平成 23 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 1 2 3 4

1 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t > 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = x$ との交点の座標を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

2 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - {a_n}^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{7}$ とする。$a_k = a_1$ をみたす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

3 平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$ をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 10$ となることを示せ。

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 = -4$ をみたす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ。

4 1から4までの数字が1つずつ書かれた4枚のカードがある。その4枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1から4までの数字が1つずつ書かれた4個の球が入っている袋から同時に2個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に1，2，3，4と並べ，上の操作を2回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) カードが左から順に1，2，3，4と並ぶ確率を求めよ。

(2) カードが左から順に4，3，2，1と並ぶ確率を求めよ。

(3) 左端のカードの数字が1になる確率を求めよ。

(4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ。

解答例

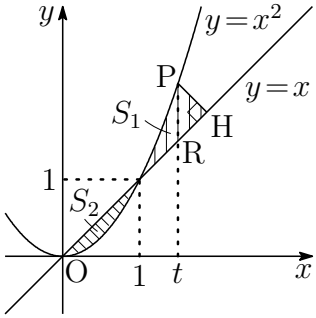
1 (1) 直線 PH は，点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，直線 $y=x\cdots$① に垂直な直線であるから

$$y-t^2=-(x-t)$$

すなわち　$y=-x+t^2+t\quad\cdots$②

H の座標は ①，② を解いて

$$\boldsymbol{\left(\frac{t^2+t}{2},\ \frac{t^2+t}{2}\right)}$$



(2) $\mathrm{R}(t,\ t)$ であるから

$$\triangle\mathrm{PRH}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{PR}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}(t^4-2t^3+t^2)}$$

(3) (2) の結果を用いて，求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1&=\int_1^t(x^2-x)\,dx+\triangle\mathrm{PRH}\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^t+\frac{1}{4}(t^4-2t^3+t^2)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(4)
$$S_2=\int_0^1(x-x^2)\,dx=-\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ のとき，上式および (3) の結果より

$$\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\quad\text{ゆえに}\quad t^2(3t^2-2t-3)=0$$

$t>1$ に注意して　$\boldsymbol{t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}}$ ■

2 (1) 与えられた漸化式より

$$a_2 = \frac{2a_1}{1-{a_1}^2} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1-{a_2}^2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1-{a_3}^2} = \frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

したがって，a_2 以降は，交互に $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の繰り返しであるから

$$\boldsymbol{a_{10} = \sqrt{3},\quad a_{11} = -\sqrt{3}}$$

(2) $$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

(3) $a_n = \tan\theta_n$ とおくと　$a_{n+1} = \dfrac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n} = \tan 2\theta_n$

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{7}$ より

$$a_2 = \tan\frac{2}{7}\pi,\quad a_3 = \tan\frac{4}{7}\pi,\quad a_4 = \tan\frac{8}{7}\pi = \tan\frac{\pi}{7}$$

よって，$a_k = a_1$ をみたす最小の自然数 k は　**4**　■

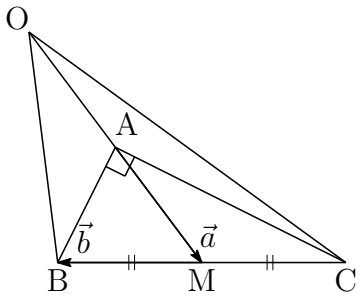
3 (1) $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}\cdots$ ① より　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

M は BC の中点であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

上の 2 式より　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

よって，点 A は OM の中点である．

(2) $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ であるから，(1) の結果から，A は BC を直径とする円周上の点である．
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{a}-\vec{b}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|+|2\vec{a}-\vec{b}|^2=8|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ より

$$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=-4$$
$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=-4$$

上式に ①，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，および (2) の結果を代入し整理すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=1\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1}$$

■

4 (1) 1 回の操作による球の取り出し方の総数は　${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ (通り)
カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，2 回とも同じ球の組合せであるから，求める確率は

$$\frac{6 \times 1}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶのは，1 回目に $\{1, 4\}$，2 回目 $\{2, 3\}$ の球を取り出す場合と 1 回目に $\{2, 3\}$，2 回目に $\{1, 4\}$ を取り出す場合の 2 通りであるから，求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(3) 左端のカードの数字が 1 になるのは，次の i)，ii) の場合.

i) 1，2 回目ともに $\{1,\ k\}$ $(k = 2, 3, 4)$ を取り出す確率は

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

ii) 1，2 回目ともに 1 以外の球を取り出す確率は

$$\frac{({}_3\mathrm{C}_2)^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

i) と ii) は互いに排反であるから，求める確率は　$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

(4) 左端が X となる確率を $P(X)$ とすると，(3) の結果より　$P(1) = \frac{1}{3}$
左端に 2，3，4 のカードが並ぶ確率は等しいから

$$P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1 - P(1)}{3} = \frac{2}{9}$$

よって，求める期待値は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} kP(k) = 1 \cdot \frac{1}{3} + (2 + 3 + 4) \cdot \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{7}{3}}$ ■