y_2$，$q_3 = z_2$ であるから

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{5}{18},\quad q_2 = \frac{11}{18},\quad q_3 = \frac{1}{9}}$$

(3) 求める確率は z_3 であるから，(2) の結果より

$$z_3 = \frac{1}{18}x_2 + \frac{1}{9}y_2 + \frac{1}{6}z_2 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{108}}$$

補足

x_{n+1}，y_{n+1}，z_{n+1} が x_n，y_n，z_n によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する)．このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という． ■