平成22年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

1 三角形ABCの3辺の長さを$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とする。実数$t \geqq 0$を与えたとき，Aを始点としBを通る半直線上に$\mathrm{AP}=tc$となるように点Pをとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2をa，b，c，tを用いて表せ。

(2) 点Pが$\mathrm{CP}=a$を満たすとき，tを求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点Pが辺AB上にちょうど2つあるとき，$\angle\mathrm{A}$と$\angle\mathrm{B}$に関する条件を求めよ。

2 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう1回サイコロを振って，2つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が7以上になった場合は0点とする。この取り決めによって，2回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを2回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が6のときだけ2回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに2回目を振るとよいか。

3 xy平面上に原点Oを中心とする半径1の円を描き，その上半分をCとし，その両端を$\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$とする。C上の2点N，Mを$\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$となるように取る。ただし，$\mathrm{N} \neq \mathrm{B}$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$と置くとき，弦の長さMB及び点Mの座標を$\theta$を用いて表せ。

(2) 点Nからx軸に降ろした垂線をNPとしたとき，PBをθを用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$とおく。条件$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$をtを用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$となるような点Mが唯一つあることを示せ。

4 以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和$1+2+\cdots+n$をnの多項式で表せ。

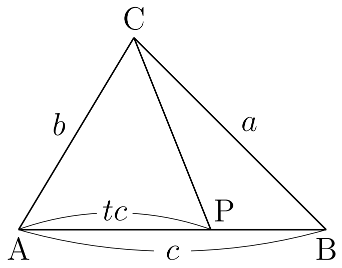
(2) 和$1^2+2^2+\cdots+n^2$をnの多項式で表せ。

(3) 和$1^3+2^3+\cdots+n^3$をnの多項式で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$



$\triangle$APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc\cos A$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2)\\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{CP} = a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに　$(t-1)(a^2-b^2+tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b \geqq a} \textbf{ のとき}\quad \boldsymbol{t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}}\\ &\boldsymbol{b < a} \textbf{ のとき}\quad \boldsymbol{t = 1}\end{aligned}$$

(3) AB 上にちょうど 2 つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が 2 個あればよい．したがって，(2) の結果から

$b \geqq a$ のとき $(B \geqq A)$

$$\frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって　$\boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$

2 (1) サイコロを 2 回振るときの得点は，右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{21}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$\begin{aligned} E =& 0\times\frac{21}{36}+2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36} \\ &+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36} \\ =& \boldsymbol{\frac{35}{18}} \end{aligned}$$

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

(2) (1) の場合において，最初の目が 6 であるとき，2 回目の目に関係なく 6 点であると考えればよいので，得点は右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6

$$E=0\times\frac{21}{36}+2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{11}{36}=\boldsymbol{\frac{53}{18}}$$

(3) サイコロを投げて1回目，2回目に出た目をそれぞれi，jとする．1回目(最初)の目がn以上であるとき$(1 \leqq n \leqq 6)$，2回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値$E(n)$は

$$E(n) = \frac{1}{6}\sum_{i=n}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1 \leqq i < n \\ i+j \leqq 6}} (i+j)$$

また，$E(n+1)$は$(1 \leqq n \leqq 5)$

$$E(n+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=n+1}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1 \leqq i < n+1 \\ i+j \leqq 6}} (i+j)$$

上の2式から，$1 \leqq n \leqq 5$のとき

$$\begin{aligned}
E(n+1) - E(n) &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{n+j \leqq 6} (n+j) \\
&= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{k=n+1}^{6} k \\
&= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36} \times \frac{1}{2}(6-n)(n+7) \\
&= \frac{1}{72}(-n^2 - 13n + 42) \\
&= \frac{1}{72}\{42 - n(n+13)\}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&E(2) - E(1) > 0, \quad E(3) - E(2) > 0, \quad E(4) - E(3) < 0, \\
&E(5) - E(4) < 0, \quad E(6) - E(5) < 0
\end{aligned}$$

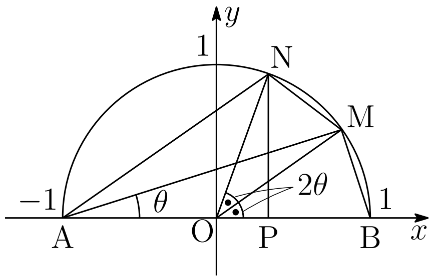
すなわち

$$E(1) < E(2) < E(3) > E(4) > E(5) > E(6)$$

したがって，得点の期待値を最大にするためには，最初に3以上の目が出たときに2回目を振らなければよい．

よって，**2回目を振るのは，最初の目が1または2のときである．**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\angle\mathrm{AMB} = 90^\circ$ であるから



$$\mathrm{MB} = \mathrm{AB}\sin\theta = \boldsymbol{2\sin\theta}$$

$\angle\mathrm{BOM} = 2\theta$ であるから

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\cos 2\theta},\ \boldsymbol{\sin 2\theta})$$

(2) $\angle\mathrm{BON} = 4\theta$ であるから　$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

したがって　　$\mathbf{PB} = \boldsymbol{1 - \cos 4\theta}$

(3) (1) の結果から　$\mathrm{MB} = 2t$

(2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= 1 - \cos 4\theta = 1 - (1 - 2\sin^2 2\theta)\\ &= 2\sin^2 2\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta)^2\\ &= 8\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 8t^2(1 - t^2)\end{aligned}$$

$\mathrm{MB} = \mathrm{PB}$ より

$$2t = 8t^2(1 - t^2) \quad \text{すなわち} \quad t(4t^3 - 4t + 1) = 0$$

ここで，$0^\circ < \angle\mathrm{BON} \leqq 180^\circ$ であるから　$0^\circ < \theta \leqq 45^\circ$

したがって　　$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める条件は　　$\boldsymbol{4t^3 - 4t + 1 = 0}$

(4) $f(t) = 4t^3 - 4t + 1 \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと　$f'(t) = 12\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	極小 $1 - \frac{8}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$1 - \sqrt{2}$

したがって，$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$f(t) = 0$ の解は 1 個存在し，その解を t_0 とすると

$$\sin\theta = t_0 \quad (0 < \theta \leqq 45^\circ)$$

を満たす θ はただ 1 つ存在する．すなわち，$\mathrm{MB} = \mathrm{PB}$ となるような M がただ一つ存在する．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2k = k(k+1) - (k-1)k$ より

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - (k-1)k\}$$
$$= n(n+1)$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$

(2) $3k^2 + 3k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ より

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

これに (1) の結果を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)(n+2)$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

(3) $4k^3 = k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ より

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\}$$
$$= n^2(n+1)^2$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$