平成21年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

1 $\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle$QMR を求めよ。

(2) $\angle$QMR の 2 倍と $\angle$QMB の大小を判定せよ。

2 座標平面に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 6)$，B$(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) $s = \dfrac{1}{2}$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(3) $s = 1$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

3 1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d，e，f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a + b = c$ となる確率を求めよ。

(2) $a + b = c + d$ となる確率を求めよ。

4 曲線 $y = x^2$ の点 P$(a,\ a^2)$ における接線と点 Q$(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a < 0 < b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

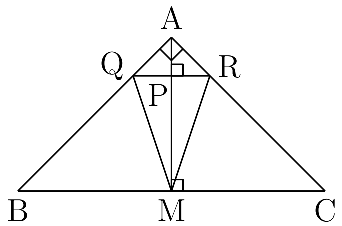
(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形 PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 求める三角比は，三角形の大きさに関係しないので，右の図において $\mathrm{AP}=1$ とすると



$$\mathrm{PM}=3,\ \mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=1,\ \mathrm{QR}=2,$$

$$\mathrm{MQ}=\mathrm{MR}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{QMR}=\frac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{10+10-4}{2\cdot 10}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2) $\mathrm{MB}=4$，$\mathrm{MQ}=\sqrt{10}$，$\mathrm{BQ}=3\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

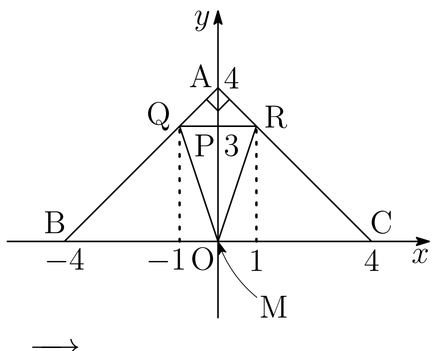
$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{10}}=\frac{16+10-18}{2\cdot 4\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

(1) の結果から　$\cos 2\angle\mathrm{QMR}=2\cos^2\angle\mathrm{QMR}-1=2\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$

ここで　$\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{7}{25}=\frac{5\sqrt{10}-14}{50}=\frac{\sqrt{250}-\sqrt{196}}{50}>0$

よって，$2\angle\mathrm{QMR}$，$\angle\mathrm{QMB}$ は鋭角であるから　$\boldsymbol{2\angle\mathrm{QMR}>\angle\mathrm{QMB}}$

別解 M は BC の中点であるから，M を原点にとる．このとき，求める三角比は，三角形の大きさに関係にしないので，右の図のように



$$\mathrm{A}(0,\ 4),\ \mathrm{B}(-4,\ 0),\ \mathrm{C}(4,\ 0),$$

$$\mathrm{P}(0,\ 3),\ \mathrm{Q}(-1,\ 3),\ \mathrm{R}(1,\ 3)$$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=(-1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(-4,\ 0)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{QMR}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}=\frac{-1\cdot 1+3\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MB}}|}=\frac{-1\cdot(-4)+3\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{4^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C は直線 AB 上にあるから，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4)\\ &= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4)-(2,\ 6) = (1, -2)$ であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1$$

したがって　　$\mathbf{C(4,\ 2)}$

与式および上の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2)\\ &= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)\end{aligned}$$

よって　　$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2\\ &= \boldsymbol{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}\end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{1}{2}$ を (1) の結果に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 - 10t + 10 = 25\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + 9 \quad (t \geqq 0)$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t = \dfrac{1}{5}$ で最小値 **9** をとる．

(3) $s = 1$ を (1) の結果に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 + 20t + 20 = 25\left(t + \frac{2}{5}\right)^2 + 16 \quad (t \geqq 0)$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t = 0$ で最小値 **20** をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a+b=c$ を満たす $a<b$ の組は，次の 6 通り

$$\begin{aligned}
&c=3 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 2)\\
&c=4 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 3)\\
&c=5 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)\\
&c=6 \text{ のとき} \quad (a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)
\end{aligned}$$

このとき，$a>b$ の場合も含めて $6\times 2!$ 通りある．また，d，e，f の並べ方が $3!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{6\times 2!\times 3!}{6!}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

(2) $a+b=c+d$ を満たす $a<b$，$c<d$ の組は，次の 14 通り

$$\begin{aligned}
&a+b=5 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4)\\
&a+b=6 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)\\
&a+b=7 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 6,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 1,\ 6),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1,\ 6,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 1,\ 6),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)\\
&a+b=8 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 6,\ 3,\ 5),\ (3,\ 5,\ 2,\ 6)\\
&a+b=9 \text{ のとき} \quad (a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 6,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3,\ 6)
\end{aligned}$$

このとき，$a>b$，$c>d$ の場合も含めて $14\times 2!\times 2!$ 通りある．また，e，f の並べ方が $2!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{14\times 2!\times 2!\times 2!}{6!}=\mathbf{\frac{7}{45}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$.

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a) \quad ゆえに \quad y = 2ax - a^2 \quad \cdots ①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は　$y = 2bx - b^2 \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\frac{a+b}{2},\ ab\right)}$

直線 PQ の方程式は

$$y - a^2 = \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) \quad すなわち \quad y = (a+b)x - ab$$

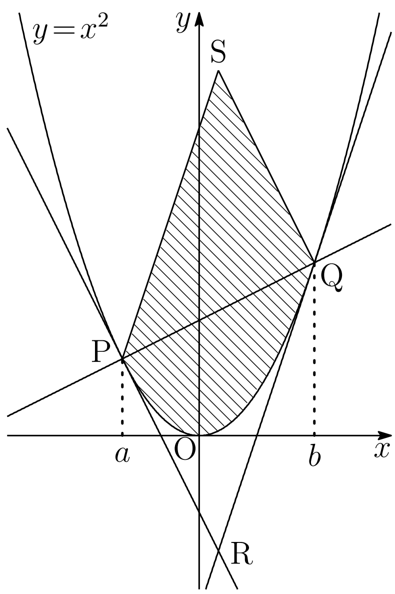
直線 PQ 上の x 座標が $\dfrac{a+b}{2}$ である点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$

このとき　$\mathrm{MR} = \dfrac{a^2+b^2}{2} - ab = \dfrac{1}{2}(b-a)^2$

よって　$\triangle\mathrm{PRQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{MR}\times(b-a) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}(b-a)^2\times(b-a) = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}(b-a)^3}$

(2) 直線 PQ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\}\,dx$$
$$= -\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(b-a)^3$$



$\triangle$PSQ の面積は $\triangle$PRQ の面積に等しいので，上式および (1) の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3 + \frac{1}{4}(b-a)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{12}(b-a)^3}$$

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a\times 2b=-1 \quad \text{ゆえに} \quad a=-\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると　$\dfrac{5}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3$

ここで，$b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$b+\frac{1}{4b}\geqq 2\sqrt{b\times\frac{1}{4b}}=1$$

よって，求める最小値は　$\dfrac{5}{12}\cdot 1^3=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$

補足

放物線と放物線の 2 本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と，その 2 つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は，$S_1:S_2=1:2$ である．また，2 本の接線の交点の x 座標は，2 つの接点の中点の x 座標と等しい．