平成19年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

1 $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 4x + 2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2) 不等式 $f(n) \leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(n) \leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

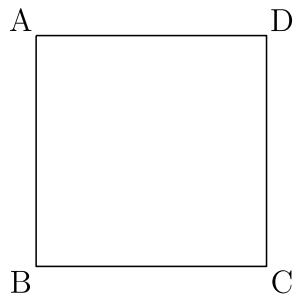
2 t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の4点 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ t)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t\right)$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であることを示せ。

(3) 四面体PABCの体積 $V(t)$ を求めよ。また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。

3 図のような一辺の長さが1の正方形ABCDがある。この正方形の辺上の点Qを，コインを投げて表が出れば反時計まわりに1，裏が出れば時計まわりに1動かす試行を考える。点Qが頂点Aから出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を2回繰り返すとき，各頂点A，B，C，Dに点Qがある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を3回および4回繰り返すとき，各頂点A，B，C，Dに点Qがある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 表の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を2回繰り返すとき，頂点A，B，C，Dのうち点Qが頂点Cにある確率が最大となることを示せ。同様に3回繰り返すとき，点Qが頂点Dにある確率が最大となることを示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=0$ より　$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$

これを解いて　　$x=\pm\sqrt{2},\ 2\pm\sqrt{2}$

よって，$f(x)=0$ の解を小さい順に並べると

$$\boldsymbol{-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}}$$

(2) $f(x)\leqq 0$ の解は，(1) の結果から

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq 2-\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\leqq x\leqq 2+\sqrt{2}$$

したがって，$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n は

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{n=-1,\ 0,\ 2,\ 3}$

(3) n が整数のとき，$f(n)$ は整数であるから，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n を，次の 2 つの場合に分けて求める．

i) $f(n)\leqq 0$ のとき，(2) の結果から　$n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$

ii) $f(n)=1$ のとき　$(n^2-2)(n^2-4n+2)=1$
n^2-2 は整数であるから，上式から　$n^2-2=\pm1$
$n^2-2=1$ を満たす整数 n は存在しないから

$$n^2-2=n^2-4n+2=-1\quad \text{これを解いて}\quad n=1$$

i)，ii) から，求める整数 n は　　$\boldsymbol{n=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3}$

補足 (高次不等式)

$\alpha<\beta<\gamma<\delta$ とすると

1 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)<0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x<\gamma$

2 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ の解は　$\alpha<x<\beta,\ \gamma<x$

3 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta,\ \gamma<x<\delta$

4 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)>0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x<\gamma,\ \delta<x$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-t)^2+(t-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$$
$$\mathrm{BC}=\sqrt{(0-1)^2+(1-t)^2+(t-0)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$$
$$\mathrm{CA}=\sqrt{(t-0)^2+(0-1)^2+(1-t)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$．よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形

したがって　$S(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{BC}\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{t+1+0}{3},\ \frac{0+t+1}{3},\ \frac{1+0+t}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)\\&=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-t,\ t,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-t,\ 1,\ t-1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1){\cdot}(1-t,\ t,\ -1)=\frac{3-t}{9}(1-t+t-1)=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1){\cdot}(-t,\ 1,\ t-1)=\frac{3-t}{9}(-t+1+t-1)=0$$

$t\neq 3$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\neq\vec{0}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $0\leqq t\leqq 1$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$ であるから，(2) の結果から

$$\begin{aligned}V(t)&=\frac{1}{3}S(t)|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|\\&=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\times\frac{\sqrt{3}}{9}(3-t)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{18}(-t^3+4t^2-4t+3)}\end{aligned}$$

$V(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}V'(t)&=\frac{1}{18}(-3t^2+8t-4)\\&=-\frac{1}{18}(t-2)(3t-2)\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	極小 $\frac{49}{486}$	$\nearrow$	

増減表から，$V(t)$ は，$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{486}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 試行を n 回繰り返したとき，点 Q が，頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ，$P_n(\mathrm{A})$，$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ とすると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = P_1(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) = P_{n+1}(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_n(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{B}) = P_{n+1}(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_n(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) = P_2(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_1(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_2(\mathrm{B}) = P_2(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_1(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{C}) = \mathbf{0} \\ P_3(\mathrm{A}) = P_3(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_2(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{D}) = \mathbf{0} \\ P_3(\mathrm{B}) = P_3(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_2(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{C}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_4(\mathrm{A}) = P_4(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_3(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_4(\mathrm{B}) = P_4(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_3(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{C}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(2) 試行を n 回繰り返したときの確率を (1) と同様に定めると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = p,\ P_1(\mathrm{D}) = 1 - p$$

また，次式が成り立つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) &= (1-p)P_n(\mathrm{B}) + pP_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{B}) &= pP_n(\mathrm{A}) + (1-p)P_n(\mathrm{C}) \\ P_{n+1}(\mathrm{C}) &= pP_n(\mathrm{B}) + (1-p)P_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{D}) &= (1-p)P_n(\mathrm{A}) + pP_n(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) &= (1-p)P_1(\mathrm{B}) + pP_1(\mathrm{D}) = -2p^2 + 2p \\ P_2(\mathrm{B}) &= pP_1(\mathrm{A}) + (1-p)P_1(\mathrm{C}) = 0 \\ P_2(\mathrm{C}) &= pP_1(\mathrm{B}) + (1-p)P_1(\mathrm{D}) = 2p^2 - 2p + 1 \\ P_2(\mathrm{D}) &= (1-p)P_1(\mathrm{A}) + pP_1(\mathrm{C}) = 0 \end{aligned}$$

$p > \frac{1}{2}$ であるから　$P_2(\mathrm{C}) - P_2(\mathrm{A}) = (2p-1)^2 > 0$

よって，試行を 2 回繰り返すとき，点 Q が頂点 C にある確率が最大となる.

さらに

$$\begin{aligned}
P_3(\mathrm{A}) &= (1-p)P_2(\mathrm{B}) + pP_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{B}) &= pP_2(\mathrm{A}) + (1-p)P_2(\mathrm{C}) \\
&= p(-2p^2+2p) + (1-p)(2p^2-2p+1) \\
&= -4p^3+6p^2-3p+1 \\
P_3(\mathrm{C}) &= pP_2(\mathrm{B}) + (1-p)P_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{D}) &= (1-p)P_2(\mathrm{A}) + pP_2(\mathrm{C}) \\
&= (1-p)(-2p^2+2p) + p(2p^2-2p+1) \\
&= 4p^3-6p^2+3p
\end{aligned}$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_3(\mathrm{D}) - P_3(\mathrm{B}) = (2p-1)^3 > 0$

よって，試行を 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 辺の長さは正であるから　$x^2-2x>0$　かつ　$4-x>0$

これを解いて　　$x<0,\ 2<x<4$　$\cdots$①

題意より　$\sqrt{x^2-2x} \geqq 4-x$，　$\sqrt{x^2-2x} \geqq 2$

第1式から　　$x^2-2x \geqq 16-8x+x^2$　ゆえに　$x \geqq \dfrac{8}{3}$　$\cdots$②

第2式から　　$x^2-2x \geqq 4$　ゆえに　$x \leqq 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} \leqq x$　$\cdots$③

3辺の長さによる三角形の存在条件から　$\sqrt{x^2-2x}<(4-x)+2$

したがって　$\sqrt{x^2-2x}<6-x$　ゆえに　$x^2-2x<36-12x+x^2$

これを解いて　　$x<\dfrac{18}{5}$　$\cdots$④

①，②，③，④の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}}$

(2) $2-(4-x)=x-2$

(1) の結果から　　$\sqrt{5}-2 \leqq x-2 < \dfrac{8}{5}$

また，$\sqrt{5}-2>0$ であるから　$x-2>0$　ゆえに　$2-(4-x)>0$

すなわち　$2>4-x$　よって，最短の辺の長さは　$4-x$

余弦定理により　$\cos\theta = \dfrac{(x^2-2x)+2^2-(4-x)^2}{2\cdot 2\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$

このとき，$x-2>0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

(3) (2) の結果から　$\cos\theta = \dfrac{3}{2}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$

上式と (1) の結果から，$\cos\theta$ は $\boldsymbol{x=1+\sqrt{5}}$ のとき最小となり，最小値は

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})-2}{1+\sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = \boldsymbol{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}}$$