平成 15 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答， $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ より 1 題選択， $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ より 1 題選択

1 実数 a，c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について，次の条件を考える。

$(*)$　　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1) $a \geqq 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2) $a \leqq 2$ のとき，条件 $(*)$ を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が条件 $(*)$ を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ。

2 座標平面上で，不等式　$2|x-4| + |y-5| \leqq 3$，　$2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big| \leqq 3$ が表す領域を，それぞれ A，B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

3 a，b，c を定数とし，$a > 0$ とする。$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 実数 x に対し，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y = f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q = -g(p)$ であることを示せ。

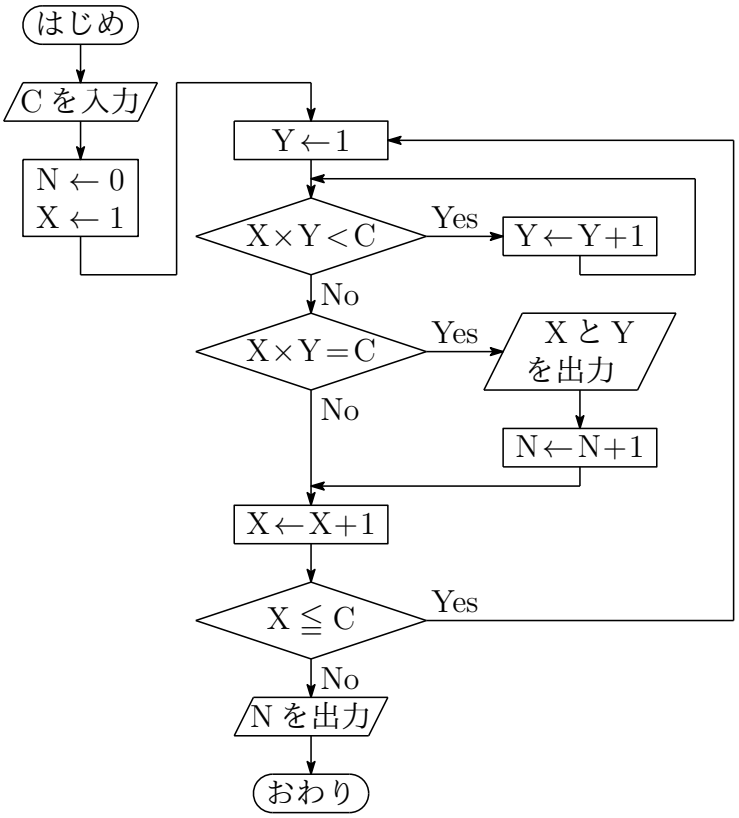
4 $\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を ℓ_k とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする。ただし，C と ℓ_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3) $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1 \neq 0$，$r \neq -1, 0$ とする。

5 (1) 次の流れ図に対応するプログラムを実行する。$C = 105$ を入力したとき，X，Y および N の値を出力順にすべて示せ。



(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。自然数 A，B，R を入力したとき，第 1 象限 (x 軸，y 軸は含まない) にあり，かつ中心が $(A,\ B)$ で半径が R の円の内部および周上にある格子点の個数と，それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である格子点 (複数個あるときは x 座標が最大のもの) の座標を出力するプログラムの流れ図を，方針を記述してから作成せよ。

6 空間内に四面体 OABC があり，$\angle$AOB，$\angle$BOC，$\angle$COA はすべて 90° であるとする。辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA，$\angle$OGB，$\angle$OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

7 $0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

8 座標平面上に $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

解答例

1 (1) $g(x) = f(x) - (x+1)^2$ とおくと

$$g(x) = (a-1)\left(x - \frac{1}{a-1}\right)^2 + c - \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ のとき，$a-1 \geqq 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{a-1} \leqq 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$c - \dfrac{a}{a-1}$

したがって，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$c - \frac{a}{a-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq \frac{a}{a-1}$$

よって，最小の c の値は　$\dfrac{a}{a-1}$

(2) i) $1 < a \leqq 2$ のとき，$0 < a-1 \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{1}{a-1}$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

ii) $a = 1$ のとき，$g(x) = -2x + c - 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

iii) $a < 1$ のとき，$a - 1 < 0$，$\dfrac{1}{a-1} < 0$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

i)〜iii) より，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$g(1) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq 4 - a$$

よって，最小の c の値は　$4 - a$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2+c)\,dx = \frac{a}{3}+c$

i) $a \geqq 2$ のとき，$c \geqq \dfrac{a}{a-1}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\geqq \frac{a}{3}+\frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)+1}{3}+\frac{(a-1)+1}{a-1}\\ &= \frac{a-1}{3}+\frac{1}{a-1}+\frac{4}{3}\\ &\geqq 2\sqrt{\frac{a-1}{3}\times\frac{1}{a-1}}+\frac{4}{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

等号が成り立つのは

$$\frac{a-1}{3} = \frac{1}{a-1},\quad c = \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ より　$a = 1+\sqrt{3},\ \ c = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

ii) $a \leqq 2$ のとき，$c \geqq 4-a$ より

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{a}{3}+4-a = -\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4 = \frac{8}{3}$$

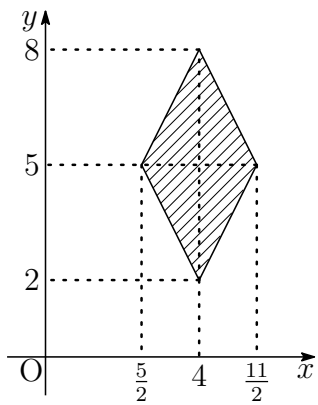
ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{8}{3}$

等号が成り立つのは　$a=2$，$c=4-a=2$

i)，ii) より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は

$\boldsymbol{a = 1+\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{c = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}}$ をとる．　■

2 (1) 不等式 $2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．
不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



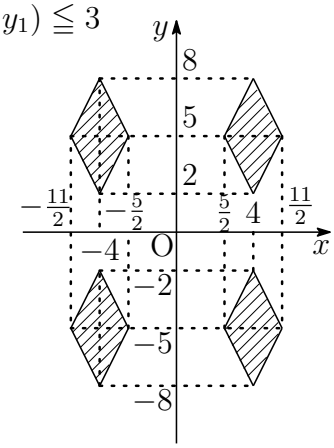
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1) \leqq 3$$

$g(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1,\ y_1) \in A \quad \Longrightarrow \quad (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}(x,\ |y|) =&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\\ &(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\end{aligned}$$

$\log_x |y| = \dfrac{m}{n}$ (m，n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}}=|y| \quad \text{ゆえに} \quad x^m=|y|^n \quad \cdots ①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

$$(x,\ |y|)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(4, \pm 2),\ (4, \pm 4),\ (4, \pm 8),\ (5, \pm 5)}$$

■

3 (1)

$$\begin{aligned} px - f(x) &= px - (ax^2 + bx + c) \\ &= -ax^2 + (p-b)x - c \\ &= -a\left(x - \frac{p-b}{2a}\right)^2 + \frac{(p-b)^2}{4a} - c \end{aligned}$$

$-a < 0$ より，$px - f(x)$ の最大値 $g(p)$ は

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{(p-b)^2}{4a} - c \\ &= \frac{1}{4a}p^2 - \frac{b}{2a}p + \frac{b^2}{4a} - c \end{aligned}$$

したがって　$g(x) = \dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a} - c$

$f(x) = g(x)$ であるから

$$a = \frac{1}{4a},\quad b = -\frac{b}{2a},\quad c = \frac{b^2}{4a} - c$$

$a > 0$ より　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 0$，$c = 0$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}x^2}$

(2)

$$\begin{aligned} xp - g(p) &= xp - \left(\frac{1}{4a}p^2 - \frac{b}{2a}p + \frac{b^2}{4a} - c\right) \\ &= -\frac{1}{4a}p^2 + \frac{b+2ax}{2a}p + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= -\frac{1}{4a}\{p - (b+2ax)\}^2 + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{4a} < 0$ より，求める最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$$

別解 条件から

$$px - f(x) \leqq g(p) \quad \text{したがって} \quad xp - g(p) \leqq f(x)$$

第 2 式から，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$$

(3) $y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接するとき，2 式から y を消去すると

$$f(x)=px+q\cdots①\quad すなわち\quad ax^2+(b-p)x+c-q=0\cdots②$$

$x=t$ は，① の解であるから

$$f(t)=pt+q\cdots③$$

$x=t$ は ② の重解であるから，$D=0$ より

$$(b-p)^2-4a(c-q)=0\quad ゆえに\quad q=-\frac{1}{4a}(p-b)^2+c$$

よって $$q=-g(p)\cdots④$$

③，④ より $$\boldsymbol{pt-f(t)=g(p),\ q=-g(p)}\quad\cdots(*)$$

逆に，$(*)$ の第 1 式から

$$pt-(at^2+bt+c)=\frac{1}{4a}(p-b)^2-c$$

$$t^2-\frac{1}{a}(p-b)t+\frac{1}{4a^2}(p-b)^2=0$$

したがって $$\left(t-\frac{p-b}{2a}\right)^2=0$$

ゆえに $$t=\frac{p-b}{2a}\quad よって\quad p=2at+b\cdots⑤$$

$(*)$ より $$q=-pt+f(t)\cdots⑥$$

⑤，⑥ および $p=f'(t)$ であるから，直線 $y=px+q$ は

$$y=px-pt+f(t)\quad すなわち\quad y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

上式は，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式である．

別解　($px-f(x)$ の最大値が $g(p)$ であることを利用する)

$y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接する．

$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $px+q=f(x)$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $px-f(x)=-q$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\Longleftrightarrow$ 上に凸の放物線 $y=px-f(x)$ と直線 $y=-q$ は点 $(t,\ g(p))$ で接する．

$\Longleftrightarrow$ $pt-f(t)=g(p)$，$-q=g(p)$，すなわち $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_{k+1} \neq a_k$ のとき，m_k は直線 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の傾きであるから

$$m_k = \frac{{a_{k+1}}^2 - {a_k}^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

$a_{k+1} = a_k$ のとき，m_k は上式における $a_{k+1} \to a_k$ の極限値であるから

$$m_k = 2a_k$$

上の 2 式から　$m_k = a_{k+1} + a_k$　よって　$\boldsymbol{a_{k+1} = -a_k + m_k}$

(2) $m_k = m_1 r^{k-1}$ であるから　$a_{k+1} + a_k = m_1 r^{k-1}$

ゆえに　$$(-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k = m_1(-r)^{k-1}$$

$k \geqq 2$ のとき　$$\sum_{j=1}^{k-1}\{(-1)^{j+1}a_{j+1} - (-1)^j a_j\} = m_1 \sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

$$(-1)^k a_k + a_1 = m_1 \sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

したがって　$$a_k = (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1 \sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1} \quad \cdots (*)$$

i) $-r \neq 1$　すなわち　$r \neq -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1 \times \frac{1-(-r)^{k-1}}{1+r} \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \end{aligned}$$

ii) $-r = 1$　すなわち　$r = -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1(k-1) \\ &= (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\} \end{aligned}$$

i)，ii) で得られた結果は，ともに $k = 1$ のときも成り立つので

$\boldsymbol{r \neq -1}$ のとき　$\boldsymbol{a_k = (-1)^{k+1}a_1 + \dfrac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1}$

$\boldsymbol{r = -1}$ のとき　$\boldsymbol{a_k = (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\}}$

(3) $m_1 \neq 0$ より $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r} \neq 0$．$r \neq -1$ より (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \{(-1)^k + r^{k-1}\}a_1 \\ &= r^{k-1}a_1 \end{aligned}$$

$m_k = a_{k+1} + a_k$ および上式から $a_{k+1} = ra_k$ であるから

$$m_k = ra_k + a_k = (1+r)a_k$$

よって ℓ_k の方程式は

$$y - {a_k}^2 = (1+r)a_k(x - a_k) \quad \text{すなわち} \quad y = (1+r)a_kx - r{a_k}^2$$

直線 $y = (1+r)a_kx - r{a_k}^2$ について，$(1+r)a_k \neq 0$ であるから，これが $y = bx^2$ に接するとき，$b \neq 0$ である．2 式から y を消去し整理すると

$$bx^2 - (1+r)a_kx + r{a_k}^2 = 0$$

このとき

$$\begin{aligned} D &= (1+r)^2{a_k}^2 - 4bra_k{}^2 \\ &= \{(1+r)^2 - 4br\}{a_k}^2 \end{aligned}$$

$r \neq 0, -1$ であるから，$\boldsymbol{b = \dfrac{(1+r)^2}{4r}}$ とすると，$D = 0$ となる．

よって，任意の k に対して，直線 ℓ_k は放物線 $y = \dfrac{(1+r)^2}{4r}x^2$ に接する．■

5 (1) 自然数 C に対して，$XY = C$ をみたす 2 つの自然数 $(X,\ Y)$ の組とその個数 N を求め，X を小さい順に出力するプログラムである．したがって，

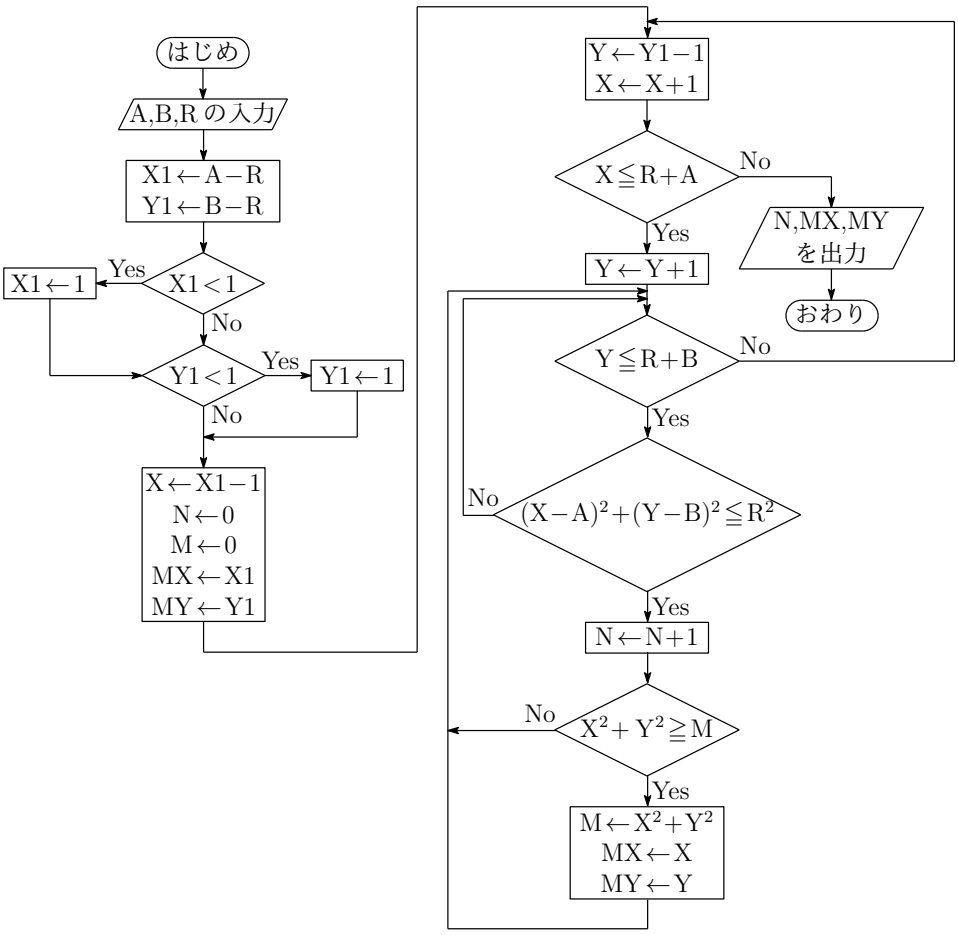
$(\mathrm{X},\ \mathrm{Y}) = (1, 105),\ (3, 35),\ (5, 21),\ (7, 15),\ (15,\ 7),\ (21, 5),\ (35, 3),\ (105, 1)$

および $\mathrm{N} = 8$ が出力される．

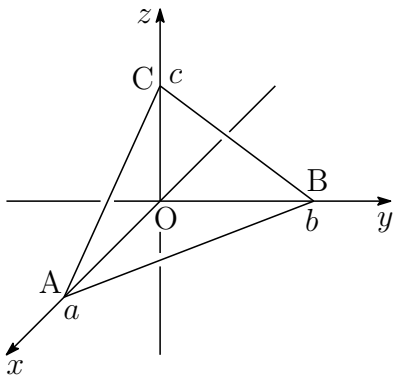
(2) $\mathrm{X1} = \max(\mathrm{A} - \mathrm{R},\ 1)$，$\mathrm{Y1} = \max(\mathrm{B} - \mathrm{R},\ 1)$ とし，$\mathrm{X1} \leqq x \leqq \mathrm{A} + \mathrm{R}$，$\mathrm{Y1} \leqq y \leqq \mathrm{B} + \mathrm{R}$ を満たす領域内の格子点 $(x,\ y)$ について，円の内部または周上にある格子点の個数を N，それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である点の座標を $(\mathrm{MX}, \mathrm{MY})$ とする．

また，これらの点について，次の順に調べていく．

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{X1},\ \mathrm{B}+\mathrm{R}) \\
\to&(\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{B}+\mathrm{R}) \\
&\cdots \\
\to&(\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{B}+\mathrm{R})
\end{aligned}
$$



6 (1) ∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，△ABC の重心 G の座標は



$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　$\vec{n}=\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

△APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

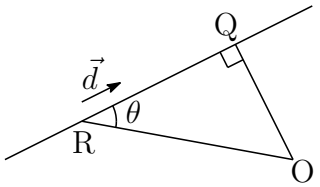
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると
$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき



$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から　　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$　$\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって　　$t = \dfrac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca, -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

法ベクトル

座標平面 (2 次元) における直線 $ax + by + c = 0$(1 次元) および座標空間 (3 次元) における平面 $ax + by + cz + d = 0$(2 次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は，それぞれ $(a,\ b)$，$(a,\ b,\ c)$ である．また，法ベクトルの次元は $2 - 1$ および $3 - 2$ で，ともに 1 次元である．

直線 $ax + by + c = 0$，平面 $ax + by + cx + d = 0$ は，n 次元空間における $n - 1$ 次元の多様体であり，法ベクトルの次元は 1(多様体の余次元) である．

したがって，これらの多様体 (ここでは，直線と平面) は同形であり，関連する公式も同形である．

たとえば，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であり，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離と同形である．　■

7 (1) $z = t + ai$ より

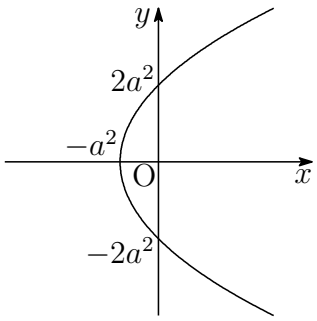
$$z^2 = (t+ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$，$y = 2at$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに　$\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$　$\cdots$①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．



(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t+ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$，$y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots ②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
② は $y = \pm a$ の直線であり，①，② の共有点は 1 個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，② から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots (*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき　$(*)$ の実数解は 2 個
$\sin\theta = a$ のとき　$(*)$ の実数解は 1 個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき　$(*)$ の実数解は 0 個

i)，ii) より，①，② の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

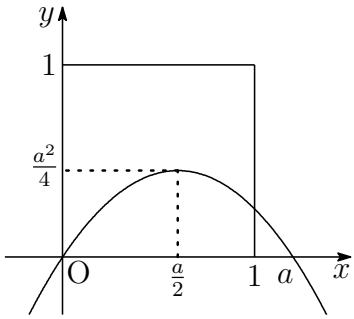
■

8 (1) 正方形の面積は　1

正方形の周および内部と放物線 $y = x(a-x)$ で囲まれた部分の面積を S とし，求める確率を $P(a)$ とすると　$P(a) = \dfrac{S}{1} = S$

i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$



ii) $1 < a \leqq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}}$$

(2) 求める確率は

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot P\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \boldsymbol{\frac{121}{288}}$$

(3) 3 回ともはずれる確率は　$(1 - P(a))^3$ である．

少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1 - P(a))^3 \geqq \frac{19}{27} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^{3} k\cdot{}_3\mathrm{C}_k (P(a))^k (1 - P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\dfrac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leqq \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から　$\dfrac{1}{3} \leqq P(a) \leqq \dfrac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$$

■