平成16年度　九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

1 2つの関数

$$f(x) = -px^2 + 2 \quad (p > 0)$$
$$g(x) = |\,x\,| - 2$$

が与えられていて，放物線 $y = f(x)$ が2点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする。

(1) p の値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。このとき，点Aにおける $y = f(x)$ の接線 $y = h(x)$ を求めよ。また，この接線 $y = h(x)$ と $y = g(x)$ の，点Aとは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ。

(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a \leqq x \leqq b, \quad y \leqq h(x), \quad y \geqq f(x), \quad y \geqq g(x)$$

2 複素数平面上に複素数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ をとり，$\alpha = z + 1$，$\beta = z - 1$ とおく。

(1) $|\,\beta\,| = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ を示せ。

(2) $\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$ を示せ。ただし，$0^\circ \leqq \arg\beta < 360^\circ$ とする。

(3) $\theta = 60^\circ$ とする。9つの複素数 $\alpha^m\beta^n$ $(m,\ n = 1, 2, 3)$ の虚部の最小値を求め，その最小値を与える $(m,\ n)$ のすべてを決定せよ。

3 $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする。平行四辺形ABCDの辺BCを $\alpha : 1 - \alpha$ に内分する点をPとし，辺CDを $1 - \beta : \beta$ に内分する点をQとする。また，線分QPと平行四辺形の対角線ACの交点をRとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ として次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(3) $\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AD} = 1$，$\angle\mathrm{DAB} = 60^\circ$ とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に6個並んでいる。これらの6個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青青青青青，赤赤青青青青，$\cdots$ のように左端が赤色で色の変化がちょうど1回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも2回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど n 回 $(0 \leqq n \leqq 5)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 放物線 $y=-px^2+2$ は，2点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るから

$$-p\cdot 18+2=0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{p=\frac{1}{9}}$$

(2) $y=-\dfrac{1}{9}x^2+2$ と $y=|\,x\,|-2$ から y を消去すると

$$-\frac{1}{9}x^2+2=|\,x\,|-2 \quad ゆえに \quad |\,x\,|^2+9|\,x\,|-36=0$$

したがって　$(|\,x\,|+12)(|\,x\,|-3)=0$　すなわち　$x=\pm 3$

よって，求める交点の座標は　**(3, 1)，(−3, 1)**

(3) (2) の結果より，点 A の座標は　$(-3,\ 1)$

$f(x)=-\dfrac{1}{9}x^2+2$ を微分すると　$f'(x)=-\dfrac{2}{9}x$

$y=f(x)$ の A における接線の傾きは　$f'(-3)=-\dfrac{2}{9}\cdot(-3)=\dfrac{2}{3}$

よって，$y=f(x)$ の A における接線の方程式 $y=h(x)$ は

$$y-1=\frac{2}{3}(x+3) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+3}$$

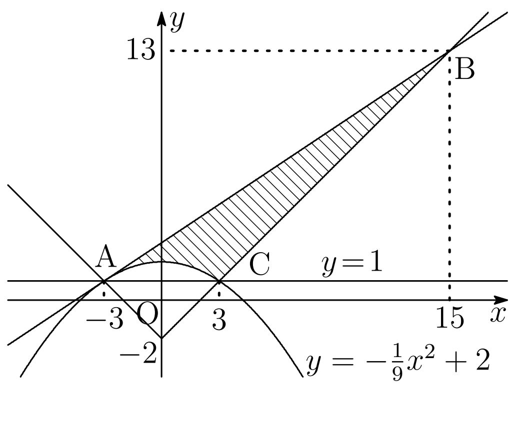
$y=h(x)$，$y=g(x)$ の共有点の座標は

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x+3 \\ y=|\,x\,|-2 \end{cases} \quad これを解いて \quad (x,\ y)=(-3,\ 1),\ (15,\ 13)$$

B は A と異なる点であるから　**B(15, 13)**

(4) (2) で求めた2交点で，A と異なる点を C とし，直線 AC と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^{3}\left\{\left(-\frac{1}{9}x^2+2\right)-1\right\}dx \\ &= -\frac{1}{9}\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)\,dx \\ &= 4 \end{aligned}$$



求める面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-S_1=\frac{1}{2}\{3-(-3)\}(13-1)-4=\mathbf{32}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\beta = z-1 = \cos\theta - 1 + i\sin\theta$ より

$$|\,\beta\,| = \sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$$
$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから　　$|\,\beta\,| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) $\beta = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+90^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+90^\circ\right)\right\}$$

(1) の結果より $2\sin\dfrac{\theta}{2} = |\beta|$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$90^\circ < \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ < 180^\circ$ であるから　$\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$

(3) $\alpha = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

上式および (1) の結果から，$\theta = 60^\circ$ のとき

$$\alpha = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ), \quad \beta = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

ゆえに　$|\alpha^m\beta^n| = (\sqrt{3})^m$，$\arg(\alpha^m\beta^n) = 30^\circ\times m + 120^\circ\times n$

$\alpha^m\beta^n$ の虚部を I とすると　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 120^\circ\times n)$

$n=1$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 120^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n=2$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 240^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$n=3$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m\sin(30^\circ\times m + 360^\circ)$　　$(m = 1, 2, 3)$

$I < 0$ となるのは，次の 4 通りで，そのときの I の値は

$(m,\ n) = (1,\ 2)$ のとき　$I = -\sqrt{3}$,

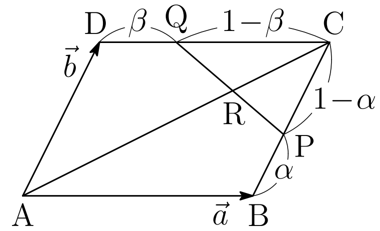
$(m,\ n) = (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$ のとき　$I = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(m,\ n) = (2, 2)}$，$\boldsymbol{(3, 1)}$，$\boldsymbol{(3, 2)}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$
$$=\boldsymbol{\vec{a}+\alpha\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$$
$$=\boldsymbol{\vec{b}+\beta\vec{a}}$$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-\alpha\beta)\vec{a},\quad -\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-\alpha\beta)\vec{b}$$

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ より，$1-\alpha\beta\neq 0$ であるから

$$\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta},\quad \vec{b}=\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}+\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$
$$=\frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$
$$=\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\times\frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$$

ゆえに $\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha},\quad \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}}$

(3)

$$\triangle\mathrm{AQR}=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}\times\triangle\mathrm{AQC}$$
$$=\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}\times\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{DC}}\times\triangle\mathrm{ADC}$$
$$=\frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}\times(1-\beta)\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120^\circ$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2(2-\alpha-\beta)}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 起こりうる場合の総数は　2^6 (通り)

(1) 左端が赤色で，色の変化がちょうど 1 回起きる場合は，次の 5 通り．

「赤青青青青青」,「赤赤青青青青」,「赤赤赤青青青」,
「赤赤赤赤青青」,「赤赤赤赤赤青」

よって，求める確率は　$\dfrac{5}{2^6} = \mathbf{\dfrac{5}{64}}$

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合は，次の 2 通り

「赤赤赤赤赤赤」,「青青青青青青」

色の変化が 1 回だけ起きる場合は，(1) の左端が赤である場合と，同様に左端が青である場合の 5×2 通りである．
したがって，色の変化が 1 回以下である確率は　$\dfrac{2 + 5 \times 2}{2^6} = \dfrac{3}{16}$
求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{3}{16} = \mathbf{\dfrac{13}{16}}$

(3) 左端が赤色か青色の 2 通りに対して，色の変化が 2 個目，3 個目，$\cdots$，6 個目の 5 個の電球の中から変化する電球 n 個を選ぶ場合の数は

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_n \text{ (通り)}$$

求める確率を $P(n)$ とすると $(0 \leqq n \leqq 5)$

$$P(n) = \frac{2 \times {}_5\mathrm{C}_n}{2^6} = \boldsymbol{\frac{{}_5\mathrm{C}_n}{32}}$$

(4) 求める期待値を E とすると，(3) の結果から

$$E = \sum_{n=0}^{5} n \cdot P(n) = \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{5} n \cdot {}_5\mathrm{C}_n = \frac{1}{32} \times 5 \cdot 2^{5-1} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

補足

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$