

平成 24 年度 九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部 (経済・経営))

1 原点を O とする座標空間に, 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$, $C(-2, 1, 3)$ がある。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ において, $\angle B$ は $\frac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。
- (2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。
点 H の座標を求めよ。
- (3) $\triangle OAH$ の面積を求めよ。

2 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき, 曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ。
- (2) (1) において, 傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を, それぞれ $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ とする (ただし $p < q$)。このとき, 点 P と点 Q は点 $A(-1, 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。
- (3) $t \geq 0$ のとき, 2 点 P, Q の間の距離の最小値を求めよ。また, 最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。

3 100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき, 乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と, 乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して, 利用することにした。以下の問いに答えよ。

- (1) x が 0 以上の整数であるとき, 次のことを示せ。
 $\frac{1}{3}(100 - 7x)$ は, x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり,
それ以外の場合は整数ではない。
- (2) 購入した乗車券は, 余らせずすべて利用するものとする。このとき, セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。
- (3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき, A のみ, あるいは B のみを購入する場合も含めて, 購入金額が最も低くなるのは, A, B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。

4 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

解答例

1 (1) $\vec{BA} = (1, 0, -2)$, $\vec{BC} = (-2, 1, 1)$ であるから

$$\cos \angle B = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{5} \sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{30}} < 0$$

よって $\angle B > \frac{\pi}{2}$

(2) 点 H は BC 上の点であるから, 実数 t を用いて

$$\vec{OH} = \vec{OB} + t\vec{BC} = (0, 0, 2) + t(-2, 1, 1) = (-2t, t, t+2)$$

$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = (-2t, t, t+2) - (1, 0, 0) = (-2t-1, t, t+2)$$

$\vec{AH} \perp \vec{BC}$ より, $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ であるから

$$(-2t-1) \cdot (-2) + t \cdot 1 + (t+2) \cdot 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\frac{2}{3}$$

したがって $\vec{OH} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ よって $H\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(3) $\vec{OA} = (1, 0, 0)$ および (2) の結果から

$$|\vec{OA}| = 1, \quad |\vec{OH}| = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 2, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OH} = \frac{4}{3}$$

よって, $\triangle OAH$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle OAH &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OH}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OH})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 \cdot 2^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

- 2 (1) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$ より, C 上の点 $(u, f(u))$ における接線の傾きが t であるとき, u は方程式

$$3x^2 + 6x + 1 = t \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + 6x + 1 - t = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の解である. この2次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = 3^2 - 3(1 - t) = 3t + 6$$

$t \geq 0$ のとき, $D > 0$ であるから, ① は異なる2つの実数解をもつ. よって, C は傾きが t ($t \geq 0$) である接線を2本もつ.

- (2) p, q は2次方程式①の解であるから, 解と係数の関係により

$$p + q = -2, \quad pq = \frac{1 - t}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(p) + f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) + (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\ &= p^3 + q^3 + 3(p^2 + q^2) + p + q - 2 \\ &= (p + q)^3 - 3pq(p + q) + 3\{(p + q)^2 - 2pq\} \\ &\quad + (p + q) - 2 \\ &= (-2)^3 - 3 \times \frac{1 - t}{3} \times 2 + 3 \left\{ (-2)^2 - 2 \times \frac{1 - t}{3} \right\} \\ &\quad + (-2) - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\frac{p + q}{2} = -1, \frac{f(p) + f(q)}{2} = 0$

よって, 2点 $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ は点 $A(-1, 0)$ に関して対称である.

(3) $PQ^2 = (p - q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2$ であるから , まず

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= (p^3 + 3p^2 + p - 1) - (q^3 + 3q^2 + q - 1) \\ &= p^3 - q^3 + 3(p^2 - q^2) + p - q \\ &= (p - q)\{(p^2 + pq + q^2) + 3(p + q) + 1\} \\ &= (p - q)\{(p + q)^2 - pq + 3(p + q) + 1\} \\ &= (p - q) \left\{ (-2)^2 - \frac{1-t}{3} + 3(-2) + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(t - 4)(p - q) \end{aligned}$$

次に $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = (-2)^2 - 4 \times \frac{1-t}{3} = \frac{4}{3}(t + 2)$
したがって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (p - q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2 \\ &= (p - q)^2 + \frac{1}{9}(t - 4)^2(p - q)^2 \\ &= (p - q)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{9}(t - 4)^2 \right\} \\ &= \frac{4}{3}(t + 2) \left\{ 1 + \frac{1}{9}(t - 4)^2 \right\} = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50) \end{aligned}$$

$g(t) = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)$ ($t \geq 0$) の最小値を求めればよいから

t	0	...	1	...	3	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	$\frac{200}{27}$	\nearrow	8	\searrow	$\frac{200}{27}$	\nearrow

上の増減表により , $g(t)$ は , $t = 0, 3$ で最小値 $\frac{200}{27}$ をとる .

ゆえに , PQ の最小値は $\frac{10\sqrt{6}}{9}$ である .

p, q ($p < q$) は方程式 ① の解であるから

$t = 0$ のとき , $3x^2 + 6x + 1 = 0$ を解いて

$$p = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}, \quad q = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$$

$t = 3$ のとき , $3x^2 + 6x - 2 = 0$ を解いて

$$p = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, \quad q = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3}$$

補足

$f(x)$ を $3x^2+6x+1-t$ で割った商と余りは、それぞれ $\frac{1}{3}(x+1)$, $\frac{1}{3}(t-4)(x+1)$ であるから

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(3x^2+6x+1-t) + \frac{1}{3}(t-4)(x+1)$$

p, q は方程式 $3x^2+6x+1-t=0$ の解であるから

$$f(p) = \frac{1}{3}(t-4)(p+1), \quad f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(q+1)$$

これを次の計算に用いることができる。

$$(2) \quad f(p) + f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(p+q+2)$$

解と係数の関係により、 $p+q=-2$ であるから、 $f(p) + f(q) = 0$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{p+q}{2} = -1, \quad \frac{f(p)+f(q)}{2} = 0$$

よって、2点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ は点 $A(-1, 0)$ に関して対称である。

$$(3) \quad f(p) - f(q) = \frac{1}{3}(t-4)(p-q)$$

$$\text{次に} \quad (p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = (-2)^2 - 4 \times \frac{1-t}{3} = \frac{4}{3}(t+2)$$

したがって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (p-q)^2 + \{f(p) - f(q)\}^2 \\ &= (p-q)^2 + \frac{1}{9}(t-4)^2(p-q)^2 \\ &= (p-q)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{9}(t-4)^2 \right\} \\ &= \frac{4}{3}(t+2) \left\{ 1 + \frac{1}{9}(t-4)^2 \right\} = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50) \end{aligned}$$

$g(t) = \frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)$ ($t \geq 0$) の最小値を求めればよい。

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \frac{1}{3}(100 - 7x) = \frac{1}{3}(99 - 6x + 1 - x) = 33 - 2x - \frac{x-1}{3}$$

上式が整数であるのは、 $x-1$ が 3 の倍数、すなわち x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に限る。

(2) A を x セット、B を y セット、合計 100 枚の乗車券を購入すると

$$7x + 3y = 100 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{3}(100 - 7x)$$

ここで、 y は整数であるから、(1) の結果より、 k を 0 以上の整数とすると、 $x = 3k + 1 \cdots \textcircled{1}$ とおける。このとき

$$y = \frac{1}{3}\{100 - 7(3k + 1)\} = 31 - 7k \cdots \textcircled{2}$$

y は 0 以上の整数であるから $31 - 7k \geq 0$ ゆえに $k \leq 4$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ であるから $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、A、B それぞれの組合せは

$$(A, B) = (1, 31), (4, 24), (7, 17), (10, 10), (13, 3)$$

- (3) セット A とセット B を組み合わせて購入金額が最も低くなるのは、同じ購入枚数であれば、セット A を最大に組み合わせた場合である。A だけで 15 セット (乗車券 105 枚) 購入した場合は

$$480 \times 15 = 7200 \text{ (円)}$$

100 枚以上 104 枚以下の枚数の乗車券を A と B で組み合わせる場合、B セットが 3 枚入りであるから

$$100 + 3 = 103, \quad 101 + 3 = 104$$

したがって、乗車券を 100 枚、101 枚、102 枚購入する場合について調べればよい。

- i) 乗車券を 100 枚購入する場合、(2) の結果から、A を 13 セット、B を 3 セット購入するとき、購入金額は最小になり、その金額は

$$480 \times 13 + 220 \times 3 = 6900 \text{ (円)}$$

- ii) 乗車券を 101 枚購入する場合、A を x_1 セット、B を y_1 セット購入するとき

$$7x_1 + 3y_1 = 101 \quad \text{ゆえに} \quad y_1 = \frac{1}{3}(101 - 7x_1) = 33 - 2x_1 - \frac{x_1 - 2}{3}$$

x_1 は 0 以上の整数 k_1 を用いて、 $x_1 = 3k_1 + 2$ とおけるので、
 $y_1 = 29 - 7k_1$ となり、 y_1 は 0 以上の整数であるから、 $0 \leq k_1 \leq 4$
 購入金額が最小となるのは、 $k_1 = 4$ 、すなわち A を 14 セット、B を 1 セット購入するときで、その金額は

$$480 \times 14 + 220 \times 1 = 6940 \text{ (円)}$$

- iii) 乗車券を 102 枚購入する場合、A を x_2 セット、B を y_2 セット購入するとき

$$7x_2 + 3y_2 = 102 \quad \text{ゆえに} \quad y_2 = \frac{1}{3}(102 - 7x_2) = 34 - 2x_2 - \frac{x_2}{3}$$

x_2 は 0 以上の整数 k_2 を用いて、 $x_2 = 3k_2$ とおけるので、
 $y_2 = 34 - 7k_2$ となり、 y_2 は 0 以上の整数であるから、 $0 \leq k_2 \leq 4$
 購入金額が最小となるのは、 $k_2 = 4$ 、すなわち A を 12 セット、B を 6 セット購入するときで、その金額は

$$480 \times 12 + 220 \times 6 = 7080 \text{ (円)}$$

以上のことから、A を 13 セット、B を 3 セット購入したとき、購入金額は最小となり、その金額は 6900 円である。

補足

(2) d を整数とする . 整数 x, y を解とする次の 1 次不定方程式を考える .

$$7x + 3y = d \cdots (*)$$

$7x + 3y = 1$ の整数解の 1 つは $(x, y) = (1, -2)$ であるから ,

(*) の整数解の 1 つは $(x, y) = (d, -2d)$

$7x + 3y = 0$ の整数解は , 整数 k を用いて $(x, y) = (-3k, 7k)$

ゆえに , $(x, y) = (d - 3k, -2d + 7k)$ は (*) の解である .

(x', y') が (*) の解であるとする

$$7x' + 3y' = d \cdots (**)$$

(*) , (**) より $7(x' - x) + 3(y' - y) = 0$

ゆえに , 整数 k' を用いて $x' - x = -3k', y' - y = 7k'$

したがって $x' = d - 3(k + k'), y' = -2d + 7(k + k')$

よって , $(x, y) = (d - 3k, -2d + 7k)$ は (*) の一般解である .

$d = 100$ とすると , (*) の解は $(x, y) = (100 - 3k, -200 + 7k)$

このとき , $x \geq 0, y \geq 0$ であるから $29 \leq k \leq 33$

よって $(x, y) = (13, 3), (10, 10), (7, 17), (4, 24), (1, 31)$

(3) $(x, y) = (d - 3k, -2d + 7k)$ より , $x \geq 0, y \geq 0$ であるから , 購入金額は

$$480(d - 3k) + 220(-2d + 7k) = 40d + 100k \quad \left(\frac{2d}{7} \leq k \leq \frac{d}{3} \right)$$

購入金額が最小となるのは , d に対して , 最小の整数 k をとるときである .

$d \geq 100$ において購入金額が最小となるのは , $d = 100$ のとき , $k = 29$ で , その購入金額は 6900 円である . このとき , $x = 13, y = 3$ である .

- 4 (1) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると, 箱 B には黒玉 2 個と白玉 2 個が入っている.

箱 A に黒玉が 1 個入っている (箱 B から白玉 2 個を取り出す) 確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

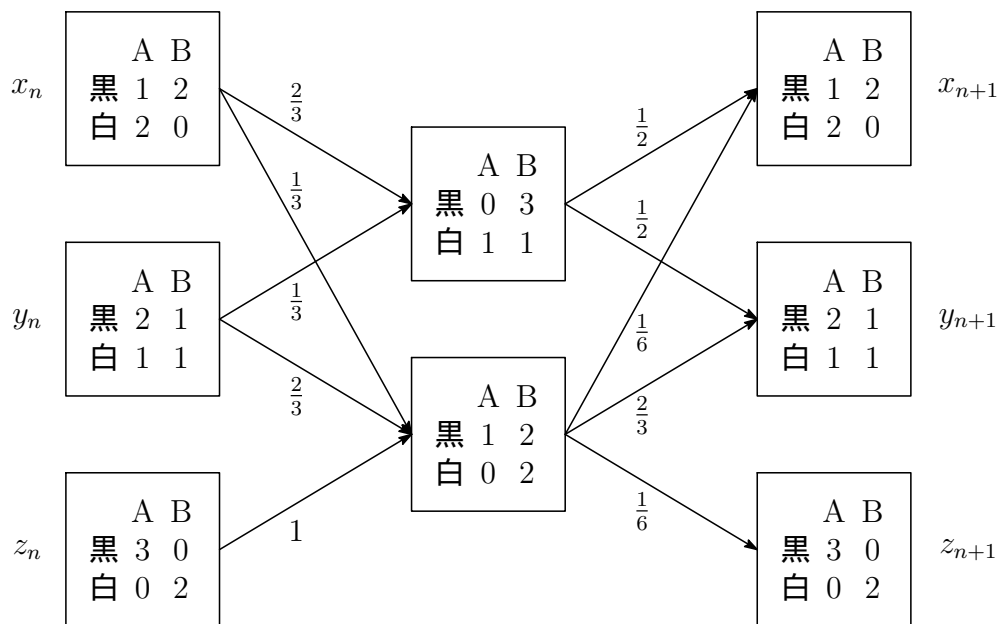
箱 A に黒玉が 2 個入っている (箱 B から黒玉 1 個と白玉 1 個を取り出す) 確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

箱 A に黒玉が 3 個入っている (箱 B から黒玉 2 個を取り出す) 確率 p_3 は

$$p_3 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

- (2) 試行 T を n 回行ったとき, 箱 A に黒玉が 1 個, 2 個, 3 個ある確率をそれぞれ x_n, y_n, z_n とすると



$$x_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \right) y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right) x_n + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right) y_n + 1 \times \frac{2}{3} z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} y_n + 1 \times \frac{1}{6} z_n$$

$x_1 = p_1, y_1 = p_2, z_1 = p_3$ であるから $x_1 = \frac{1}{6}, y_1 = \frac{2}{3}, z_1 = \frac{1}{6}$

$$x_{n+1} = \frac{7}{18}x_n + \frac{5}{18}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

$$y_{n+1} = \frac{5}{9}x_n + \frac{11}{18}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{18}x_n + \frac{1}{9}y_n + \frac{1}{6}z_n$$

したがって

$$x_2 = \frac{7}{18}x_1 + \frac{5}{18}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{7}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

$$y_2 = \frac{5}{9}x_1 + \frac{11}{18}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = \frac{5}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$$

$$z_2 = \frac{1}{18}x_1 + \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}z_1 = \frac{1}{18} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$q_1 = x_2, q_2 = y_2, q_3 = z_2$ であるから

$$q_1 = \frac{5}{18}, \quad q_2 = \frac{11}{18}, \quad q_3 = \frac{1}{9}$$

(3) 求める確率は z_3 であるから, (2) の結果より

$$z_3 = \frac{1}{18}x_2 + \frac{1}{9}y_2 + \frac{1}{6}z_2 = \frac{1}{18} \times \frac{5}{18} + \frac{1}{9} \times \frac{11}{18} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{11}{108}$$

補足

$x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ が x_n, y_n, z_n によって定まる (1つ前の時点だけを考慮する).
 このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という.