平成17年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

1 aを正の実数とし，点A$\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$と曲線$C : y = ax^2\ (x \geqq 0)$を考える。曲線$C$上の点で，点Aとの距離が最小となるものをPとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点Pの座標と線分APの長さを求めよ。

(2) 曲線Cとy軸，および線分APで囲まれる図形の面積$S(a)$を求めよ。

(3) $a > 0$のとき，面積$S(a)$の最小値を求めよ。また，そのときのaの値を求めよ。

2 tを実数とするとき，2次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この2次方程式が異なる2つの虚数解をもつようなtの範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを$z(t)$で表す。tが(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点$z(t)$が描く図形Cを求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点zが(2)の図形C上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点wが動く図形を求め，図示せよ。

3 実数xに対して，$[x]$はxを超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$，$[2] = 2$である。このとき，$0^\circ < \theta < 180^\circ$として次の問いに答えよ。ただし，必要なら$\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$となる角$\alpha\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$を用いてよい。

(1) 不等式$\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 1$を満たす$\theta$の範囲を求めよ。

(2) 不等式$\left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right] \geqq 1$を満たす$\theta$の範囲を求めよ。

(3) 不等式$\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 0 \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2 \sin\theta\right]$を満たす$\theta$の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1つのさいころを4回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $x_1 < x_2$ となる確率を求めよ。

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ。

(3) $x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4) $x_k \geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k = 4$ と定める。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C 上の点を $\mathrm{X}(t,\ at^2)$ とすると $(t \geqq 0)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AX}^2 &= t^2 + \left\{at^2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right)\right\}^2 \\ &= a^2t^4 - 2a^2t^2 + \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\ &= a^2(t^2-1)^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}\end{aligned}$$

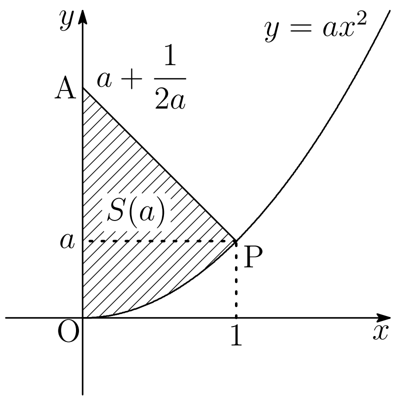
AX^2 は，$t^2 = 1$　すなわち　$t = 1$ のとき，AX^2 は最小値 $1 + \dfrac{1}{4a^2}$ をとる.

よって　　$\mathbf{P(1,\ \boldsymbol{a})}$，$\mathbf{AP} = \boldsymbol{\sqrt{1 + \dfrac{1}{4a^2}}}$

(2) $S(a) = \dfrac{1}{2}\left\{a + \left(a + \dfrac{1}{2a}\right)\right\} \times 1 - \displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx$

$= a + \dfrac{1}{4a} - \dfrac{a}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2a}{3} + \dfrac{1}{4a}}$



(3) $a > 0$ より，$\dfrac{2a}{3} > 0$，$\dfrac{1}{4a} > 0$ であるから，
相加平均および相乗平均の関係により

$$\frac{2a}{3} + \frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{4a}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{2a}{3} = \dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のときに限る.

よって，$S(a)$ は，$\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$ ① が異なる2つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は $\boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により $z+\overline{z}=-t$，$z\overline{z}=t$

上の2式から t を消去すると

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

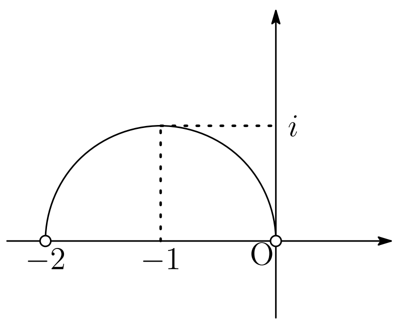
$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって $|z+1|^2=1$

よって $|z+1|=1$

ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径1の円周上で，虚部が正である点である．

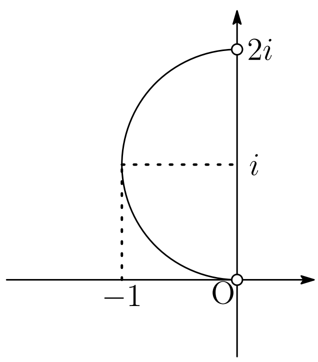
よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．



(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$\begin{aligned} w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\ &=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\ &=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\ &=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta) \qquad (90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ) \end{aligned}$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 3$　すなわち　$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0° < \theta < 180°$ より　$\boldsymbol{60° < \theta < 180°}$

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2 \sin\theta\right] \geqq 1$ より

$\dfrac{3}{2}+\log_2 \sin\theta \geqq 1$　ゆえに　$\log_2 \sin\theta \geqq \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0° < \theta < 180°$ より　$\boldsymbol{45° \leqq \theta \leqq 135°}$

(3) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 0$ であるから　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 1$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 2$　すなわち　$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$

$0° < \theta < 180°$ より　$120° < \theta < 180°$　$\cdots$①

次に，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2 \sin\theta\right] \geqq 0$ であるから

$\dfrac{3}{2}+\log_2 \sin\theta \geqq 0$　ゆえに　$\log_2 \sin\theta \geqq \log_2 \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$0° < \theta < 180°$ より　$\alpha \leqq \theta \leqq 180° - \alpha$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{120° < \theta \leqq 180° - \alpha}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ さいころを4回投げるとき，目の出方の総数は　6^4 (通り)

(1) $x_1 < x_2$ の目の出方の総数は　${}_6\mathrm{C}_2$ (通り)

x_3，x_4 の目の出方の総数は　　6^2 (通り)

よって，求める確率は　　$P(x_1 < x_2) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \times 6^2}{6^4} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ の目の出方の総数は　${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)

x_4 の目の出方の総数は　　　　　　　6 (通り)

よって，求める確率は　　$P(x_1 < x_2 < x_3) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 6}{6^4} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} P(x_1 < x_2 \geqq x_3) &= P(x_1 < x_2) - P(x_1 < x_2 < x_3) \\ &= \frac{5}{12} - \frac{5}{54} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{108}} \end{aligned}$$

(4) $P(k=1) = P(x_1 \geqq x_2) = 1 - P(x_1 < x_2) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

$P(k=2) = P(x_1 < x_2 \geqq x_3) = \dfrac{35}{108}$

$P(k=4) = P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{6^4} = \dfrac{5}{432}$

$$\begin{aligned} P(k=3) &= P(x_1 < x_2 < x_3) - P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) \\ &= \frac{5}{54} - \frac{5}{432} = \frac{35}{432} \end{aligned}$$

よって，求める期待値は

$$1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{35}{108} + 3 \times \frac{35}{432} + 4 \times \frac{5}{432} = \frac{\mathbf{73}}{\mathbf{48}}$$