

平成19年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部(経済・経営))

問題 1 2 3 4

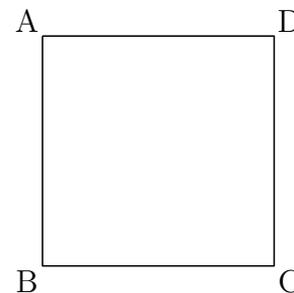
1 $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 4x + 2)$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解 x をすべて求め, 小さい順に並べよ。
- (2) 不等式 $f(n) \leq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $f(n) \leq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

2 t を $0 \leq t \leq 1$ を満たす数とし, 空間内の4点 $A(t, 0, 1)$, $B(1, t, 0)$, $C(0, 1, t)$, $P\left(\frac{4}{9}t, \frac{4}{9}t, \frac{4}{9}t\right)$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示し, その面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の重心を G とする。 \overrightarrow{PG} は \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} の両方に垂直であることを示せ。
- (3) 四面体 $PABC$ の体積 $V(t)$ を求めよ。また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。

3 図のような一辺の長さが1の正方形 $ABCD$ がある。この正方形の边上の点 Q を, コインを投げて表が出れば反時計まわりに1, 裏が出れば時計まわりに1動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき, 次の問いに答えよ。



- (1) 表の出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを投げて, 上記の試行を2回繰り返すとき, 各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を3回および4回繰り返すとき, 各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 表の出る確率 p が $\frac{1}{2}$ より大きいコインを投げて, 上記の試行を2回繰り返すとき, 頂点 A, B, C, D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に3回繰り返すとき, 点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。

4 3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2 - 2x}$, $4 - x$, 2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2 - 2x}$ の辺は他の 2 辺より短くないとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。
- (2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき、 $\cos \theta$ を x を用いて表せ。
- (3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos \theta$ の最小値と、その最小値を与える x の値を求めよ。

解答例

- 1** (1) $f(x) = 0$ より $(x^2 - 2)(x^2 - 4x + 2) = 0$
 これを解いて $x = \pm\sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{2}$
 よって, $f(x) = 0$ の解を小さい順に並べると

$$-\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$$

- (2) $f(x) \leq 0$ の解は, (1) の結果から

$$-\sqrt{2} \leq x \leq 2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$$

したがって, $f(n) \leq 0$ を満たす整数 n は

$$-\sqrt{2} \leq n \leq 2 - \sqrt{2}, \sqrt{2} \leq n \leq 2 + \sqrt{2}$$

よって $n = -1, 0, 2, 3$

- (3) n が整数のとき, $f(n)$ は整数であるから, $f(n) \leq 1$ を満たす整数 n を, 次の2つの場合に分けて求める.

i) $f(n) \leq 0$ のとき, (2) の結果から $n = -1, 0, 2, 3$

ii) $f(n) = 1$ のとき $(n^2 - 2)(n^2 - 4n + 2) = 1$
 $n^2 - 2$ は整数であるから, 上式から $n^2 - 2 = \pm 1$
 $n^2 - 2 = 1$ を満たす整数 n は存在しないから

$$n^2 - 2 = n^2 - 4n + 2 = -1 \quad \text{これを解いて} \quad n = 1$$

i), ii) から, 求める整数 n は $n = -1, 0, 1, 2, 3$

補足 (高次不等式)

$\alpha < \beta < \gamma < \delta$ とすると

1 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) < 0$ の解は $x < \alpha, \beta < x < \gamma$

2 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) > 0$ の解は $\alpha < x < \beta, \gamma < x$

3 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) < 0$ の解は $\alpha < x < \beta, \gamma < x < \delta$

4 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) > 0$ の解は $x < \alpha, \beta < x < \gamma, \delta < x$ ■

$$\begin{aligned} \text{② (1)} \quad AB &= \sqrt{(1-t)^2 + (t-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2} \\ BC &= \sqrt{(0-1)^2 + (1-t)^2 + (t-0)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2} \\ CA &= \sqrt{(t-0)^2 + (0-1)^2 + (1-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2} \end{aligned}$$

ゆえに $AB = BC = CA$. よって, $\triangle ABC$ は正三角形

$$\text{したがって } S(t) = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - t + 1)$$

(2) $\triangle ABC$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{t+1+0}{3}, \frac{0+t+1}{3}, \frac{1+0+t}{3} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{t+1}{3}, \frac{t+1}{3}, \frac{t+1}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \vec{PG} &= \vec{OG} - \vec{OP} \\ &= \left(\frac{t+1}{3}, \frac{t+1}{3}, \frac{t+1}{3} \right) - \left(\frac{4}{9}t, \frac{4}{9}t, \frac{4}{9}t \right) \\ &= \frac{3-t}{9}(1, 1, 1) \end{aligned}$$

$\vec{AB} = (1-t, t, -1)$, $\vec{AC} = (-t, 1, t-1)$ であるから

$$\vec{PG} \cdot \vec{AB} = \frac{3-t}{9}(1, 1, 1) \cdot (1-t, t, -1) = \frac{3-t}{9}(1-t+t-1) = 0$$

$$\vec{PG} \cdot \vec{AC} = \frac{3-t}{9}(1, 1, 1) \cdot (-t, 1, t-1) = \frac{3-t}{9}(-t+1+t-1) = 0$$

$t \neq 3$ であるから, $\vec{PG} \neq \vec{0}$ より $\vec{PG} \perp \vec{AB}$, $\vec{PG} \perp \vec{AC}$

(3) $0 \leq t \leq 1$ より, $|\vec{PG}| = \frac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$ であるから, (2) の結果から

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{3}S(t)|\vec{PG}| \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - t + 1) \times \frac{\sqrt{3}}{9}(3-t) \\ &= \frac{1}{18}(-t^3 + 4t^2 - 4t + 3) \end{aligned}$$

$V(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{1}{18}(-3t^2 + 8t - 4) \\ &= -\frac{1}{18}(t-2)(3t-2) \end{aligned}$$

t	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
$V'(t)$		-	0	+	
$V(t)$		\searrow	極小 $\frac{49}{486}$	\nearrow	

増減表から, $V(t)$ は, $t = \frac{2}{3}$ で最小値 $\frac{49}{486}$ をとる. ■

- 3** (1) 試行を n 回繰り返したとき、点 Q が、頂点 A, B, C, D にある確率をそれぞれ、 $P_n(A), P_n(B), P_n(C), P_n(D)$ とすると

$$P_1(A) = P_1(C) = 0, P_1(B) = P_1(D) = \frac{1}{2}$$

また、次式が成り立つ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

$$P_{n+1}(A) = P_{n+1}(C) = \frac{1}{2}P_n(B) + \frac{1}{2}P_n(D)$$

$$P_{n+1}(B) = P_{n+1}(D) = \frac{1}{2}P_n(A) + \frac{1}{2}P_n(C)$$

したがって $P_2(A) = P_2(C) = \frac{1}{2}P_1(B) + \frac{1}{2}P_1(D) = \frac{1}{2}$

$$P_2(B) = P_2(D) = \frac{1}{2}P_1(A) + \frac{1}{2}P_1(C) = 0$$

$$P_3(A) = P_3(C) = \frac{1}{2}P_2(B) + \frac{1}{2}P_2(D) = 0$$

$$P_3(B) = P_3(D) = \frac{1}{2}P_2(A) + \frac{1}{2}P_2(C) = \frac{1}{2}$$

$$P_4(A) = P_4(C) = \frac{1}{2}P_3(B) + \frac{1}{2}P_3(D) = \frac{1}{2}$$

$$P_4(B) = P_4(D) = \frac{1}{2}P_3(A) + \frac{1}{2}P_3(C) = 0$$

- (2) 試行を n 回繰り返したときの確率を (1) と同様に定めると

$$P_1(A) = P_1(C) = 0, P_1(B) = p, P_1(D) = 1 - p$$

また、次式が成り立つ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

$$P_{n+1}(A) = (1 - p)P_n(B) + pP_n(D)$$

$$P_{n+1}(B) = pP_n(A) + (1 - p)P_n(C)$$

$$P_{n+1}(C) = pP_n(B) + (1 - p)P_n(D)$$

$$P_{n+1}(D) = (1 - p)P_n(A) + pP_n(C)$$

したがって $P_2(A) = (1 - p)P_1(B) + pP_1(D) = -2p^2 + 2p$

$$P_2(B) = pP_1(A) + (1 - p)P_1(C) = 0$$

$$P_2(C) = pP_1(B) + (1 - p)P_1(D) = 2p^2 - 2p + 1$$

$$P_2(D) = (1 - p)P_1(A) + pP_1(C) = 0$$

$p > \frac{1}{2}$ であるから $P_2(C) - P_2(A) = (2p - 1)^2 > 0$

よって、試行を 2 回繰り返すとき、点 Q が頂点 C にある確率が最大となる。

さらに

$$\begin{aligned} P_3(A) &= (1-p)P_2(B) + pP_2(D) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(B) &= pP_2(A) + (1-p)P_2(C) \\ &= p(-2p^2 + 2p) + (1-p)(2p^2 - 2p + 1) \\ &= -4p^3 + 6p^2 - 3p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(C) &= pP_2(B) + (1-p)P_2(D) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(D) &= (1-p)P_2(A) + pP_2(C) \\ &= (1-p)(-2p^2 + 2p) + p(2p^2 - 2p + 1) \\ &= 4p^3 - 6p^2 + 3p \end{aligned}$$

$$p > \frac{1}{2} \text{ であるから } P_3(D) - P_3(B) = (2p-1)^3 > 0$$

よって、試行を3回繰り返すとき、点Qが頂点Dにある確率が最大となる。



4 (1) 辺の長さは正であるから $x^2 - 2x > 0$ かつ $4 - x > 0$

これを解いて $x < 0, 2 < x < 4 \dots \textcircled{1}$

題意より $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 4 - x, \sqrt{x^2 - 2x} \geq 2$

第1式から $x^2 - 2x \geq 16 - 8x + x^2$ ゆえに $x \geq \frac{8}{3} \dots \textcircled{2}$

第2式から $x^2 - 2x \geq 4$ ゆえに $x \leq 1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} \leq x \dots \textcircled{3}$

3辺の長さによる三角形の存在条件から $\sqrt{x^2 - 2x} < (4 - x) + 2$

したがって $\sqrt{x^2 - 2x} < 6 - x$ ゆえに $x^2 - 2x < 36 - 12x + x^2$

これを解いて $x < \frac{18}{5} \dots \textcircled{4}$

①, ②, ③, ④の共通範囲を求めて $1 + \sqrt{5} \leq x < \frac{18}{5}$

(2) $2 - (4 - x) = x - 2$

(1)の結果から $\sqrt{5} - 2 \leq x - 2 < \frac{8}{5}$

また, $\sqrt{5} - 2 > 0$ であるから $x - 2 > 0$ ゆえに $2 - (4 - x) > 0$

すなわち $2 > 4 - x$ よって, 最短の辺の長さは $4 - x$

余弦定理により $\cos \theta = \frac{(x^2 - 2x) + 2^2 - (4 - x)^2}{2 \cdot 2 \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{3(x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x}}$

このとき, $x - 2 > 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{3(x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{(x - 2)^2}{x(x - 2)}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x - 2}{x}}$$

(3) (2)の結果から $\cos \theta = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$

上式と(1)の結果から, $\cos \theta$ は $x = 1 + \sqrt{5}$ のとき最小となり, 最小値は

$$\frac{3}{2} \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5}) - 2}{1 + \sqrt{5}}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}} = \frac{3(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

