平成 14 年度　九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答， $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ より 1 題選択， $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ より 1 題選択

1 次の問いに答えよ。

(1) 原点を中心とする半径 r $(r > 0)$ の円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$ax + by = r^2$$

で与えられることを示せ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $C : y = x^2 + 1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これら接線の方程式を求めよ。

(3) 問 (2) における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

2 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。必要ならば，
$1 + r + r^2 + \cdots + r^m = \dfrac{r^{m+1} - 1}{r - 1}$ $(r \neq 1)$ を用いてよい。

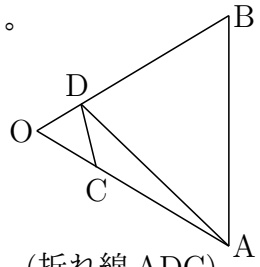
(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p + 1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) $a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ (r，s は正の奇数) の形をした偶数 a，b を考える。

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたす a，b を求めよ。

3 $\triangle$AOB は OA $=$ OB $= 1$ なる二等辺三角形とする。$\alpha = \angle$AOB とし，線分 OB に関して A と対称な点を A$'$ とする。次の問いに答えよ。



(折れ線 ADC)

(1) $\alpha < 90^\circ$ とする。右図のように線分 OA 上に点 C をとる。点 C を固定し，線分 OB 上に点 D を折れ線 ADC の長さが最小となるようにとる。線分 OA$'$ 上に OC$'$ $=$ OC をみたす点 C$'$ をとれば，線分 AC$'$ は点 D を通ることを示せ。

(2) $\alpha < 45^\circ$ とする。線分 OA 上に点 E を，線分 OB 上に点 F を折れ線 AFE の長さが最小となるようにとる。このとき $\angle$AEF は直角となることを示せ。

(3) $\alpha < 60^\circ$ とする。線分 OA 上に点 G を，線分 OB 上に点 H を折れ線 AHGB の長さが最小となるようにとる。このとき，折れ線 AHGB の長さを α を用いて表せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

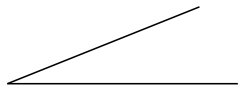
$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

5 n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，**1 回折れ線**とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



(1 回折れ線)

(1) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

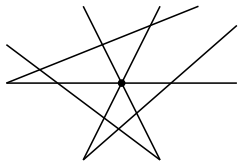
(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

分割される平面の領域の個数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，$L_n\,(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない (右図を参照せよ)。



(同一点で交わる3 本の 1 回折れ線)

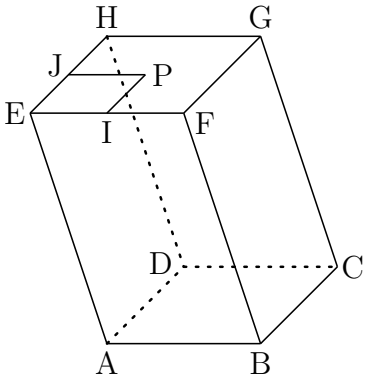
分割される平面の領域の個数を H_n で表す。H_3 を求めよ。

(3) $H_n\,(n \geqq 1)$ を求めよ。

6 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を a，x，y を用いて表せ。



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) 問 (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。

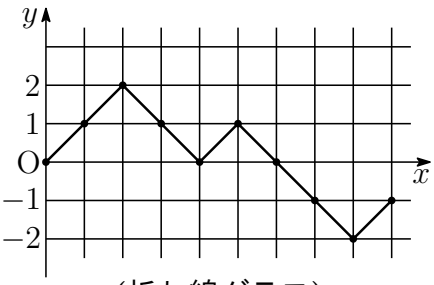
7 次の問いに答えよ。

(1) 複素数 α，β，γ，δ は $\alpha \neq \beta$，$\gamma \neq \delta$ をみたすとする。複素数平面上の 2 点 α，β を通る直線が，2 点 γ，δ を通る直線と直交するための必要十分条件は，複素数 $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ が純虚数であることを示せ。

(2) 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとり，$w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(3) 問 (2) において $w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。

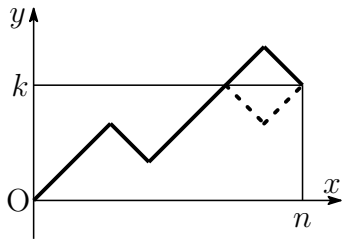
8 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。



(3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 接点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とすると，A は円 $x^2+y^2=r^2$ の周上の点であるから

$$a^2+b^2=r^2$$

A を通り，OA に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから

$$a(x-a)+b(y-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad ax+by=a^2+b^2$$

したがって，接線の方程式は　　$ax+by=r^2$

(2) $y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$
C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+1)=2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad 2tx-y-t^2+1=0$$

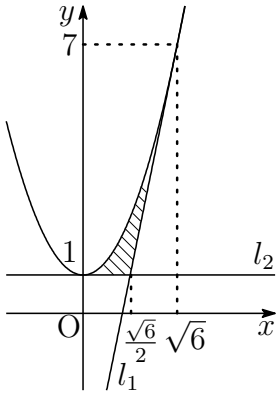
この直線が円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，原点からこの直線までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-t^2+1|}{\sqrt{(2t)^2+(-1)^2}}=1 \quad \text{これを解いて} \quad t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，求める 3 本の接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=1,\ \pm 2\sqrt{6}x-y-5=0}$$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部の面積であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{6}}\{(x^2+1)-1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot 6 \\ &= 2\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}} \end{aligned}$$

補足 2009 九州大学 (文系) 前期 $\boxed{4}$ を参照.

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(\sqrt{6}-0)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

■

2 (1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots (1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^3 - 1)f(r), \quad f(b) = (2^5 - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^3 - 1)f(r) = 2{\cdot}2^4 s, \quad (2^5 - 1)f(s) = 2{\cdot}2^2 r$$

ゆえに　$7f(r) = 2^5 s, \quad 31f(s) = 2^3 r \quad \cdots ①$

① から　$s = 7s', \quad r = 31r' \quad (s', r' \text{は自然数}) \quad \cdots ②$

② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^5 s' \cdots ③, \quad f(s) = 2^3 r' \cdots ④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$f(s) \geqq (7 + 1)s' = 8s' \qquad \cdots ⑤$$
$$f(r) \geqq (31 + 1)r' = 32r' \quad \cdots ⑥$$

③，⑥ より $s' \geqq r'$ となり，④，⑤ より $r' \geqq s'$ となるから　$r' = s'$

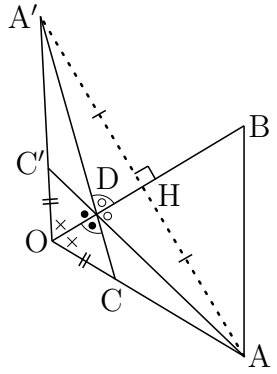
このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$r' = s' = 1$ である．

したがって，② より，$r = 31$，$s = 7$ である．

よって　$a = 2^2{\cdot}31 = \mathbf{124}, \quad b = 2^4{\cdot}7 = \mathbf{112}$ ■

3 (1) OB 上に点 P をとると



$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PC} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PC} \\ &\geqq \mathrm{AC} \end{aligned}$$

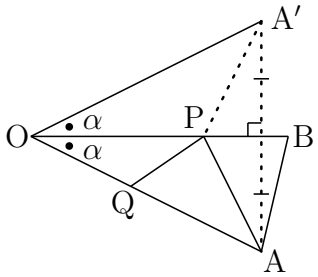
等号が成り立つのは，P を A′C と OB の交点とするときで，この点が D である．
A から OB に下ろした垂線を AH とすると

$$\angle\mathrm{AOH} = \angle\mathrm{A'OH}$$

$\triangle\mathrm{OCD} \equiv \triangle\mathrm{OC'D}$ より　$\angle\mathrm{CDO} = \angle\mathrm{C'DO}$　$\cdots$①
$\triangle\mathrm{ADH} \equiv \triangle\mathrm{A'DH}$ より　$\angle\mathrm{ADH} = \angle\mathrm{A'DH}$　$\cdots$②
OB と A′C の対頂角から　$\angle\mathrm{CDO} = \angle\mathrm{A'DH}$　$\cdots$③

①，②，③ より　$\angle\mathrm{ADH} = \angle\mathrm{C'DO}$
よって，3 点 A，D，C′ は，同一直線上にあり，線分 AC′ は D を通る．

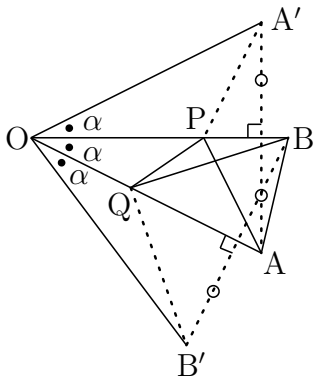
(2) 線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると



$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PQ} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ} \\ &\geqq \mathrm{A'Q} \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，P を A′Q と OB の交点とするときで，この点が F である．
さらに，A′Q が最小となるのは，Q を A′ から OA に下ろした垂線の足とするときで，この点が E である．
よって，折れ線 AFE が最小となるとき，∠AEF は直角である．

(3) 線分 OA に関して B と対称な点を B′ とし，線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると



$$\begin{aligned} \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB} &= \mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB'} \\ &\geqq \mathrm{A'B'} \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，P を A′B′ と OB の交点，Q を A′B′ と OA の交点とするときで，このとき，P が H，Q が G である．よって，折れ線 AHGB の長さは

$$\mathbf{A'B' = 2\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

■

4 (1) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ であるから

これに，$A = n\theta$，$B = (n-2)\theta$ を代入すると

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

よって　$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \quad \cdots(*)$

$\cos n\theta$ がある n 次式 $p_n(x)$ で表せることを数学的帰納法により示す．

i) $n = 1,\ 2$ のとき

$\cos\theta = x$ とすると，$\cos 2\theta = 2x^2 - 1$ であるから

$$p_1(x) = x,\quad p_2(x) = 2x^2 - 1$$

と定めると，$p_1(x)$ は 1 次式，$p_2(x)$ は 2 次式である．

ii) $n = k,\ k+1$ のとき

$\cos k\theta = p_k(\cos\theta)$，$\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(\cos\theta)$ をみたす k 次式 $p_k(x)$，$k+1$ 次式 $p_{k+1}(x)$ が存在すると仮定すると，$(*)$ により

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

したがって，$p_{k+2}(x) = 2x\,p_{k+1}(x) - p_k(x)$ と定めると，$p_{k+2}(x)$ は，$k+2$ 次式で，次式が成り立つ．

$$\cos(k+2)\theta = p_{k+2}(\cos\theta)$$

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

をみたす n 次式 $p_n(x)$ が存在する．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数であることを数学的帰納法により示す．

i) $n = 1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ は奇関数，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ は偶関数である．

ii) $n = 2k-1,\ 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ は奇関数，$p_{2k}(x)$ は偶関数であると仮定すると，(1) の結果から $p_{2k+1}(x) = 2x\,p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(-x) &= 2(-x)\,p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x) \\ &= -2x\,p_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

よって，p_{2k+1} は奇関数である．

同様に，$p_{2k+2}(x) = 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+2}(-x) &= 2(-x)\,p_{2k+1}(-x) - p_{2k}(-x) \\ &= 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x) = p_{2k+2}(x) \end{aligned}$$

よって，p_{2k+2} は偶関数である．

i)，ii) より，n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数．n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数である．

(3) n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数であるから，定数項は　0
n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数であるから，1 次の係数は　0
$p_{2m}(x)$ の定数項を a_m とし，$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数を b_m とすると

$$p_1(x) = x,\quad p_2(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{これから} \quad a_1 = -1,\quad b_1 = 1$$

$p_{n+2}(x) = 2x\,p_{n+1}(x) - p_n(x)$ に $n = 2m-1,\ 2m$ を代入すると

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(x) &= 2x\,p_{2m}(x) - p_{2m-1}(x) \\ p_{2m+2}(x) &= 2x\,p_{2m+1}(x) - p_{2m}(x) \end{aligned}$$

上式の第 2 式から　　$a_{m+1} = -a_m$　　$\cdots$①
上式の第 1 式から　　$b_{m+1} = 2a_m - b_m$　$\cdots$②

① から　　$a_m = a_1(-1)^{m-1} = -1\cdot(-1)^{m-1} = (-1)^m$

これを ② に代入すると

$$b_{m+1} = 2(-1)^m - b_m \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_{m+1}}{(-1)^{m+1}} - \frac{b_m}{(-1)^m} = -2$$

したがって　$\dfrac{b_m}{(-1)^m} = \dfrac{b_1}{(-1)^1} - 2(m-1)$　ゆえに　$b_m = -(2m-1)\cdot(-1)^m$

よって　　$p_{2m}(x)$ の定数項は　$(-1)^m$，
　　$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数は　$(2m-1)\cdot(-1)^{m-1}$

以上のことから，$p_n(x)$ の定数項 a_n および 1 次の係数 b_n は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\text{奇数}) \\ (-\mathbf{1})^{\frac{n}{2}} & (\boldsymbol{n}:\text{偶数}) \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot(-\mathbf{1})^{\frac{n-1}{2}} & (\boldsymbol{n}:\text{奇数}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\text{偶数}) \end{cases}$$

■

5 (1) $n-1$ 本の直線で分割された領域に n 本目の直線を引くことにより，新たな交点が $n-1$ 個でき，分割される領域の個数が n 個増える．したがって

$$L_1 = 2,\quad \boldsymbol{L_n = L_{n-1} + n\ \ (n \geqq 2)}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_{k+1} - L_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

ゆえに　$L_n - L_1 = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n - 1$

すなわち　$L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

$L_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)}$

(2) $H_1 = 2$ で，2 本目の 1 回折れ線を引くことで，4 個の交点ができ，分割される領域が 5 個増えるから　$H_2 = H_1 + 5 = 7$

さらに，3 本目の 1 回折れ線を引くことで，4·2 個の交点ができ，分割される領域が 4·2 + 1 個増えるから　$H_3 = H_2 + 4{\cdot}2 + 1 = \mathbf{16}$

(3) n 本の 1 回折れ線で分割された領域に $n+1$ 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4n$ 個の交点ができ，分割される領域が $4n+1$ 個増えるから

$$H_1 = 2,\quad H_{n+1} = H_n + 4n + 1$$

が成り立つ．

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$

ゆえに　$H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$

すなわち　$H_n = 2n^2 - n + 1$

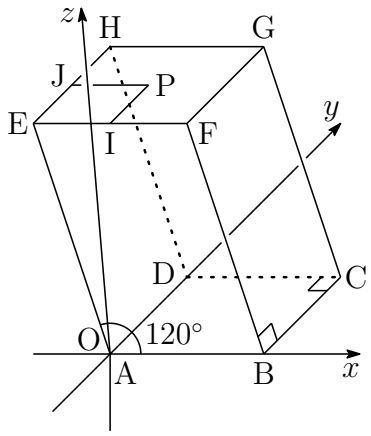
$H_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{H_n = 2n^2 - n + 1}$ ■

6 (1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とすると，$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle\mathrm{FBC}=90^\circ$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 ABFE$\perp$BC．空間内で点 A，B，D，E の座標を A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ 1,\ 0)$，E$(-a,\ 0,\ \sqrt{3}a)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-a,\ y,\ \sqrt{3}a)$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x-a)^2+y^2+3a^2,$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x-a+y$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(x-y-a)^2+6a^2}}\end{aligned}$$

補足 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_bun.pdf の解説を参照．

(3) $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より，$-1\leqq x-y\leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $0<a\leqq 1$ のとき

$x-y=a$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}a}{2}}$ をとる．

ii) $1<a$ のとき

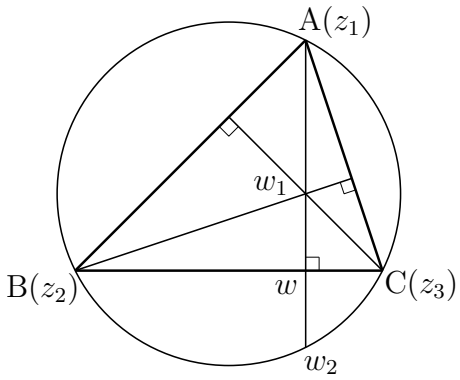
$x-y=1$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{7a^2-2a+1}}$ をとる． ■

7 (1) 2 点 α，β を通る直線が，2 点 γ，δ を通る直線と直交する条件は

$$\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\pm 90^\circ \quad \text{すなわち} \quad \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\text{は純虚数}$$

(2) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とおく．
点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$



$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線 ① 上にある．
同様にして，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．
よって，w_1 は △ABC の垂心である．

(3) 円 C の方程式は　$|z|=1$
$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$
したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の交点である．■

8 (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め -45° の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2}=\frac{n+k}{2}-k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は　${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A: T_9=3$，$B:$ すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より　${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A)=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より　$2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって　　$P(A\cap \overline{B})=\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって　　$P_A(B)=1-\dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6}=1-\dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

解説

1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め 45°，または右斜め −45° の方向に格子点をとっていく確率がともに $\frac{1}{2}$ であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 (9, 3) を結ぶ折れ線グラフの数から $\dfrac{\mathbf{28}}{\mathbf{84}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		**84**
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
	−1		1		3		10		35		126
	−2			1		4		15		56	
	−3				1		5		21		84
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	3										**28**
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	−1		1		3		10		34		117
	−2			1		4		15		55	
	−3				1		5		21		83
	−4					1		6		28	
	−5						1		7		36
	−6							1		8	
	−7								1		9
	−8									1	
	−9										1

すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$$ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} $$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる． ■