平成 18 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題) 120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

1 曲線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする。ただし，$t > 0$ とする。接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ R_1，R_2 とする。また，$\triangle\mathrm{PQR}_1$ の面積を S_1 とし，曲線 C と y 軸および線分 PR_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 Q と点 R_1 の x 座標を t を用いて表せ。

(2) 面積 S_2 を t を用いて表せ。

(3) $S_1 > S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ。

2 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n$$
$$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$$

をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

3 空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について次の問いに答えよ。ただし，h と k は実数とする。

(1) $h\vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき，すべての実数 x に対して

$$|\,x\vec{a} + \vec{b}\,| \geqq |\,h\vec{a} + \vec{b}\,|$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2) $h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x，y に対して

$$|\,x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}\,| \geqq |\,h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}\,|$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 4, -2)$，$\vec{c} = (-3, -6,\ 6)$ とするとき，$|\,x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}\,|$ の最小値を与える実数 x，y と，そのときの最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$ について次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

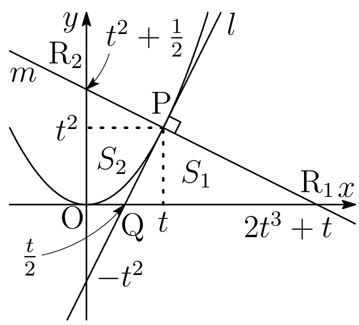
(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 実数 k に対し，$f(x) = k$ をみたす x の個数を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$



$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

ゆえに　$y=2tx-t^2$

Q の x 座標は，これに $y=0$ を代入して

$$\boldsymbol{x=\frac{t}{2}}$$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，l に垂直な直線 m の方程式は

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

R_1 の x 座標は，これに $y=0$ を代入して　$\boldsymbol{x=2t^3+t}$

(2) S_2 は，$0\leqq x\leqq t$ において，m と C で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+t^2\right\}\times t-\int_0^t x^2\,dx\\&=t^3+\frac{t}{4}-\frac{t^3}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t}\end{aligned}$$

(3) $S_1=\dfrac{1}{2}\left\{(2t^3+t)-\dfrac{t}{2}\right\}\times t^2=t^5+\dfrac{1}{4}t^3$

これと (2) の結果から

$$\begin{aligned}S_1-S_2&=\left(t^5+\frac{1}{4}t^3\right)-\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t\right)\\&=\frac{t}{12}(12t^4-5t^2-3)\\&=\frac{t}{12}(3t^2+1)(4t^2-3)\\&=\frac{t}{12}(3t^2+1)(2t+\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$t>0$ であるから，$S_1>S_2$ が成り立つとき

$$\frac{t}{12}(3t^2+1)(2t+\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})>0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{t>\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) 数学的帰納法により示す.

「a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない」を (A) とする.

［1］ $n=3$ のとき

$$a_2 = 2{\cdot}1{\cdot}1 = 2, \qquad b_2 = 2{\cdot}1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12, \qquad b_3 = 2{\cdot}2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n=3$ のとき，(A) は成り立つ.

［2］ $n=k$ のとき ($k \geqq 3$)，(A) が成り立つと仮定すると，
$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから (M，N は整数)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_kb_k = 2{\cdot}3M{\cdot}(3N \pm 1) \\ &= 3{\cdot}2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + 1) \\ &= 3(6M^2 + 3N^2 \pm 2N) + 1 \end{aligned}$$

［1］，［2］から，$n \geqq 3$ について (A) が成り立つ.

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は奇数．以下を背理法により示す.

$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，
a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する ($p \geqq 3$).

$a_{m+1} = 2a_mb_m$ より，次の 2 つに場合分けをする.

［1］ a_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - 2{a_m}^2 = {b_m}^2$ であるから，
b_m も p で割り切れる.

［2］ b_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - {b_m}^2 = 2{a_m}^2$ であるから，
a_m も p で割り切れる.

［1］，［2］より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する.

よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $h\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるから，$\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})=0$ より

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |(x-h)\vec{a}+(h\vec{a}+\vec{b})|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+2(x-h)\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &\geqq |h\vec{a}+\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって　　$|x\vec{a}+\vec{b}| \geqq |h\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるから，$\vec{d}=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ より，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}+\vec{d}|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &= |x-h|^2|\vec{a}|^2-2|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|+|y-k|^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2\\ &\qquad +2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\ &= (|x-h||\vec{a}|-|y-k||\vec{b}|)^2+|\vec{d}|^2\\ &\qquad +2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\ &\geqq |\vec{d}|^2\end{aligned}$$

よって　　$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}| \geqq |h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$

(3)
$$\begin{aligned}\vec{d} &= h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}\\ &= h(1,\ 1,\ 1)+k(1,\ 4,-2)+(-3,-6,\ 6)\\ &= (h+k-3,\ h+4k-6,\ h-2k+6)\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ であるから

$$\begin{cases} h+k-1=0\\ h+7k-13=0\end{cases}\qquad \text{これを解いて}\quad h=-1,\ k=2$$

(2) の結果から，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は，$x=h$，$y=k$ すなわち $\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=2}$ のとき最小となり，最小値は　$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=|(-2,\ 1,\ 1)|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

補足 (1) の $x\vec{a}+\vec{b}$ は点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{a}$ の直線である．$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は原点からこの直線までの距離である．

(2) の $x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}$ は点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を通り，接ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$ の平面である．$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は原点からこの平面までの距離である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=0$ より，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}=0$ であるから

$$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \sin x=0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　　$\boldsymbol{x=-\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

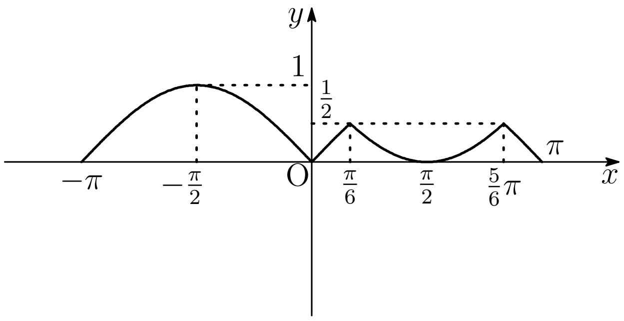
(2)　i) $\sin x-\dfrac{1}{2}\geqq 0$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x-1|=1-\sin x$$

ii) $\sin x-\dfrac{1}{2}\leqq 0$　すなわち　$-\pi\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq \pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x|$$

i), ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3) $f(x)=k$ を満たす x の個数は，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数であるから，(2) のグラフより

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<0,\ 1<k} \text{ のとき} & \mathbf{0}\text{ 個} \\ \boldsymbol{k=1} \text{ のとき} & \mathbf{1}\text{ 個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}<k<1} \text{ のとき} & \mathbf{2}\text{ 個} \\ \boldsymbol{k=0,\ \frac{1}{2}} \text{ のとき} & \mathbf{4}\text{ 個} \\ \boldsymbol{0<k<\frac{1}{2}} \text{ のとき} & \mathbf{6}\text{ 個} \end{cases}$$