

平成 14 年度 九州大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
 文系 (文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部 (経済・経営))
 1 ~ 2 必答, 3 ~ 5 から 1 題選択, 6 ~ 8 から 1 題選択

1 次の問いに答えよ。

- (1) 原点を中心とする半径 r ($r > 0$) の円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (a, b) における接線の方程式は

$$ax + by = r^2$$

で与えられることを示せ。

- (2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $C: y = x^2 + 1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これら接線の方程式を求めよ。
- (3) 問 (2) における 3 本の接線のうち, x 軸の正の部分と交わる接線を l_1 , x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1, l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

2 正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし, 1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり, $a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので, $f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

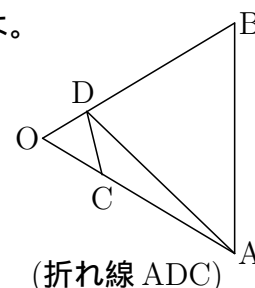
- (1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。必要ならば,
- $$1 + r + r^2 + \cdots + r^m = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$$
- を用いてよい。
- (2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのは, $q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。
- (3) $a = 2^2 r, b = 2^4 s$ (r, s は正の奇数) の形をした偶数 a, b を考える。

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたま a, b を求めよ。

3 $\triangle AOB$ は $OA = OB = 1$ なる二等辺三角形とする。 $\alpha = \angle AOB$ とし、線分 OB に関して A と対称な点を A' とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha < 90^\circ$ とする。右図のように線分 OA 上に点 C をとる。点 C を固定し、線分 OB 上に点 D を折れ線 ADC の長さが最小となるようにとる。線分 OA' 上に $OC' = OC$ をみたす点 C' をとれば、線分 AC' は点 D を通ることを示せ。



- (2) $\alpha < 45^\circ$ とする。線分 OA 上に点 E を、線分 OB 上に点 F を折れ線 AFE の長さが最小となるようにとる。このとき $\angle AEF$ は直角となることを示せ。
- (3) $\alpha < 60^\circ$ とする。線分 OA 上に点 G を、線分 OB 上に点 H を折れ線 $AHGB$ の長さが最小となるようにとる。このとき、折れ線 $AHGB$ の長さを α を用いて表せ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

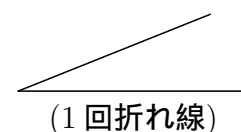
が成り立つことを示せ。また、ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos \theta)$$

と表されることを示せ。

- (2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数、奇数ならば奇関数になることを示せ。
- (3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また、 $p_n(x)$ の1次の項の係数を求めよ。

- 5 n を正の整数とする。平面を n 本の直線, または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし, 1 回折れ線とは, 右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



- (1) 平面が次の条件 (i), (ii) をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば, どの 2 本の直線も交わる。

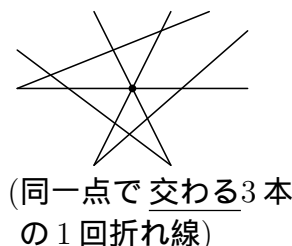
(ii) n が 3 以上ならば, どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

分割される平面の領域の個数を L_n で表す。 $n \geq 2$ のとき, L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また, $L_n (n \geq 1)$ を求めよ。

- (2) 平面が次の条件 (i), (ii) をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば, どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii) n が 3 以上ならば, どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない (右図を参照せよ)。



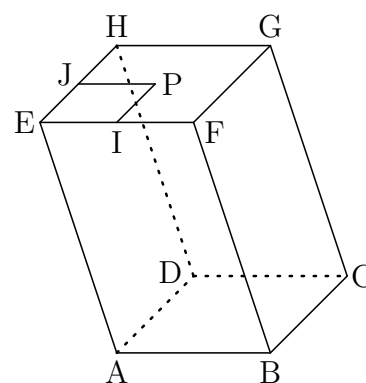
分割される平面の領域の個数を H_n で表す。 H_3 を求めよ。

- (3) $H_n (n \geq 1)$ を求めよ。

- 6 空間内の図形について次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ に等しいことを示せ。ここで, $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ はベクトル \vec{AB} とベクトル \vec{AC} との内積を表す。必要ならば, 二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

- (2) a を正の定数とし, 右図の平行六面体 $ABCD-EFGH$ を考える。 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 1$, $|\vec{AE}| = 2a$ とし, $\angle FBC = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle EAB = 120^\circ$ とする。面 $EFGH$ 上に点 P をとり, 点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし, 点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。 $x = |\vec{EI}|$, $y = |\vec{EJ}|$ とするとき, $\triangle ACP$ の面積を a, x, y を用いて表せ。



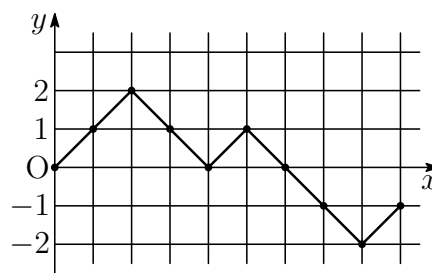
(平行六面体 $ABCD-EFGH$)

- (3) 問 (2) で点 P が面 $EFGH$ 上を動くとき, $\triangle ACP$ の面積の最小値を求めよ。

7 次の問いに答えよ。

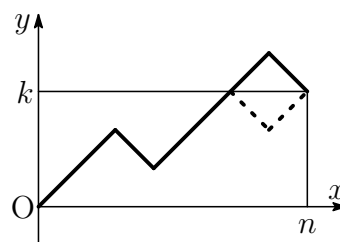
- (1) 複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は $\alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta$ をみたすとする。複素数平面上の 2 点 α, β を通る直線が、2 点 γ, δ を通る直線と直交するための必要十分条件は、複素数 $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta}$ が純虚数であることを示せ。
- (2) 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 をとり、 $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の垂心とは、各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり、これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。
- (3) 問 (2) において $w_2 = -\bar{z}_1 z_2 z_3$ とおく。 $w_2 \neq z_1$ のとき、2 点 z_2, z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで \bar{z}_1 は z_1 に共役な複素数である。

8 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき、その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし、この点から右斜め 45° 、または右斜め -45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点を取り、この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点を取り、第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し、こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフということにする。右図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

- (1) n は正の整数、 k は $0 \leq k \leq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また、この必要十分条件がみたされているとき、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。
- (2) n は 2 以上の整数、 k は $0 \leq k \leq n-2$ なる整数で、 $n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は、原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。
- (3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において、表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i, T_i), i = 0, 1, 2, \dots, 9$, を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし、 $T_0 = 0$ とする。 $T_9 = 3$ が起きたとき、どの $T_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。



解答例

- 1 (1) 接点を $A(a, b)$ とすると, A は円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上の点であるから

$$a^2 + b^2 = r^2$$

A を通り, OA に垂直な直線上の任意の点を $P(x, y)$ とすると
 $\vec{OA} \perp \vec{AP}$ より, $\vec{OA} \cdot \vec{AP} = 0$ であるから

$$a(x - a) + b(y - b) = 0 \quad \text{すなわち} \quad ax + by = a^2 + b^2$$

したがって, 接線の方程式は $ax + by = r^2$

- (2) $y = x^2 + 1$ を微分すると $y' = 2x$

C 上の点 $(t, t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + 1) = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad 2tx - y - t^2 + 1 = 0$$

この直線が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するとき, 原点からこの直線までの距離が
 1 であるから

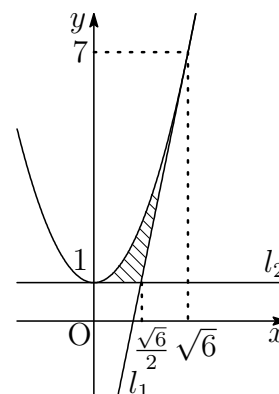
$$\frac{|-t^2 + 1|}{\sqrt{(2t)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad t = 0, \pm\sqrt{6}$$

よって, 求める 3 本の接線の方程式は

$$y = 1, \pm 2\sqrt{6}x - y - 5 = 0$$

- (3) 求める面積 S は, 右の図の斜線部の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{6}} \{(x^2 + 1) - 1\} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 6 \\ &= 2\sqrt{6} - \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$



補足 2009 九州大学 (文系) 前期 4 を参照.

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} (\sqrt{6} - 0)^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

- 2 (1) 正の奇数 b を, 3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{i_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{i_2}) \\ &\quad \cdots (1 + p_n + p_n^2 + \cdots + p_n^{i_n}) \\ &= \frac{p_1^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_n^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より, $a = 2^m p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$ であるから, 上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{p_1^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_n^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

- (2) $p \geq 2$ より, a は少なくとも pq, q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは, a の約数が pq, q の 2 個, すなわち, pq は素数, $q = 1$ のときである. よって, 等号は p が素数, $q = 1$ のときに限り成り立つ.

- (3) $a = 2^2 r, b = 2^4 s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^3 - 1)f(r), \quad f(b) = (2^5 - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b, f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^3 - 1)f(r) = 2 \cdot 2^4 s, \quad (2^5 - 1)f(s) = 2 \cdot 2^2 r$$

ゆえに $7f(r) = 2^5 s, \quad 31f(s) = 2^3 r \quad \cdots \textcircled{1}$

① から $s = 7s', \quad r = 31r' \quad (s', r' \text{ は自然数}) \quad \cdots \textcircled{2}$

② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^5 s' \cdots \textcircled{3}, \quad f(s) = 2^3 r' \cdots \textcircled{4}$$

② を (2) の結果に適用すると

$$f(s) \geq (7 + 1)s' = 8s' \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$f(r) \geq (31 + 1)r' = 32r' \quad \cdots \textcircled{6}$$

③, ⑥ より $s' \geq r'$ となり, ④, ⑤ より $r' \geq s'$ となるから $r' = s'$ のとき, ⑤, ⑥ において等号が成り立つ.

ゆえに, (2) の結論から, $r' = s' = 1$ である.

したがって, ② より, $r = 31, s = 7$ である.

よって $a = 2^2 \cdot 31 = 124, \quad b = 2^4 \cdot 7 = 112$

3 (1) OB 上に点 P をとると

$$\begin{aligned} AP + PC &= A'P + PC \\ &\geq AC \end{aligned}$$

等号が成り立つのは, P を A'C と OB の交点
とするときで, この点が D である.

A から OB に下ろした垂線を AH とすると

$$\angle AOH = \angle A'OH$$

$$\triangle OCD \equiv \triangle OC'D \text{ より } \angle CDO = \angle C'DO \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ADH \equiv \triangle A'DH \text{ より } \angle ADH = \angle A'DH \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{OB と A'C の対頂角から } \angle CDO = \angle A'DH \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } \angle ADH = \angle C'DO$$

よって, 3点 A, D, C' は, 同一直線上にあり, 線分 AC' は D を通る.

(2) 線分 OB 上に P, 線分 OA 上に Q をとると

$$\begin{aligned} AP + PQ &= A'P + PQ \\ &\geq A'Q \end{aligned}$$

等号が成り立つのは, P を A'Q と OB の交点
とするときで, この点が F である.

さらに, A'Q が最小となるのは, Q を A' から OA に下ろした垂線の足と
するときで, この点が E である.

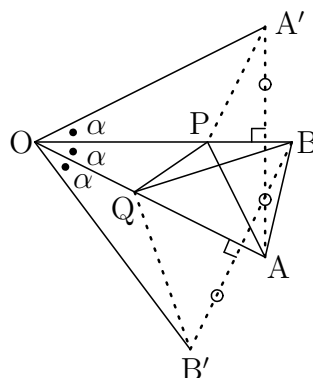
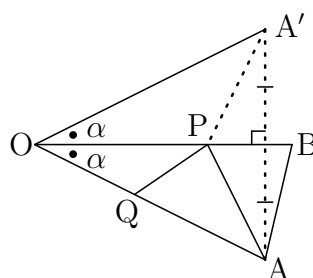
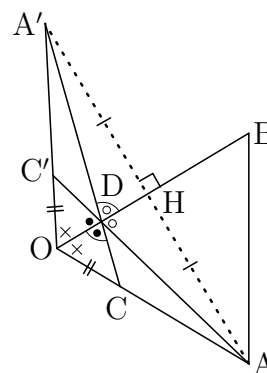
よって, 折れ線 AFE が最小となるとき, $\angle AEF$ は直角である.

(3) 線分 OA に関して B と対称な点を B' とし, 線
分 OB 上に P, 線分 OA 上に Q をとると

$$\begin{aligned} AP + PQ + QB &= A'P + PQ + QB' \\ &\geq A'B' \end{aligned}$$

等号が成り立つのは, P を A'B' と OB の交点,
Q を A'B' と OA の交点とするときで, こ
のとき, P が H, Q が G である. よって, 折
れ線 AHGB の長さは

$$A'B' = 2 \sin \frac{3\alpha}{2}$$



- 4 (1) $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ であるから
これに, $A = n\theta$, $B = (n-2)\theta$ を代入すると

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos(n-1)\theta \cos \theta$$

よって $\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \quad \dots (*)$

$\cos n\theta$ がある n 次式 $p_n(x)$ で表せることを数学的帰納法により示す.

- i) $n = 1, 2$ のとき

$$\cos \theta = x \text{ とすると, } \cos 2\theta = 2x^2 - 1 \text{ であるから}$$

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = 2x^2 - 1$$

と定めると, $p_1(x)$ は 1 次式, $p_2(x)$ は 2 次式である.

- ii) $n = k, k+1$ のとき

$\cos k\theta = p_k(\cos \theta)$, $\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(\cos \theta)$ をみたす k 次式 $p_k(x)$,
 $k+1$ 次式 $p_{k+1}(x)$ が存在すると仮定すると, (*) により

$$\cos(k+2)\theta = 2 \cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

したがって, $p_{k+2}(x) = 2x p_{k+1}(x) - p_k(x)$ と定めると, $p_{k+2}(x)$ は,
 $k+2$ 次式で, 次式が成り立つ.

$$\cos(k+2)\theta = p_{k+2}(\cos \theta)$$

- i), ii) より, すべての自然数 n に対して

$$\cos n\theta = p_n(\cos \theta)$$

をみたす n 次式 $p_n(x)$ が存在する.

- (2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数であることを数学的帰納法により示す.

- i) $n = 1, 2$ のとき

$$p_1(x) = x \text{ は奇関数, } p_2(x) = 2x^2 - 1 \text{ は偶関数である.}$$

- ii) $n = 2k-1, 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ は奇関数, $p_{2k}(x)$ は偶関数であると仮定すると, (1) の結果
から $p_{2k+1}(x) = 2x p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(-x) &= 2(-x) p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x) \\ &= -2x p_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

よって, p_{2k+1} は奇関数である.

同様に, $p_{2k+2}(x) = 2x p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+2}(-x) &= 2(-x) p_{2k+1}(-x) - p_{2k}(-x) \\ &= 2x p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x) = p_{2k+2}(x) \end{aligned}$$

よって, p_{2k+2} は偶関数である.

i), ii) より, n が奇数ならば, $p_n(x)$ は奇関数. n が偶数ならば, $p_n(x)$ は偶関数である.

- (3) n が奇数ならば, $p_n(x)$ は奇関数であるから, 定数項は 0
 n が偶数ならば, $p_n(x)$ は偶関数であるから, 1 次の係数は 0
 $p_{2m}(x)$ の定数項を a_m とし, $p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数を b_m とすると

$$p_1(x) = x, \quad p_2(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{これから} \quad a_1 = -1, \quad b_1 = 1$$

$p_{n+2}(x) = 2x p_{n+1}(x) - p_n(x)$ に $n = 2m - 1, 2m$ を代入すると

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(x) &= 2x p_{2m}(x) - p_{2m-1}(x) \\ p_{2m+2}(x) &= 2x p_{2m+1}(x) - p_{2m}(x) \end{aligned}$$

$$\text{上式の第 2 式から} \quad a_{m+1} = -a_m \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{上式の第 1 式から} \quad b_{m+1} = 2a_m - b_m \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad a_m = a_1(-1)^{m-1} = -1 \cdot (-1)^{m-1} = (-1)^m$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$b_{m+1} = 2(-1)^m - b_m \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_{m+1}}{(-1)^{m+1}} - \frac{b_m}{(-1)^m} = -2$$

$$\text{したがって} \quad \frac{b_m}{(-1)^m} = \frac{b_1}{(-1)^1} - 2(m-1) \quad \text{ゆえに} \quad b_m = -(2m-1) \cdot (-1)^m$$

よって $p_{2m}(x)$ の定数項は $(-1)^m$,

$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数は $(2m-1) \cdot (-1)^{m-1}$

以上のことから, $p_n(x)$ の定数項 a_n および 1 次の係数 b_n は

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n : \text{奇数}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & (n : \text{偶数}) \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} n \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n : \text{奇数}) \\ 0 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

- 5 (1) $n - 1$ 本の直線で分割された領域に n 本目の直線を引くことにより, 新たな交点が $n - 1$ 個でき, 分割される領域の個数が n 個増える. したがって

$$L_1 = 2, \quad L_n = L_{n-1} + n \quad (n \geq 2)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (L_{k+1} - L_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1)$$

$$\text{ゆえに} \quad L_n - L_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$$

$$\text{すなわち} \quad L_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

$L_1 = 2$ であるから, 上式は $n = 1$ のときも成り立つ.

$$\text{したがって} \quad L_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

- (2) $H_1 = 2$ で, 2本目の1回折れ線を引くことで, 4個の交点ができ, 分割される領域が5個増えるから $H_2 = H_1 + 5 = 7$

さらに, 3本目の1回折れ線を引くことで, 4・2個の交点ができ, 分割される領域が4・2 + 1個増えるから $H_3 = H_2 + 4 \cdot 2 + 1 = 16$

- (3) n 本の1回折れ線で分割された領域に $n + 1$ 本目の1回折れ線を引くことで, $4n$ 個の交点ができ, 分割される領域が $4n + 1$ 個増えるから

$$H_1 = 2, \quad H_{n+1} = H_n + 4n + 1$$

が成り立つ.

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 1)$$

$$\text{ゆえに} \quad H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$$

$$\text{すなわち} \quad H_n = 2n^2 - n + 1$$

$H_1 = 2$ であるから, 上式は $n = 1$ のときも成り立つ.

$$\text{したがって} \quad H_n = 2n^2 - n + 1$$

6 (1) $\angle BAC = \theta$ とすると, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (|\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle BCD = 90^\circ$ より, 四角形 ABCD は正方形であり, $\angle FBC = 90^\circ$ より, 四角形 FBCD は長方形である. したがって, 面 ABFE \perp BC. 空間内で点 A, B, D, E の座標を $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(-a, 0, \sqrt{3}a)$ とすると

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= (1, 1, 0) \\ \vec{AP} &= (x - a, y, \sqrt{3}a)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\vec{AC}|^2 &= 2, \quad |\vec{AP}|^2 = (x - a)^2 + y^2 + 3a^2, \\ \vec{AC} \cdot \vec{AP} &= x - a + y \text{ であるから}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle ACP &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AC}|^2 |\vec{AP}|^2 - (\vec{AC} \cdot \vec{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(x - y - a)^2 + 6a^2}\end{aligned}$$

補足 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_bun.pdf の解説を参照.

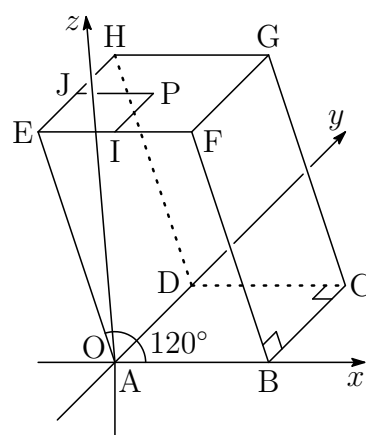
(3) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ より, $-1 \leq x - y \leq 1$ であるから, (2) の結果から

i) $0 < a \leq 1$ のとき

$x - y = a$ で $\triangle ACP$ は, 最小値 $\frac{\sqrt{6}a}{2}$ をとる.

ii) $1 < a$ のとき

$x - y = 1$ で $\triangle ACP$ は, 最小値 $\frac{1}{2} \sqrt{7a^2 - 2a + 1}$ をとる.



- 7 (1) 2点 α, β を通る直線が, 2点 γ, δ を通る直線と直交する条件は

$$\arg \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta} = \pm 90^\circ \quad \text{すなわち} \quad \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta} \text{ は純虚数}$$

- (2) $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ とおく.
 点 A を通り, BC に垂直な直線上の点 z について, $\frac{z - z_1}{z_3 - z_2}$ は純虚数であるから, その直線の方程式は

$$\frac{z - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_3 - z_2} \right)} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$w_1 = z_1 + z_2 + z_3, |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ であることから, 次式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{w_1 - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{w_1 - z_1}{z_3 - z_2} \right)} &= \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} \right)} \\ &= \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} + \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \\ &= \frac{z_2 + z_3}{z_3 - z_2} + \frac{1}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} = 0 \end{aligned}$$

したがって, w_1 は直線 $\textcircled{1}$ 上にある.

同様にして, w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線上の点, および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる. よって, w_1 は $\triangle ABC$ の垂心である.

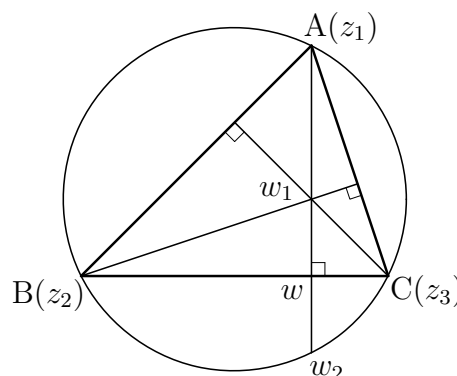
- (3) 円 C の方程式は $|z| = 1$

$$w_2 = -\bar{z}_1 z_2 z_3 \text{ より, } |w_2| = |\bar{z}_1| |z_2| |z_3| = 1$$

したがって, w_2 は円 C 上の点である. また, 次式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_2} \right)} &= \frac{-\bar{z}_1 z_2 z_3 - z_1}{z_3 - z_2} + \frac{-z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \\ &= \frac{-\bar{z}_1 z_2 z_3 - z_1}{z_3 - z_2} + \frac{-z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{1}{z_3} - \bar{z}_1}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} = 0 \end{aligned}$$

よって, w_2 は, 直線 $\textcircled{1}$ と円 C の交点である.



- 8 (1) 原点 O から格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するとき、右斜め 45° の方向に $\frac{n+k}{2}$ 回、右斜め -45° の方向に $\frac{n-k}{2}$ 回進む。

$$\frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} - k$$

であるから、 $\frac{n+k}{2}$ が整数であればよい。したがって $n+k$ は偶数である。逆に $n+k$ が偶数、すなわち $n+k = 2m$ をみたす整数 m が存在するとき、折れ線グラフは、右斜め 45° の方向に m 回、右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む。

また、原点 O から格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n C_{\frac{n+k}{2}}$

- (2) 原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで、最初に直線 $y = k$ と交わる格子点を $A(a, k)$ とする ($0 \leq a \leq n-2$)。 A と格子点 $(n-1, k+1)$ を通る折れ線グラフの数、 A と格子点 $(n-1, k-1)$ を通る数は、直線 $y = k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく。また、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで、格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも1つを通る数はそれらの和で

$$N + N = 2N$$

である。したがって、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで、格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも1つを通る数は、原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を通る折れ線グラフの数の2倍に等しい。

- (3) 2つの事象 A, B を $A: T_9 = 3, B: \text{すべての } i(i = 1, 2, \dots, 7) \text{ で } T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9, 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は、(1)の結果より ${}_9 C_6$ (本)

したがって $P(A) = \frac{{}_9 C_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9, 3)$ を結ぶ折れ線グラフで、少なくとも $(1, 3), (2, 3), \dots, (7, 3)$ を通る数は、(2)の結果から、 O と $(8, 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍であるから、(1)の結果より $2 \times {}_8 C_6$ (本)

したがって $P(A \cap \bar{B}) = \frac{2 \times {}_8 C_6}{2^9}$

よって $P_A(B) = 1 - \frac{2 \times {}_8 C_6}{{}_9 C_6} = 1 - \frac{2 \times 8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3}$

解説

1次元ランダム・ウォーク (Random walk) [離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め 45° , または右斜め -45° の方向に格子点をとっていく確率がともに $\frac{1}{2}$ であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての $i (i = 1, 2, \dots, 7)$ で $T_i \neq 3$ である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 $(9, 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数から $\frac{28}{84} = \frac{1}{3}$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		84
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
-1		1		3		10		35		126	
-2			1		4		15		56		
-3				1		5		21		84	
-4					1		6		28		
-5						1		7		36	
-6							1		8		
-7								1		9	
-8									1		
-9										1	

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	3										28
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	-1		1		3		10		34		117
	-2			1		4		15		55	
	-3				1		5		21		83
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
-7								1		9	
-8									1		
-9										1	

すべての $i (i = 1, 2, \dots, 7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n C_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから， n のときはじめて k になるグラフの数は

$${}_n C_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1} C_{\frac{n+k}{2}} = {}_n C_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_n C_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_n C_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの本数の $\frac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\frac{k}{n}$ となる．