

平成 15 年度 九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 文系 (文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部 (経済・経営))

1 ~ 2 必答, 3 ~ 5 から 1 題選択, 6 ~ 8 から 1 題選択

1 実数 a, c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について, 次の条件を考える。

(*) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) \geq (x+1)^2$ が成立する。

(1) $a \geq 2$ のとき, 条件 (*) を満たす最小の c の値は $\frac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2) $a \leq 2$ のとき, 条件 (*) を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が条件 (*) を満たしているとき, 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を最小にする a, c と, そのときの定積分の値を求めよ。

2 座標平面上で, 不等式 $2|x-4| + |y-5| \leq 3, 2|x-4| + ||y-5| \leq 3$ が表す領域を, それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 (x, y) で, x が正の整数であり y が整数であって, $\log_x |y|$ が有理数となる点を, 理由を示してすべて求めよ。

3 a, b, c を定数とし, $a > 0$ とする。 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。実数 p に対し, x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一致するとき, $f(x)$ を求めよ。

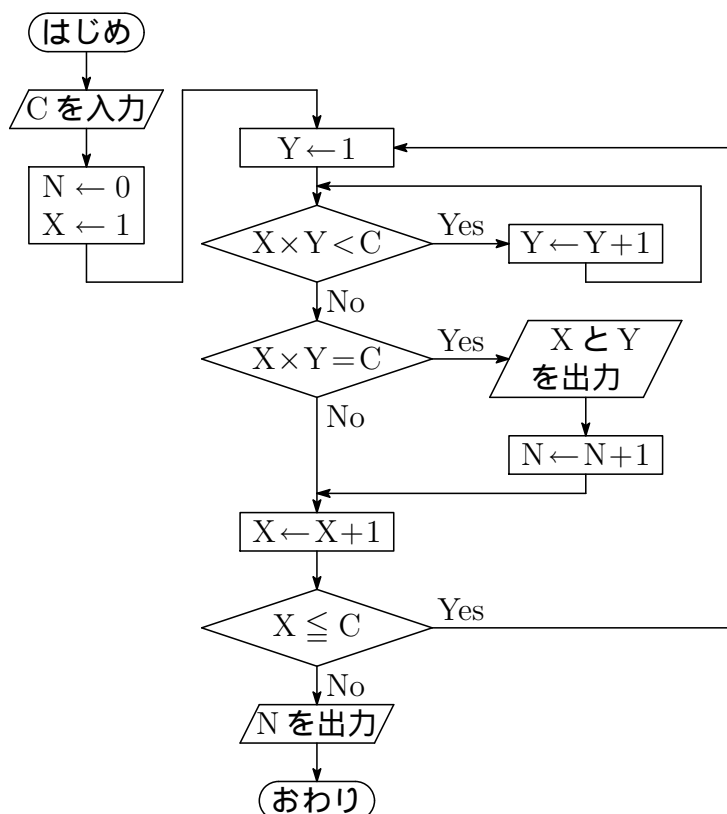
(2) 実数 x に対し, p の関数 $xp - g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。 $h(x)$ を求めよ。

(3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t, f(t))$ で $y = f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q = -g(p)$ であることを示せ。

4 $\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし、 C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し、点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を l_k とし、この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする。ただし、 C と l_k が接する場合は $P_{k+1} = P_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

- (1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。
- (2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1, m_1, r, k で表せ。
- (3) $a_1 = \frac{m_1}{1+r}$ とする。このとき、ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって、すべての自然数 k に対し直線 l_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し、 b を r で表せ。ただし、 $m_1 \neq 0, r \neq -1, 0$ とする。

5 (1) 次の流れ図に対応するプログラムを実行する。 $C = 105$ を入力したとき、 X, Y および N の値を出力順にすべて示せ。



- (2) 座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。自然数 A, B, R を入力したとき、第 1 象限 (x 軸、 y 軸は含まない) にあり、かつ中心が (A, B) で半径が R の円の内部および周上にある格子点の個数と、それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である格子点 (複数あるときは x 座標が最大のもの) の座標を出力するプログラムの流れ図を、方針を記述してから作成せよ。

- 6 空間内に四面体 $OABC$ があり, $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ はすべて 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを, それぞれ a, b, c とし, 三角形 ABC の重心を G とする。
- (1) $\angle OGA, \angle OGB, \angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。
 - (2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き, 点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき, 線分 OQ の長さの最小値を求めよ。
- 7 $0 < a < 1$ である定数 a に対し, 複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を l とする。ただし, i は虚数単位である。
- (1) 複素数 z が l 上を動くとき, z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。
 - (2) 直線 l を, 原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。 m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ。
- 8 座標平面上に $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて, $y \leq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし, $0 < a \leq 2$ とする。
- (1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。
 - (2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$, 2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として, ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。
 - (3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり, 当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

解答例

1 (1) $g(x) = f(x) - (x+1)^2$ とおくと

$$g(x) = (a-1) \left(x - \frac{1}{a-1} \right)^2 + c - \frac{a}{a-1}$$

$a \geq 2$ のとき, $a-1 \geq 1$ であるから, $0 < \frac{1}{a-1} \leq 1$ より

$0 \leq x \leq 1$ における $g(x)$ の最小値は $c - \frac{a}{a-1}$

したがって, 条件 (*) が成り立つための条件は

$$c - \frac{a}{a-1} \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geq \frac{a}{a-1}$$

よって, 最小の c の値は $\frac{a}{a-1}$

(2) i) $1 < a \leq 2$ のとき, $0 < a-1 \leq 1$, $1 \leq \frac{1}{a-1}$ より

$0 \leq x \leq 1$ における $g(x)$ の最小値は $g(1)$

ii) $a = 1$ のとき, $g(x) = -2x + c - 1$ より

$0 \leq x \leq 1$ における $g(x)$ の最小値は $g(1)$

iii) $a < 1$ のとき, $a-1 < 0$, $\frac{1}{a-1} < 0$ より

$0 \leq x \leq 1$ における $g(x)$ の最小値は $g(1)$

i) ~ iii) より, 条件 (*) が成り立つための条件は

$$g(1) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geq 4 - a$$

よって, 最小の c の値は $4 - a$

$$(3) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + c) dx = \frac{a}{3} + c$$

i) $a \geq 2$ のとき, $c \geq \frac{a}{a-1}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\geq \frac{a}{3} + \frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)+1}{3} + \frac{(a-1)+1}{a-1} \\ &= \frac{a-1}{3} + \frac{1}{a-1} + \frac{4}{3} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a-1}{3} \times \frac{1}{a-1}} + \frac{4}{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ゆえに $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

等号が成り立つのは

$$\frac{a-1}{3} = \frac{1}{a-1}, \quad c = \frac{a}{a-1}$$

$$a \geq 2 \text{ より } a = 1 + \sqrt{3}, \quad c = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

ii) $a \leq 2$ のとき, $c \geq 4 - a$ より

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{a}{3} + 4 - a = -\frac{2}{3}a + 4 \geq -\frac{2}{3} \cdot 2 + 4 = \frac{8}{3}$$

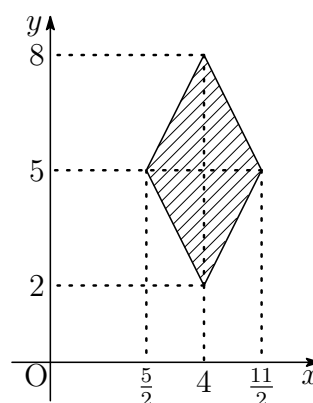
ゆえに $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{8}{3}$

等号が成り立つのは $a = 2, c = 4 - a = 2$

i), ii) より, $\int_0^1 f(x) dx$ は

$$a = 1 + \sqrt{3}, c = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \text{ のとき, 最小値 } \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} \text{ をとる}$$

- 2 (1) 不等式 $2|x| + |y| \leq 3$ の表す領域は、4点 $(\frac{3}{2}, 0), (0, 3), (-\frac{3}{2}, 0), (0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である。
不等式 $2|x-4| + |y-5| \leq 3$ の表す領域 A は、 $2|x| + |y| \leq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4、 y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから、 A の表す領域は、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



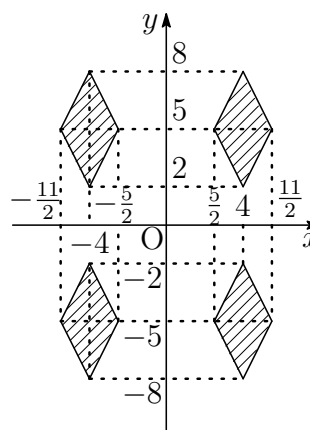
- (2) $f(x, y) = 2|x-4| + |y-5|$, $g(x, y) = 2|x| + |y|$ とおく。
 $f(x, y) \leq 3$ の表す領域 A の点 (x_1, y_1) は、(1) の結果から $x_1 > 0, y_1 > 0$ であり、 $g(x, y) = f(|x|, |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1) = f(x_1, y_1) \leq 3$$

$g(x, y) \leq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1, y_1) \in A \implies (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって、 B の表す領域は、 A および A を x 軸、 y 軸、原点に関して対称移動したものである。よって、 B の表す領域は、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



- (3) $x, |y|$ は正の整数であるから、領域 B 内の点において、これを満たす $(x, |y|)$ の組は、次のとおりである。

$$\begin{aligned} (x, |y|) = & (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ & (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), \\ & (5, 4), (5, 5), (5, 6) \end{aligned}$$

$\log_x |y| = \frac{m}{n}$ (m, n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}} = |y| \quad \text{ゆえに} \quad x^m = |y|^n \quad \dots \textcircled{1}$$

素因数分解の一意性により、 $\textcircled{1}$ を満たすものは

$$(x, |y|) = (4, 2), (4, 4), (4, 8), (5, 5)$$

よって、求める (x, y) の組は次の 8 組である。

$$(x, y) = (4, \pm 2), (4, \pm 4), (4, \pm 8), (5, \pm 5)$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \quad (1) \quad px - f(x) &= px - (ax^2 + bx + c) \\
 &= -ax^2 + (p - b)x - c \\
 &= -a \left(x - \frac{p - b}{2a} \right)^2 + \frac{(p - b)^2}{4a} - c
 \end{aligned}$$

$-a < 0$ より, $px - f(x)$ の最大値 $g(p)$ は

$$\begin{aligned}
 g(p) &= \frac{(p - b)^2}{4a} - c \\
 &= \frac{1}{4a}p^2 - \frac{b}{2a}p + \frac{b^2}{4a} - c
 \end{aligned}$$

したがって $g(x) = \frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a} - c$

$f(x) = g(x)$ であるから

$$a = \frac{1}{4a}, \quad b = -\frac{b}{2a}, \quad c = \frac{b^2}{4a} - c$$

$a > 0$ より $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 0$

よって $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad xp - g(p) &= xp - \left(\frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a} - c \right) \\
 &= -\frac{1}{4a}x^2 + \frac{b + 2ax}{2a}x + c - \frac{b^2}{4a} \\
 &= -\frac{1}{4a}\{p - (b + 2ax)\}^2 + ax^2 + bx + c
 \end{aligned}$$

$-\frac{1}{4a} < 0$ より, 求める最大値 $h(x)$ は

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

別解 条件から

$$px - f(x) \leq g(p) \quad \text{したがって} \quad xp - g(p) \leq f(x)$$

第2式から, p の関数 $xp - g(p)$ の最大値 $h(x)$ は

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

(3) $y = px + q$ が $x = t$ で $y = f(x)$ に接するとき, 2式から y を消去すると

$$f(x) = px + q \cdots \textcircled{1} \quad \text{すなわち} \quad ax^2 + (b-p)x + c - q = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$x = t$ は, $\textcircled{1}$ の解であるから

$$f(t) = pt + q \cdots \textcircled{3}$$

$x = t$ は $\textcircled{2}$ の重解であるから, $D = 0$ より

$$(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q = -\frac{1}{4a}(p-b)^2 + c$$

よって
$$q = -g(p) \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より
$$pt - f(t) = g(p), \quad q = -g(p) \quad \cdots (*)$$

逆に, $(*)$ の第1式から

$$pt - (at^2 + bt + c) = \frac{1}{4a}(p-b)^2 - c$$

$$t^2 - \frac{1}{a}(p-b)t + \frac{1}{4a^2}(p-b)^2 = 0$$

したがって
$$\left(t - \frac{p-b}{2a}\right)^2 = 0$$

ゆえに
$$t = \frac{p-b}{2a} \quad \text{よって} \quad p = 2at + b \cdots \textcircled{5}$$

$(*)$ より
$$q = -pt + f(t) \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}$, $\textcircled{6}$ および $p = f'(t)$ であるから, 直線 $y = px + q$ は

$$y = px - pt + f(t) \quad \text{すなわち} \quad y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

上式は, $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式である.

別解 ($px - f(x)$ の最大値が $g(p)$ であることを利用する)

$y = px + q$ が $x = t$ で $y = f(x)$ に接する.

\iff 2次方程式 $px + q = f(x)$ は $x = t$ を重解にもつ.

\iff 2次方程式 $px - f(x) = -q$ は $x = t$ を重解にもつ.

\iff 上に凸の放物線 $y = px - f(x)$ と直線 $y = -q$ は点 $(t, g(p))$ で接する.

$\iff pt - f(t) = g(p)$, $-q = g(p)$, すなわち $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q = -g(p)$

4 (1) $a_{k+1} \neq a_k$ のとき, m_k は直線 $P_k P_{k+1}$ の傾きであるから

$$m_k = \frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

$a_{k+1} = a_k$ のとき, m_k は上式における $a_{k+1} \rightarrow a_k$ の極限值であるから

$$m_k = 2a_k$$

上の2式から $m_k = a_{k+1} + a_k$ よって $a_{k+1} = -a_k + m_k$

(2) $m_k = m_1 r^{k-1}$ であるから $a_{k+1} + a_k = m_1 r^{k-1}$

ゆえに $(-1)^{k+1} a_{k+1} - (-1)^k a_k = m_1 (-r)^{k-1}$

$$k \geq 2 \text{ のとき } \sum_{j=1}^{k-1} \{(-1)^{j+1} a_{j+1} - (-1)^j a_j\} = m_1 \sum_{j=1}^{k-1} (-r)^{j-1}$$

$$(-1)^k a_k + a_1 = m_1 \sum_{j=1}^{k-1} (-r)^{j-1}$$

$$\text{したがって } a_k = (-1)^{k+1} a_1 + (-1)^k m_1 \sum_{j=1}^{k-1} (-r)^{j-1} \dots (*)$$

i) $-r \neq 1$ すなわち $r \neq -1$ のとき, (*) より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1} a_1 + (-1)^k m_1 \times \frac{1 - (-r)^{k-1}}{1 + r} \\ &= (-1)^{k+1} a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1 + r} m_1 \end{aligned}$$

ii) $-r = 1$ すなわち $r = -1$ のとき, (*) より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1} a_1 + (-1)^k m_1 (k-1) \\ &= (-1)^k \{-a_1 + (k-1)m_1\} \end{aligned}$$

i), ii) で得られた結果は, とともに $k = 1$ のときも成り立つので

$$r \neq -1 \text{ のとき } a_k = (-1)^{k+1} a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1 + r} m_1$$

$$r = -1 \text{ のとき } a_k = (-1)^k \{-a_1 + (k-1)m_1\}$$

(3) $m_1 \neq 0$ より $a_1 = \frac{m_1}{1+r} \neq 0$. $r \neq -1$ より (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \{(-1)^k + r^{k-1}\}a_1 \\ &= r^{k-1}a_1 \end{aligned}$$

$m_k = a_{k+1} + a_k$ および上式から $a_{k+1} = ra_k$ であるから

$$m_k = ra_k + a_k = (1+r)a_k$$

よって ℓ_k の方程式は

$$y - a_k^2 = (1+r)a_k(x - a_k) \quad \text{すなわち} \quad y = (1+r)a_kx - ra_k^2$$

直線 $y = (1+r)a_kx - ra_k^2$ について, $(1+r)a_k \neq 0$ であるから, これが $y = bx^2$ に接するとき, $b \neq 0$ である. 2式から y を消去し整理すると

$$bx^2 - (1+r)a_kx + ra_k^2 = 0$$

このとき

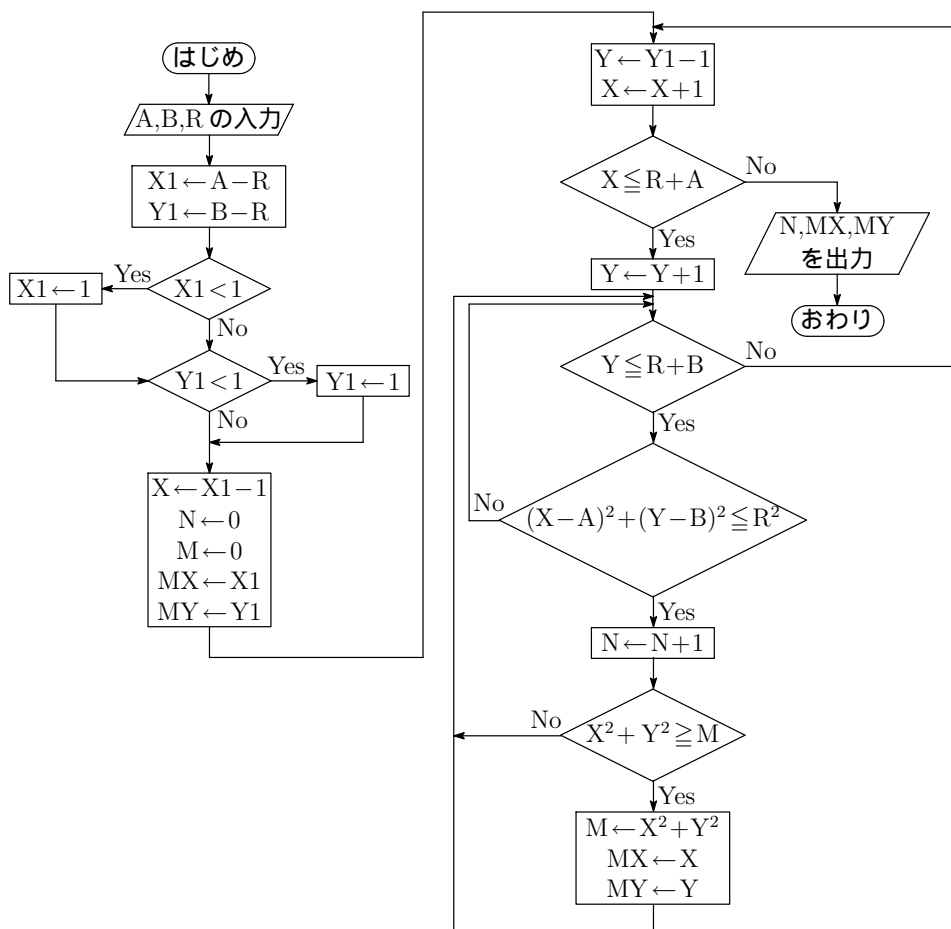
$$\begin{aligned} D &= (1+r)^2a_k^2 - 4bra_k^2 \\ &= \{(1+r)^2 - 4br\}a_k^2 \end{aligned}$$

$r \neq 0, -1$ であるから, $b = \frac{(1+r)^2}{4r}$ とすると, $D = 0$ となる.

よって, 任意の k に対して, 直線 ℓ_k は放物線 $y = \frac{(1+r)^2}{4r}x^2$ に接する.

- 5 (1) 自然数 C に対して, $XY = C$ をみたす 2 つの自然数 (X, Y) の組とその個数 N を求め, X を小さい順に出力するプログラムである. したがって, $(X, Y) = (1, 105), (3, 35), (5, 21), (7, 15), (15, 7), (21, 5), (35, 3), (105, 1)$ および $N = 8$ が出力される.
- (2) $X1 = \max(A - R, 1), Y1 = \max(B - R, 1)$ とし, $X1 \leq x \leq A + R, Y1 \leq y \leq B + R$ を満たす領域内の格子点 (x, y) について, 円の内部または周上にある格子点の個数を N , それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である点の座標を (MX, MY) とする.
また, これらの点について, 次の順に調べていく.

$(X1, Y1) \rightarrow (X1, Y1 + 1) \rightarrow \dots \rightarrow (X1, B + R)$
 $\rightarrow (X1 + 1, Y1) \rightarrow (X1 + 1, Y1 + 1) \rightarrow \dots \rightarrow (X1 + 1, B + R)$
 \dots
 $\rightarrow (A + R, Y1) \rightarrow (A + R, Y1 + 1) \rightarrow \dots \rightarrow (A + R, B + R)$



- 6 (1) $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ を定めると, $\triangle ABC$ の重心 G の座標は

$$G\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A, B, C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

この平面の法線ベクトル \vec{n} は $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$

このとき, $\vec{OG} // \vec{n}$ であるから, 定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) = k \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = b^2 = c^2 = 3k$$

よって, $a > 0, b > 0, c > 0$ より $a = b = c$

- (2) D は線分 BC を $1:2$ に内分する点であるから

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = -\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから ($t \neq 0$)

$$\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AD}$$

$\triangle APQ$ の重心が G であるから

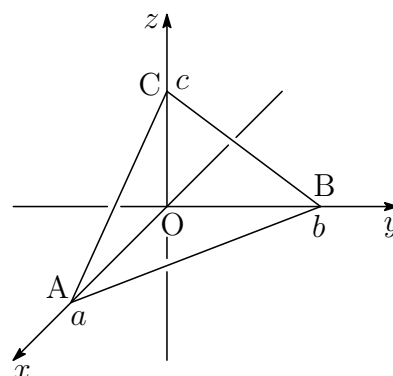
$$\vec{OA} + \vec{OP} + \vec{OQ} = 3\vec{OG} \quad \text{すなわち} \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OP}$$

したがって $\vec{OQ} = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - t\vec{AD}$

$$= (-a, b, c) + \frac{t}{3}(3a, -2b, -c)$$

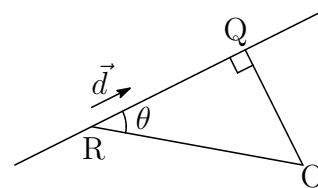
ここで, $\vec{OR} = (-a, b, c), \vec{d} = (3a, -2b, -c)$ とおくと

$$\vec{OQ} = \vec{OR} + \frac{t}{3}\vec{d} \quad \dots \textcircled{1}$$



\vec{OR} と \vec{d} のベクトルのなす角を θ とすると
 $(0 \leq \theta \leq \pi)$, OQ が最小となるとき

$$|\vec{OQ}| = |\vec{OR}| \sin \theta, \quad \sin \theta = \frac{|\vec{OR} \times \vec{d}|}{|\vec{OR}| |\vec{d}|}$$



上の2式から $|\vec{OQ}| = \frac{|\vec{OR} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} \dots \textcircled{2}$

$\vec{OQ} \perp \vec{d}$ より $\vec{OQ} \cdot \vec{d} = 0$ であるから, $\textcircled{1}$ をこれに代入して

$$\vec{OR} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3} |\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\vec{OR} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって $t = \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

$\vec{OR} \times \vec{d} = (bc, 2ca, -ab)$ であるから, $\textcircled{2}$ より

$$|\vec{OQ}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}$$

法ベクトル

座標平面 (2次元) における直線 $ax + by + c = 0$ (1次元) および座標空間 (3次元) における平面 $ax + by + cz + d = 0$ (2次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は, それぞれ (a, b) , (a, b, c) である. また, 法ベクトルの次元は $2-1$ および $3-2$ で, ともに1次元である.

直線 $ax + by + c = 0$, 平面 $ax + by + cz + d = 0$ は, n 次元空間における $n-1$ 次元の多様体であり, 法ベクトルの次元は1(多様体の余次元)である.

したがって, これらの多様体 (ここでは, 直線と平面) は同形であり, 関連する公式も同形である.

たとえば, 点 (x_1, y_1, z_1) から平面 $ax + by + cz + d = 0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であり, 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離と同形である.

7 (1) $z = t + ai$ より

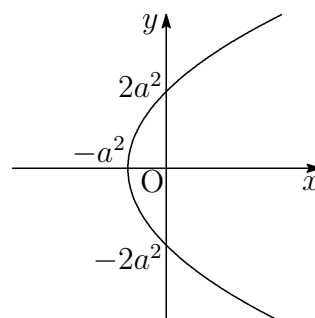
$$z^2 = (t + ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$, $y = 2at$ とおき, 2式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

$$\text{ゆえに } 4a^2(x + a^2) = y^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって, 求める軌跡は右の図のようになる.



(2) m は l を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos \theta + i \sin \theta) &= (t + ai)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (t \cos \theta - a \sin \theta) + i(t \sin \theta + a \cos \theta) \end{aligned}$$

$x = t \cos \theta - a \sin \theta$, $y = t \sin \theta + a \cos \theta$ とおき, 2式から t を消去すると

$$x \sin \theta - y \cos \theta + a = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

i) $\sin \theta = 0$ のとき

② は $y = \pm a$ の直線であり, ①, ② の共有点は 1 個

ii) $\sin \theta \neq 0$ のとき

①, ② から x を消去して整理すると

$$(\sin \theta)y^2 - (4a^2 \cos \theta)y - 4a^3(a \sin \theta - 1) = 0 \quad \dots (*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから, その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4 \cos^2 \theta + 4a^3 \sin \theta(a \sin \theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin \theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

$-1 \leq \sin \theta < a$ のとき (*) の実数解は 2 個

$\sin \theta = a$ のとき (*) の実数解は 1 個

$a < \sin \theta \leq 1$ のとき (*) の実数解は 0 個

i), ii) より, ①, ② の共有点の個数は

$$\begin{cases} -1 \leq \sin \theta < 0, 0 < \sin \theta < a \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ \sin \theta = a \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a < \sin \theta \leq 1 & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

8 (1) 正方形の面積は 1

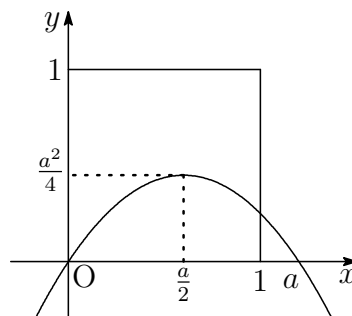
正方形の周および内部と放物線 $y = x(a - x)$ で囲まれた部分の面積を S とし, 求める確率を $P(a)$ とすると $P(a) = \frac{S}{1} = S$

i) $0 < a \leq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a-x) dx = \frac{a^3}{6}$$

ii) $1 < a \leq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a-x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$$



(2) 求める確率は

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot P\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{48} \left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \frac{121}{288} \end{aligned}$$

(3) 3回ともはずれる確率は $(1 - P(a))^3$ である.

少なくとも1回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1 - P(a))^3 \geq \frac{19}{27} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \geq \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^3 k \cdot {}_3C_k (P(a))^k (1 - P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\frac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leq \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad P(a) \leq \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から $\frac{1}{3} \leq P(a) \leq \frac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \frac{4}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}$$