平成 20 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

1 自然数 n に対して，$a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

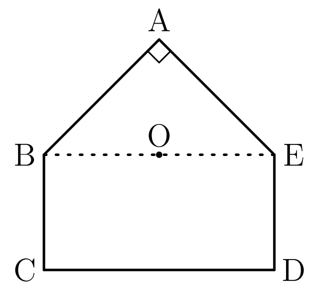
(3) $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。

2 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

3 図のような五角形 ABCDE(角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形) において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点を O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i = \mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 放物線 $C: y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ。

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。この操作を繰り返してできる数列を a_1，a_2，$\cdots$，$a_n \cdots$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n > 1$ を示せ。

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < {b_n}^2$ を示せ。

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を1つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してよい。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_1 = \cos 2 \cos 1$

2 倍角の公式により　$\sin 4 = 2 \sin 2 \cos 2 = 2 \cdot 2 \sin 1 \cos 1 \cdot \cos 2$

したがって　$\dfrac{\sin 4}{4 \sin 1} = \cos 2 \cos 1$

よって　$a_1 = \dfrac{\sin 4}{4 \sin 1}$

(2) a_n の定義式から　$a_{n+1} = a_n \cos 2^{n+1}$　$\cdots$①

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1} \sin 1} \cdots$(A) が成り立つことを数学的帰納法により証明する.

［1］ $n = 1$ のとき，(1) の結果より成り立つ.

［2］ $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1} \sin 1}$$

が成り立つと仮定すると，① から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1} \sin 1} \times \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{2 \sin 2^{k+1} \cos 2^{k+1}}{2^{k+2} \sin 1} = \frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2} \sin 1} \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

［1］,［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ.

(3) $\sin 2^{n+1} \leqq 1$

$\sin 1 > \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{\sin 1} < \sqrt{2}$

上の 2 式を (A) に適用すると

$$a_n = \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1} \sin 1} = \sin 2^{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{\sin 1} < 1 \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

よって　$a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$

2 (1) $y' = 2x$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における C の接線のベクトルは　$(1,\ 2p)$

ゆえに，P における C の法線の方程式は

$$1(x-p) + 2p(y-p^2) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{x + 2py - 2p^3 - p = 0}$

(2) (1) で求めた法線が点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$2pa - 2p^3 - p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p\left(p^2 - \frac{2a-1}{2}\right) = 0 \quad \cdots ①$$

① を p に関する 3 次方程式と考えると，この 3 次方程式の実数解の個数が求める法線の本数と一致する．したがって，次の 3 つに場合分けをする．

i) $\dfrac{2a-1}{2} < 0$ すなわち $a < \dfrac{1}{2}$ のとき

すべての実数 p に対して　$p^2 - \dfrac{2a-1}{2} > 0$

したがって，① の実数解は　$p = 0$ の 1 個

ii) $\dfrac{2a-1}{2} = 0$ すなわち $a = \dfrac{1}{2}$ のとき

方程式は　$p^3 = 0$

したがって，① の実数解は　$p = 0$ の 1 個

iii) $\dfrac{2a-1}{2} > 0$ すなわち $a > \dfrac{1}{2}$ のとき

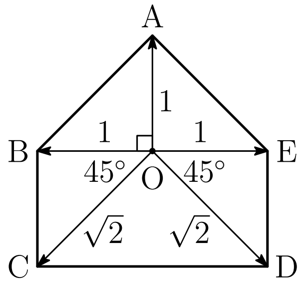
方程式は　$p\left(p + \sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)\left(p - \sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right) = 0$

したがって，① の実数解は　$p = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ の 3 個

i)，ii)，iii) より，法線の本数は

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{1}{2}} \text{ **のとき 1 本，** } \boldsymbol{a > \frac{1}{2}} \text{ **のとき 3 本**}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 45^\circ$$
$$= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{1}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = 1$ となる $(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ の組は，次の 7 組である．

$$(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2) = (\mathrm{A},\ \mathrm{A}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{C},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{D})$$

よって，求める確率は $\dfrac{7}{5^2} = \mathbf{\dfrac{7}{25}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ゆえに $q_i = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$

$q_i \neq 0$ となる P_i は，A，C，D の 3 組である．

したがって，$q_1q_2\cdots q_n \neq 0$ となる確率は $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

よって，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率は $\mathbf{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\boldsymbol{n}}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2-1)$ における接線の方程式は

$$y-({a_1}^2-1)=2a_1(x-a_1) \quad \text{すなわち} \quad y=2a_1x-{a_1}^2-1$$

この直線上に $(a_2,\ 0)$ があるから

$$0=2a_1a_2-{a_1}^2-1 \quad \text{ゆえに} \quad 2a_1a_2={a_1}^2+1 \quad \cdots ①$$

$a_1 \neq 0$ より　$\boldsymbol{a_2=\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}}$

(2) (1) と同様にして　$2a_na_{n+1}={a_n}^2+1 \quad \cdots ②$

上式において，$a_n>0$ のとき　$a_{n+1}>0$

$a_1>0$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n>0$

② から，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+1}{2a_n}$ が成り立つので

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n^2+1}{2a_n}-1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n} \quad \cdots ③$$

③ から $a_n>1$ のとき，$a_{n+1}>1$ が成り立つ.

$a_1>1$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n>1$

(3) ③ および (2) の結果から

$$a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}<\frac{(a_n-1)^2}{2}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-1)<\left\{\dfrac{1}{2}(a_n-1)\right\}^2$

よって，すべての自然数 n について　$b_{n+1}<{b_n}^2$

(4) (2) の結果から $b_n>0$ であるから，$c_n=\log_{10}b_n$ とおくと，$a_1=2$ より

$$c_1=\log_{10}b_1=\log_{10}\frac{1}{2}(a_1-1)=\log_{10}\frac{1}{2}(2-1)=-\log_{10}2$$

(3) の結果から　$c_{n+1}<2c_n$　ゆえに　$c_n<2^{n-1}c_1=-2^{n-1}\log_{10}2$

$b_n<10^{-12}$ のとき　$c_n<-12$ であるから

$$-2^{n-1}\log_{10}2<-12 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-1}>\frac{12}{\log_{10}2}$$

$\dfrac{12}{\log_{10}2}=39.8\cdots$，$2^5=32$，$2^6=64$ であるから，

求める n の値の一つは，$n-1=6$，すなわち　$\boldsymbol{n=7}$