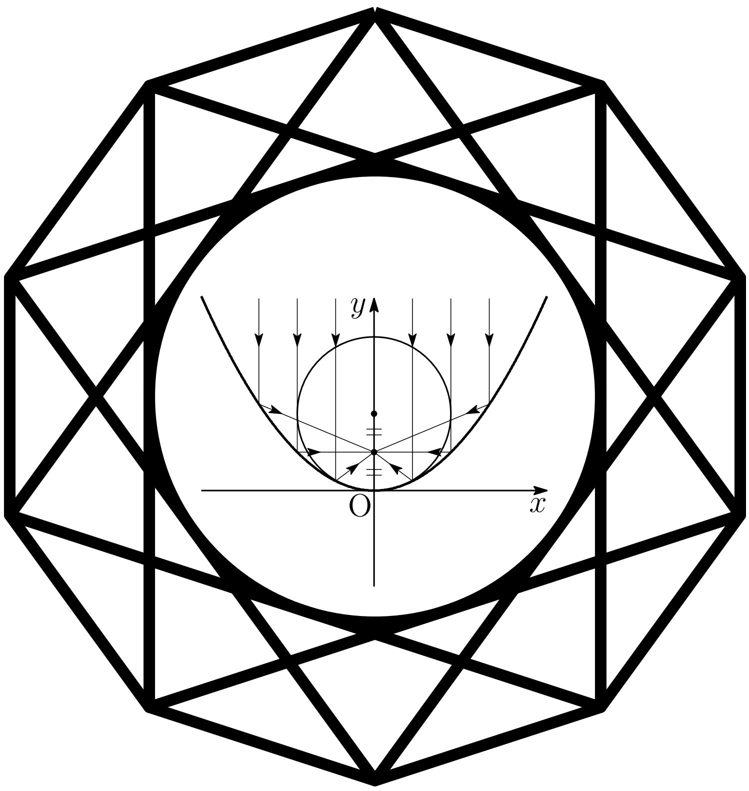
入試の軌跡

九州大学　文系

2001 − 2010

数　学



2025 年 4 月 3 日

Typed by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

序

本書には，九州大学 (文系) が実施した平成 13 年 (2001 年) 度から平成 22 年 (2010 年) 度までの一般前期試験問題 (数学) および解答例をすべて掲載した．

本書の作成にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．

2. ICT 教材として，電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており，この機能を利用する際には，全画面表示 ($\boxed{\text{Ctrl}}$+L) および描画領域に合わせる ($\boxed{\text{Ctrl}}$+3) と見やすくなる．ページスクロールには，($\boxed{\text{Ctrl}}$+▲，$\boxed{\text{Ctrl}}$+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る ($\boxed{\text{Alt}}$+◀)，進む ($\boxed{\text{Alt}}$+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには $\boxed{\text{ESC}}$．

3. スマートフォンでの使用も想定し，ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある．問題および解答には相互リンクを施した．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各大学の出題分野に戻る．また，出題分野の左上にある ◀ をクリックすると，最初のページに戻る．

上の 2，3 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和 3 年 9 月　西村　信一

目 次

第 10 章　九州大学

出題分野 (2001-2010) 120 分

◀	九州大学	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
I	数と式							1			
	2 次関数										
	図形と計量							4		1	1
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式	6*	7*	7*	2*	2*					
	図形と方程式			2							
	三角関数					3	4		1		3
	指数関数と対数関数					3					
	微分法と積分法	1·2	1	1·3	1	1	1		2	4	3
A	場合の数と確率	7	8		4	4		3		3	2
	整数の性質	4	2								
	図形の性質	5	3								
B	平面上のベクトル				3				3	2	
	空間のベクトル		6	6			3	2			
	数列	3	4·5	4			2		4		4
	確率分布と統計										
	コンピュータ	8		5							

数字は問題番号 (∗ は複素数平面)

10.1　2001年(120分)

出題分野 1 2 必答，3 4 5 より1題選択，6 7 8 より1題選択

1 関数 $f(x) = \dfrac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a = 0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

2 3次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与える。$a_1, \ldots, a_n$ の積を P_n とおく。

(1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。

(2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。

(3) $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ とおく。S_1，S_2，S_3，S_4 を求めよ。

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

4 (1) 自然数 a，b が互いに素であるとはどういうことか。

(2) 自然数 a，b が互いに素であるなら a^2，b^2 は互いに素であることを示せ。

(3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし，有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。

5 r を 1 より小さい正の定数とする。平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ B，C，D とする。BD を直径とする円を描き，A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする。m 上の点で A からの距離が $1-r$，1，$1+r$ となるものをそれぞれ E，F，G とする。E，F を通り l に接する円を描きその接点を P とする。また F，G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする。

(1) A と P との間の距離 AP を r で表せ。

(2) CF を r で表せ。

(3) PQ $=$ CF を示せ。

6 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ をみたすとき

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

をみたす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

7 サイコロを n 回振って，出た目を小さい方から順に並べ，第 i 番目を X_i $(i=1,\cdots,n)$ とする。

(1) $n=7$ のとき，3 の目が 3 回，5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 一般の n に対して，$X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。

(3) 一般の n に対して，X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。

(4) 一般の n に対して，期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

8 m，n を自然数とする。次の算法を考える。

(a) $i=m$，$j=n$，$k=0$.

(b) $i=1$ ならば $\mathrm{Ans}=k+j$ として終了する.

(c) i の値が奇数なら $k=k+j$ とする.

(d) $i=[i/2]$.　(e) $j=2*j$.　(f) (b) にもどる.

(ここで，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

(1) $m=100$ のとき，3 周目と 4 週目の (b) における i，j，k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i=100$，$j=n$，$k=0$ である。

(2) 一般の m に対して，(b) における i，j，k の値について $i*j+k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。

(3) 一般の m に対して，Ans を求めよ。

解答例

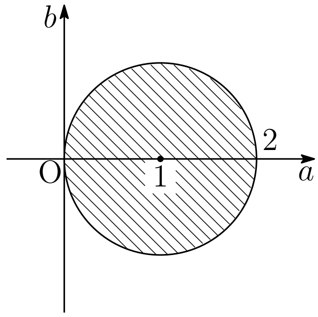
$\boxed{1}$ (1) $f(x)$ を微分すると，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1 \quad \cdots(*)$

$a\neq 0$ のとき，すべての自然数 x に対して，$f'(x)\geqq 0$ となるための条件は

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$2a>0,\ \ D\leqq 0$

$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)=a^2+b^2-2a\cdots$① により

$$a>0,\ (a-1)^2+b^2\leqq 1$$



$a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$ となる．

これがつねに増加するためには　$b=0$

すなわち $f(x)=x$ となり，条件を満たす．

よって　$a>0$ のとき　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

　　　　$a=0$ のとき　$b=0$

したがって　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

これを ab 平面上に図示すると，右の図のような円 $(a-1)^2+b^2=1$ の内部で，境界線を含む．

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=bx^2+(b+1)x$

$b\geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=2bx+b+1$

$b>0$ のとき，$f'(-1)\geqq 0$ であることが条件であるから

$$b>0,\ \ 2b(-1)+b+1\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<b\leqq 1$$

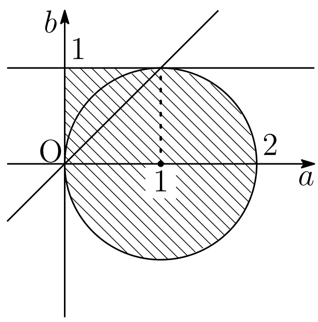
$b=0$ のとき　$f(x)=x$ となり，これは条件を満たす．

よって　$\boldsymbol{0\leqq b\leqq 1}$

(3) $a\geqq 0$ は，$x>-1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である．

$a=0$ の場合が (2) であり，$a>0$，$D\leqq 0$ の場合が (1) である．

したがって，$a>0$，$D>0$ の場合を求める．



$(*)$ より

$$f'(x)=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{a^2+b^2-2a}{2a}$$

ゆえに　$-\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1$，$f'(-1)=-b+1\geqq 0$

$D>0$ であるから，① より　$a^2+b^2-2a>0$

これを解いて　$a>0$，$b\geqq a$，$b\leqq 1$，$(a-1)^2+b^2>1$

求める領域は，右の図のように (1)，(2) の結果および上式をまとめた領域で，境界線を含む．■

2 (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$\dfrac{x+X}{2}=p,\ \dfrac{y+Y}{2}=q$

よって，求める点の座標は　$\boldsymbol{(2p-X,\ 2q-Y)}$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\\&=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

が成り立つ．G の点 $(-\frac{a}{3},\ f(-\frac{a}{3}))$ に関して $y=f(x)$ と対称なグラフは

$$2f\left(-\frac{a}{3}\right)-y=f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)$$

ゆえに　$y=2f\left(-\dfrac{a}{3}\right)-f\left(-\dfrac{2a}{3}-x\right)\quad\cdots②$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned}y&=2f\left(-\frac{a}{3}\right)-\left\{\left(-\frac{2a}{3}-x+\frac{a}{3}\right)^3\right.\\&\qquad\left.+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(-\frac{2a}{3}-x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)\right\}\\&=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)\quad\cdots②'\end{aligned}$$

①，②′ は一致するから，G は点 $(-\frac{a}{3},\ f(-\frac{a}{3}))$ に関して対称である．

(3) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$\dfrac{x+X}{2}=p,\ Y=y$

よって，求める点の座標は　$\boldsymbol{(2p-X,\ Y)}$

(4) G が y 軸に平行なある直線 l に関して対称であるとき，G と l の交点を P とする．P における G の接線の傾きが 0 でないと仮定すると，G は l に関して対称であるから，G は P において自己交差し，G が 3 次関数であることに反する．したがって，G は P において $f'(x)=0$ となる．G 上に $f'(x)=0$ となる P 以外の点 P′ が存在すると仮定すると，l に関して P′ と対称な点 P″ が存在することになり，G 上に $f'(x)=0$ となる点が 3 点存在することになる．このことは G が 3 次関数であることに反する．したがって，$f'(x)=0$ となる点は P に限り，G は単調増加の関数である．G 上に P と異なる点 Q をとり，l に関して Q と対称な点 Q′ が存在する．このとき，3 点 Q，P，Q′ を結ぶ曲線部分は単調増加ではないので，矛盾を生じる．よって，題意は成立する．■

3 (1) $a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1 \cdots ①$ より

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} \geqq a_n$$

$a_1 = 2$ であるから，すべての自然数 n に対して　$a_n \geqq 2 \cdots ②$
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n > 0$

(2) ① から　$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) \quad \cdots ③$

②，③ から，$\dfrac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_n$ が成り立つから

$$\frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} = a_1,\ \frac{a_3 - 1}{a_2 - 1} = a_2,\ \cdots,\ \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_n$$

これらの式の辺々を掛けて

$$\frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \times \frac{a_3 - 1}{a_2 - 1} \times \cdots \times \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_1 - 1} = P_n$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_{n+1} = P_n + 1$ が成り立つ．

(3) $a_1 = 2$，$a_2 = {a_1}^2 - a_1 + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$
$a_3 = {a_2}^2 - a_2 + 1 = 3^2 - 3 + 1 = 7$
$a_4 = {a_3}^2 - a_3 + 1 = 7^2 - 7 + 1 = 43$

$$S_1 = \frac{1}{a_1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{41}{42}}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{a_4} = \frac{41}{42} + \frac{1}{43} = \mathbf{\frac{1805}{1806}}$$

(4) ②，③ より　$\dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_n}$

(2) の結果から　$\dfrac{1}{P_n} = \dfrac{1}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}$　ゆえに　$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{P_{n-1}} - \dfrac{1}{P_n}$

したがって　$\dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{P_1} - \dfrac{1}{P_n}$

上式の両辺に $\dfrac{1}{a_1}$ を加えると

$$S_n = \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{2} = \mathbf{1 - \frac{1}{P_n}}$$

■

4 (1) a，b は 1 以外に共通の約数をもたないことである．

(2) a，b を素因数分解して

$$a = {a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_k}^{m_k}, \quad b = {b_1}^{n_1}{b_2}^{n_2}\cdots{b_l}^{n_l}$$

とする．a，b が互いに素であるならば，$a_1, a_2, \cdots a_k$ と $b_1, b_2, \cdots b_k$ のどの 2 つも一致しない．上式から

$$a^2 = ({a_1}^{m_1}{a_2}^{m_2}\cdots{a_k}^{m_k})^2, \quad b^2 = ({b_1}^{n_1}{b_2}^{n_2}\cdots{b_l}^{n_l})^2$$

このとき，a^2 は $b_1, b_2, \cdots b_k$ で割れない．また，b^2 も $a_1, a_2, \cdots a_k$ で割れない．よって，a^2 と b^2 は互いに素である．

(3) $\sqrt{n}$ が有理数であるとき $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ $(p, q$ は互いに素)

したがって $n = \dfrac{p^2}{q^2}$

上式おいて，左辺は自然数であり，p，q は互いに素であるから

$$q^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad q = 1，\sqrt{n} = p$$

よって，$\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数である．

(4) $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であるから，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の中に有理数が 2 個以上あれば，それらの差で整数になるものがある．

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}+1} < 1$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < 1$$

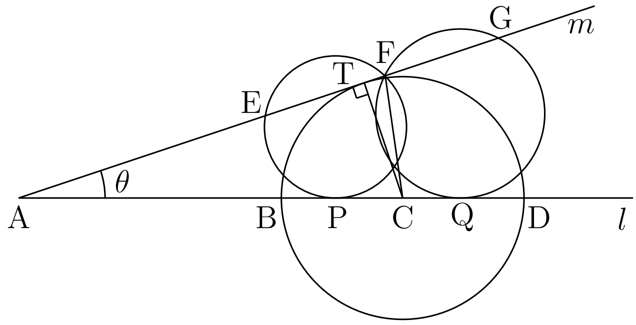
上の 3 式より，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち 2 個以上が有理数となることはない．したがって，有理数は 1 個以下である．

よって，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 個が無理数である． ■

$\boxed{5}$ (1) 方べきの定理により

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AE}{\cdot}\mathrm{AF} = (1-r){\cdot}1 = 1-r$$

よって　　$\mathbf{AP} = \boldsymbol{\sqrt{1-r}}$



(2) $\theta = \angle\mathrm{FAC}$ とおいて，$\triangle\mathrm{FAC}$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CF}^2 = 1^2 + 1^2 - 2{\cdot}1{\cdot}1\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CF} = \sqrt{2-2\cos\theta}$$

$\mathrm{CT} = \mathrm{AC}\sin\theta$ より

$$r = 1{\cdot}\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-r^2}$$

よって　　$\mathbf{CF} = \boldsymbol{\sqrt{2-2\sqrt{1-r^2}}}$

(3) 方べきの定理により

$$\mathrm{AQ}^2 = \mathrm{AF}{\cdot}\mathrm{AG} = 1{\cdot}(1+r) = 1+r \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AQ} = \sqrt{1+r}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ} &= \mathrm{AQ} - \mathrm{AP} = \sqrt{1+r} - \sqrt{1-r} \\
\mathrm{PQ}^2 &= (\sqrt{1+r} - \sqrt{1-r})^2 \\
&= (1+r) - 2\sqrt{1+r}\sqrt{1-r} + (1-r) \\
&= 2 - 2\sqrt{1-r^2}
\end{aligned}$$

したがって　　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2-2\sqrt{1-r^2}}$

よって，上式および (2) の結果から　　PQ=CF　■

$\boxed{6}$ (1) $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ (a，c は実数) より

$$a^2z\overline{z}+a(\overline{b}z+b\overline{z})+b\overline{b}=b\overline{b}-ac$$

ゆえに　$(az+b)(a\overline{z}+\overline{b})=|b|^2-ac$

したがって　$|az+b|^2=|b|^2-ac$

$|b|^2-ac>0$ より　$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，z は**中心 $\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}}$ の円を描く．**

(2) $dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ より

$$i(d-\overline{d})z\overline{z}+idz-i\overline{d}\,\overline{z}=0$$

i) $d\neq\overline{d}$ のとき (d は虚数)

$$a=i(d-\overline{d}),\quad b=-i\overline{d}\quad\cdots①$$

とおくと

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}=0$$

a は実数であり，① と $c=0$ を (1) の結果に代入すると

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-i\overline{d}}{i(d-\overline{d})}=\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}=\frac{|b|}{|a|}=\frac{|-i\overline{d}|}{|i(d-\overline{d})|}=\frac{|d|}{|d-\overline{d}|}$$

よって，z は**中心 $\boldsymbol{\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{|d|}{|d-\overline{d}|}}$ の円を描く．**

ii) $d=\overline{d}$ のとき (d は実数)

$d=\overline{d}\neq0$ より　$z(\overline{z}+1)=\overline{z}(z+1)$

したがって　$z=\overline{z}$　ゆえに，z は実数である．

よって，z は**実軸上の直線を描く．** ■

7 (1) 次の 6 通りに分類できる．

$$\begin{array}{ll} X_1\,X_2\,3\,3\,3\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\ X_1\,3\,3\,3\,X_5\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\ X_1\,3\,3\,3\,5\,5\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 3 \\ 3\,3\,3\,X_4\,X_5\,5\,5 \text{ のとき} & X_4 = 3, 4, 5 \\ 3\,3\,3\,X_4\,5\,5\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 3, 4, 5 \\ 3\,3\,3\,5\,5\,X_6\,X_7 \text{ のとき} & X_4 = 5 \end{array}$$

よって，X_4 のとりうる値は　**3, 4, 5**

(2) $P(X_1 = 2) = P(X_1 \geqq 2) - P(X_1 \geqq 3) = \boldsymbol{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

(3) $1 \leqq k \leqq 6$ のとき　$P(X_1 = k) = \left(\dfrac{7-k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{6-k}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{5}(k+1)\left(\frac{6-k}{6}\right)^n - \sum_{k=0}^{5} k\left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\ &= \frac{1}{6^n}\sum_{k=0}^{5}(6-k)^n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n)} \end{aligned}$$

(4) $2 \leqq k \leqq 6$ のとき

$$
\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(X_n \leqq k) - P(X_n \leqq k-1) \\
&= \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n
\end{aligned}
$$

$P(X_n = 1) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ であるから，上式は $k = 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$1 \leqq k \leqq 6$ のとき　　$P(X_n = k) = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

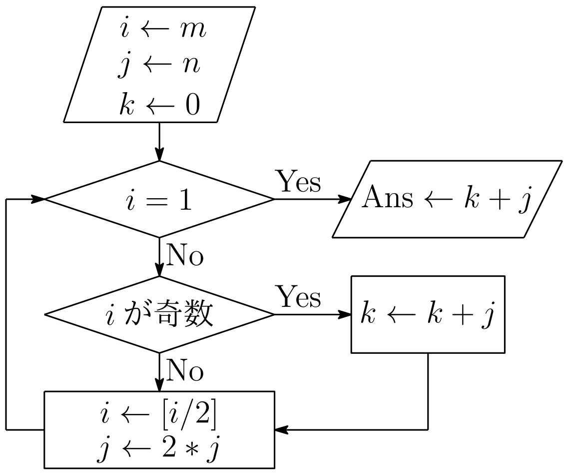
$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k-1}{6}\right)^n \\
&= 6 + \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^{5} (k+1)\left(\frac{k}{6}\right)^n \\
&= 6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n \\
&= 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)
\end{aligned}
$$

よって，上式および (3) の結果から

$$
\begin{aligned}
E(X_1 + X_n) &= E(X_1) + E(X_n) \\
&= \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \\
&\qquad\qquad + 6 - \frac{1}{6^n}(1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \\
&= \mathbf{7}
\end{aligned}
$$

8 (1) 右のフローチャートから

	i	j	k
1 周目	100	n	0
2 周目	50	$2n$	0
3 周目	**25**	$\boldsymbol{4n}$	**0**
4 周目	**12**	$\boldsymbol{8n}$	$\boldsymbol{4n}$



(2) i) i が奇数のとき，$[i/2] = \dfrac{i-1}{2}$ であるから

$k \leftarrow k + j$，$i \leftarrow \dfrac{i-1}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i-1}{2} * (2 * j) + (j + k) = i * j + k$$

ii) i が偶数のとき，$[i/2] = \dfrac{i}{2}$ であるから

$i \leftarrow \dfrac{i}{2}$，$j \leftarrow 2 * j$ より

$$i * j + k = \frac{i}{2} * (2 * j) + k = i * j + k$$

i)，ii) より，$i * j + k$ は一定である．

(3) 1 周目の $i * j + k$ は　$m \times n + 0 = mn$

この値は i の値に関係なく不変であり，$i = 1$ のとき $k + j$ となる．

したがって，求める Ans は　$\boldsymbol{mn}$　■

10.2 2002 年 (120 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ より 1 題選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ より 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 原点を中心とする半径 r $(r > 0)$ の円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$ax + by = r^2$$

で与えられることを示せ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $C : y = x^2 + 1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これら接線の方程式を求めよ。

(3) 問 (2) における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば $f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。必要ならば，
$1 + r + r^2 + \cdots + r^m = \dfrac{r^{m+1} - 1}{r - 1}$ $(r \neq 1)$ を用いてよい。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

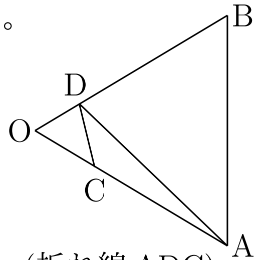
(3) $a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ (r，s は正の奇数) の形をした偶数 a，b を考える。

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$$

をみたす a，b を求めよ。

3 △AOB は OA = OB = 1 なる二等辺三角形とする。$\alpha = \angle\mathrm{AOB}$ とし，線分 OB に関して A と対称な点を A′ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha < 90^\circ$ とする。右図のように線分 OA 上に点 C をとる。点 C を固定し，線分 OB 上に点 D を折れ線 ADC の長さが最小となるようにとる。線分 OA′ 上に OC′ = OC をみたす点 C′ をとれば，線分 AC′ は点 D を通ることを示せ。



(折れ線 ADC)

(2) $\alpha < 45^\circ$ とする。線分 OA 上に点 E を，線分 OB 上に点 F を折れ線 AFE の長さが最小となるようにとる。このとき ∠AEF は直角となることを示せ。

(3) $\alpha < 60^\circ$ とする。線分 OA 上に点 G を，線分 OB 上に点 H を折れ線 AHGB の長さが最小となるようにとる。このとき，折れ線 AHGB の長さを α を用いて表せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

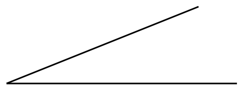
$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

5 n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，**1 回折れ線**とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



(1 回折れ線)

(1) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

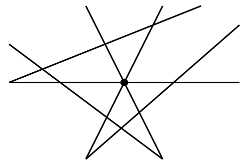
(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

分割される平面の領域の個数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，$L_n\ (n \geqq 1)$ を求めよ。

(2) 平面が次の条件 (i)，(ii) をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない (右図を参照せよ)。



(同一点で交わる3本の 1 回折れ線)

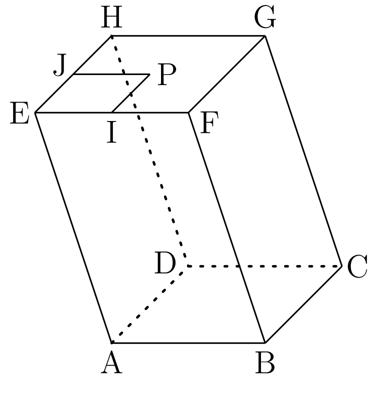
分割される平面の領域の個数を H_n で表す。H_3 を求めよ。

(3) $H_n\ (n \geqq 1)$ を求めよ。

6 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，二つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = 2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC} = \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB} = 120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x = |\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y = |\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を a，x，y を用いて表せ。



(平行六面体 ABCD-EFGH)

(3) 問 (2) で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。

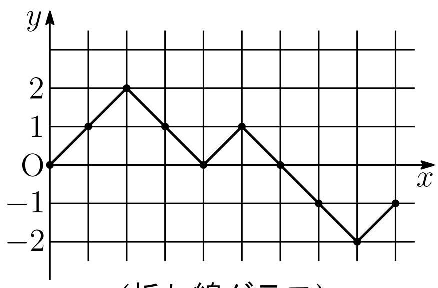
7 次の問いに答えよ。

(1) 複素数 α，β，γ，δ は $\alpha \neq \beta$，$\gamma \neq \delta$ をみたすとする。複素数平面上の 2 点 α，β を通る直線が，2 点 γ，δ を通る直線と直交するための必要十分条件は，複素数 $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ が純虚数であることを示せ。

(2) 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとり，$w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで三角形の**垂心**とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これら 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(3) 問 (2) において $w_2 = -\overline{z}_1 z_2 z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z}_1$ は z_1 に共役な複素数である。

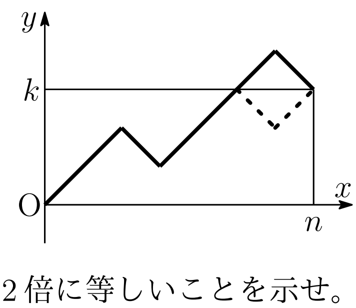
8 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき，その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし，この点から右斜め 45°，または右斜め −45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点をとり，この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点をとり，第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする。右図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。



(折れ線グラフ)

(1) n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n+k$ が偶数であることを示せ。また，この必要十分条件がみたされているとき，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。

(2) n は 2 以上の整数，k は $0 \leqq k \leqq n-2$ なる整数で，$n+k$ は偶数とする。原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。



(3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において，表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i,\ T_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 9$，を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし，$T_0 = 0$ とする。$T_9 = 3$ が起きたとき，どの T_i $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

解答例

1 (1) 接点を A$(a,\ b)$ とすると，A は円 $x^2+y^2=r^2$ の周上の点であるから

$$a^2+b^2=r^2$$

A を通り，OA に垂直な直線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とすると
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから

$$a(x-a)+b(y-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad ax+by=a^2+b^2$$

したがって，接線の方程式は $\quad ax+by=r^2$

(2) $y=x^2+1$ を微分すると $\quad y'=2x$
C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+1)=2t(x-t) \quad \text{すなわち} \quad 2tx-y-t^2+1=0$$

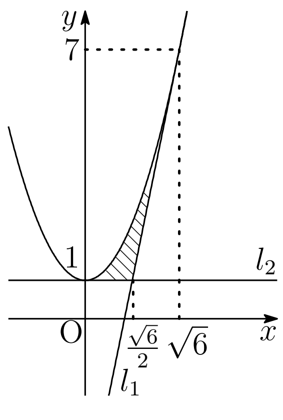
この直線が円 $x^2+y^2=1$ に接するとき，原点からこの直線までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-t^2+1|}{\sqrt{(2t)^2+(-1)^2}}=1 \quad \text{これを解いて} \quad t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，求める 3 本の接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=1,\ \pm 2\sqrt{6}x-y-5=0}$$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部の面積であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{6}}\{(x^2+1)-1\}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot 6 \\ &= 2\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}} \end{aligned}$$

補足 2009 九州大学 (文系) 前期 $\boxed{\mathbf{4}}$ を参照.

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(\sqrt{6}-0)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

■

2　(1) 正の奇数 b を，3 以上の素数 p_k と自然数 i_k を用いて

$$b = {p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n} \qquad (k = 1, 2, \cdots n)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(b) &= (1 + p_1 + {p_1}^2 + \cdots + {p_1}^{i_1})(1 + p_2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_2}^{i_2}) \\ &\qquad \cdots(1 + p_n + {p_n}^2 + \cdots + {p_n}^{i_n}) \\ &= \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \end{aligned}$$

$a = 2^m b$ より，$a = 2^m{p_1}^{i_1}{p_2}^{i_2}\cdots{p_n}^{i_n}$ であるから，上の結果を利用して

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{{p_1}^{i_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{{p_2}^{i_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{{p_n}^{i_n+1} - 1}{p_n - 1} \\ &= (2^{m+1} - 1)f(b) \end{aligned}$$

(2) $p \geqq 2$ より，a は少なくとも pq，q の 2 個の約数にもつから

$$f(a) \geqq pq + q = (p + 1)q$$

等号が成り立つのは，a の約数が pq，q の 2 個，すなわち，pq は素数，$q = 1$ のときである．よって，等号は p が素数，$q = 1$ のときに限り成り立つ．

(3) $a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ を (1) の結果に適用すると

$$f(a) = (2^3 - 1)f(r), \quad f(b) = (2^5 - 1)f(s)$$

$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたすとき

$$(2^3 - 1)f(r) = 2{\cdot}2^4 s, \quad (2^5 - 1)f(s) = 2{\cdot}2^2 r$$

ゆえに　$7f(r) = 2^5 s, \quad 31f(s) = 2^3 r \quad \cdots ①$

① から　$s = 7s', \quad r = 31r' \quad (s', r'$は自然数$) \quad \cdots ②$

② を ① に代入すると

$$f(r) = 2^5 s' \cdots ③, \quad f(s) = 2^3 r' \cdots ④$$

② を (2) の結果に適用すると

$$\begin{aligned} f(s) &\geqq (7 + 1)s' = 8s' && \cdots ⑤ \\ f(r) &\geqq (31 + 1)r' = 32r' && \cdots ⑥ \end{aligned}$$

③，⑥ より $s' \geqq r'$ となり，④，⑤ より $r' \geqq s'$ となるから　$r' = s'$

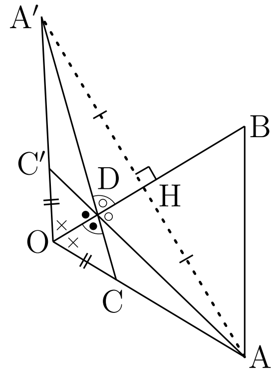
このとき，⑤，⑥ において等号が成り立つ．

ゆえに，(2) の結論から，$r' = s' = 1$ である．

したがって，② より，$r = 31$，$s = 7$ である．

よって　$a = 2^2{\cdot}31 = \mathbf{124}$，　$b = 2^4{\cdot}7 = \mathbf{112}$　■

3 (1) OB 上に点 P をとると



$$\begin{aligned} AP + PC &= A'P + PC \\ &\geqq AC \end{aligned}$$

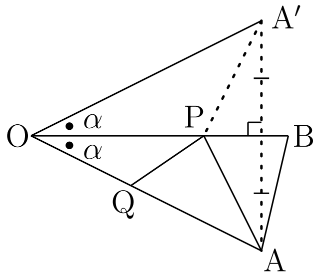
等号が成り立つのは，P を A′C と OB の交点とするときで，この点が D である．
A から OB に下ろした垂線を AH とすると

$$\angle AOH = \angle A'OH$$

$\triangle OCD \equiv \triangle OC'D$ より　$\angle CDO = \angle C'DO$　$\cdots$ ①
$\triangle ADH \equiv \triangle A'DH$ より　$\angle ADH = \angle A'DH$　$\cdots$ ②
OB と A′C の対頂角から　$\angle CDO = \angle A'DH$　$\cdots$ ③

①，②，③ より　$\angle ADH = \angle C'DO$
よって，3 点 A，D，C′ は，同一直線上にあり，線分 AC′ は D を通る．

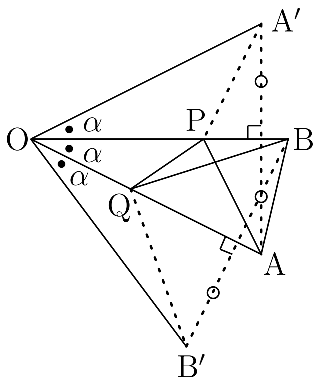
(2) 線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると



$$\begin{aligned} AP + PQ &= A'P + PQ \\ &\geqq A'Q \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，P を A′Q と OB の交点とするときで，この点が F である．
さらに，A′Q が最小となるのは，Q を A′ から OA に下ろした垂線の足とするときで，この点が E である．
よって，折れ線 AFE が最小となるとき，∠AEF は直角である．

(3) 線分 OA に関して B と対称な点を B′ とし，線分 OB 上に P，線分 OA 上に Q をとると



$$\begin{aligned} AP + PQ + QB &= A'P + PQ + QB' \\ &\geqq A'B' \end{aligned}$$

等号が成り立つのは，P を A′B′ と OB の交点，Q を A′B′ と OA の交点とするときで，このとき，P が H，Q が G である．よって，折れ線 AHGB の長さは

$$\mathbf{A'B' = 2\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ であるから

これに，$A = n\theta$，$B = (n-2)\theta$ を代入すると

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

よって　$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \quad \cdots(*)$

$\cos n\theta$ がある n 次式 $p_n(x)$ で表せることを数学的帰納法により示す．

i) $n = 1,\ 2$ のとき

$\cos\theta = x$ とすると，$\cos 2\theta = 2x^2 - 1$ であるから

$$p_1(x) = x,\quad p_2(x) = 2x^2 - 1$$

と定めると，$p_1(x)$ は 1 次式，$p_2(x)$ は 2 次式である．

ii) $n = k,\ k+1$ のとき

$\cos k\theta = p_k(\cos\theta)$，$\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(\cos\theta)$ をみたす k 次式 $p_k(x)$，$k+1$ 次式 $p_{k+1}(x)$ が存在すると仮定すると，$(*)$ により

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta$$

したがって，$p_{k+2}(x) = 2x\,p_{k+1}(x) - p_k(x)$ と定めると，$p_{k+2}(x)$ は，$k+2$ 次式で，次式が成り立つ．

$$\cos(k+2)\theta = p_{k+2}(\cos\theta)$$

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

をみたす n 次式 $p_n(x)$ が存在する．

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数であることを数学的帰納法により示す．

i) $n = 1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ は奇関数，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ は偶関数である．

ii) $n = 2k-1,\ 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ は奇関数，$p_{2k}(x)$ は偶関数であると仮定すると，(1) の結果から $p_{2k+1}(x) = 2x\,p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(-x) &= 2(-x)\,p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x) \\ &= -2x\,p_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x) \end{aligned}$$

よって，p_{2k+1} は奇関数である．

同様に，$p_{2k+2}(x)=2x\,p_{2k+1}(x)-p_{2k}(x)$ であるから

$$\begin{aligned}p_{2k+2}(-x)&=2(-x)\,p_{2k+1}(-x)-p_{2k}(-x)\\&=2x\,p_{2k+1}(x)-p_{2k}(x)=p_{2k+2}(x)\end{aligned}$$

よって，p_{2k+2} は偶関数である．

i)，ii) より，n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数．n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数である．

(3) n が奇数ならば，$p_n(x)$ は奇関数であるから，定数項は　0
n が偶数ならば，$p_n(x)$ は偶関数であるから，1 次の係数は　0
$p_{2m}(x)$ の定数項を a_m とし，$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数を b_m とすると

$$p_1(x)=x,\quad p_2(x)=2x^2-1\quad \text{これから}\quad a_1=-1,\quad b_1=1$$

$p_{n+2}(x)=2x\,p_{n+1}(x)-p_n(x)$ に $n=2m-1,\ 2m$ を代入すると

$$\begin{aligned}p_{2m+1}(x)&=2x\,p_{2m}(x)-p_{2m-1}(x)\\p_{2m+2}(x)&=2x\,p_{2m+1}(x)-p_{2m}(x)\end{aligned}$$

上式の第 2 式から　$a_{m+1}=-a_m$　$\cdots$①
上式の第 1 式から　$b_{m+1}=2a_m-b_m$　$\cdots$②

① から　$a_m=a_1(-1)^{m-1}=-1\cdot(-1)^{m-1}=(-1)^m$

これを ② に代入すると

$$b_{m+1}=2(-1)^m-b_m\quad \text{ゆえに}\quad \frac{b_{m+1}}{(-1)^{m+1}}-\frac{b_m}{(-1)^m}=-2$$

したがって　$\dfrac{b_m}{(-1)^m}=\dfrac{b_1}{(-1)^1}-2(m-1)$　ゆえに　$b_m=-(2m-1)\cdot(-1)^m$

よって　$p_{2m}(x)$ の定数項は　$(-1)^m$，
　　　　$p_{2m-1}(x)$ の 1 次の係数は　$(2m-1)\cdot(-1)^{m-1}$

以上のことから，$p_n(x)$ の定数項 a_n および 1 次の係数 b_n は

$$a_n=\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\text{奇数})\\ (\mathbf{-1})^{\frac{n}{2}} & (\boldsymbol{n}:\text{偶数})\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot(\mathbf{-1})^{\frac{n-1}{2}} & (\boldsymbol{n}:\text{奇数})\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n}:\text{偶数})\end{cases}$$

■

5 (1) $n-1$ 本の直線で分割された領域に n 本目の直線を引くことにより，新たな交点が $n-1$ 個でき，分割される領域の個数が n 個増える．したがって

$$L_1 = 2,\quad \boldsymbol{L_n = L_{n-1} + n \ \ (n \geqq 2)}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_{k+1} - L_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

ゆえに　$L_n - L_1 = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n - 1$

すなわち　$L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

$L_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{L_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)}$

(2) $H_1 = 2$ で，2 本目の 1 回折れ線を引くことで，4 個の交点ができ，分割される領域が 5 個増えるから　$H_2 = H_1 + 5 = 7$

さらに，3 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4{\cdot}2$ 個の交点ができ，分割される領域が $4{\cdot}2 + 1$ 個増えるから　$H_3 = H_2 + 4{\cdot}2 + 1 = \mathbf{16}$

(3) n 本の 1 回折れ線で分割された領域に $n+1$ 本目の 1 回折れ線を引くことで，$4n$ 個の交点ができ，分割される領域が $4n+1$ 個増えるから

$$H_1 = 2,\quad H_{n+1} = H_n + 4n + 1$$

が成り立つ．

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$

ゆえに　$H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$

すなわち　$H_n = 2n^2 - n + 1$

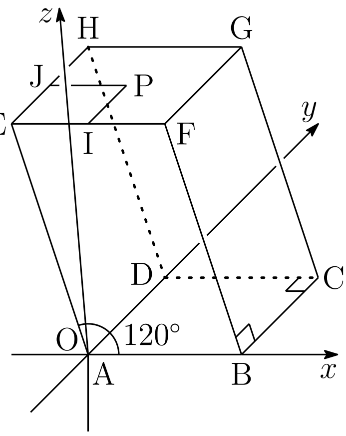
$H_1 = 2$ であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{H_n = 2n^2 - n + 1}$　■

$\boxed{6}$ (1) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とすると，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\end{aligned}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ より，四角形 ABCD は正方形であり，$\angle\mathrm{FBC} = 90^\circ$ より，四角形 FBCD は長方形である．したがって，面 ABFE$\perp$BC．空間内で点 A，B，D，E の座標を A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ 1,\ 0)$，E$(-a,\ 0,\ \sqrt{3}a)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a,\ y,\ \sqrt{3}a)$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = (x-a)^2 + y^2 + 3a^2,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x - a + y \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACP} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{(x-y-a)^2+6a^2}}\end{aligned}$$

補足 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_bun.pdf の解説を参照．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ より，$-1 \leqq x - y \leqq 1$ であるから，(2) の結果から

i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$x - y = a$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}a}{2}}$ をとる．

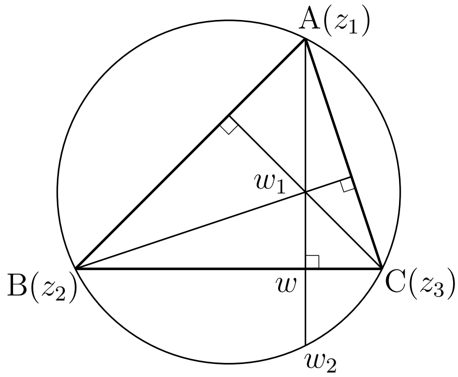
ii) $1 < a$ のとき

$x - y = 1$ で $\triangle\mathrm{ACP}$ は，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{7a^2-2a+1}}$ をとる．■

7 (1) 2 点 α，β を通る直線が，2 点 γ，δ を通る直線と直交する条件は

$$\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\pm 90^\circ \quad \text{すなわち} \quad \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\text{は純虚数}$$

(2) $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とおく．



点 A を通り，BC に垂直な直線上の点 z について，$\dfrac{z-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，その直線の方程式は

$$\frac{z-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_3-z_2}\right)}=0 \quad \cdots ①$$

$w_1=z_1+z_2+z_3$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ であることから，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}\right)}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\overline{z}_2+\overline{z}_3}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{z_2+z_3}{z_3-z_2}+\frac{\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

したがって，w_1 は直線 ① 上にある．

同様にして，w_1 が点 B を通り直線 CA に垂直な直線な直線上の点，および点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点であることを示すことができる．

よって，w_1 は $\triangle$ABC の垂心である．

(3) 円 C の方程式は　$|z|=1$

$w_2=-\overline{z}_1z_2z_3$ より，$|w_2|=|\overline{z}_1||z_2||z_3|=1$

したがって，w_2 は円 C 上の点である．また，次式を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}+\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)}&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\overline{z}_2\overline{z}_3-\overline{z}_1}{\overline{z}_3-\overline{z}_2}\\&=\frac{-\overline{z}_1z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}+\frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z}_1}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=0\end{aligned}$$

よって，w_2 は，直線 ① と円 C の交点である．■

$\boxed{8}$ (1) 原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め -45° の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} - k$$

であるから，$\dfrac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}$

(2) 原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $\mathrm{A}(a,\ k)$ とする $(0 \leqq a \leqq n-2)$．A と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数，A と格子点 $(n-1,\ k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数はそれらの和で

$$N+N=2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を通る折れ線グラフの数の 2 倍に等しい．

(3) 2 つの事象 A，B を $A : T_9 = 3$，B : すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A\cap\overline{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1) の結果より ${}_9\mathrm{C}_6$ (本)

したがって $P(A) = \dfrac{{}_9\mathrm{C}_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9,\ 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(7,3)$ を通る数は，(2) の結果から，O と $(8,\ 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍であるから，(1) の結果より $2\times{}_8\mathrm{C}_6$ (本)

したがって $P(A\cap\overline{B}) = \dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{2^9}$

よって $P_A(B) = 1 - \dfrac{2\times{}_8\mathrm{C}_6}{{}_9\mathrm{C}_6} = 1 - \dfrac{2\times 8\cdot 7}{2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{9\cdot 8\cdot 7} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

解説

1 次元ランダム・ウォーク (Random walk)[離散型] の最も基本的なモデルである．右斜め 45°，または右斜め $-45°$ の方向に格子点をとっていく確率がともに $\frac{1}{2}$ であるから，折れ線グラフの数に注目するとよい．

左下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフの総数を示したもので，パスカルの三角形を横に倒した配置になっている．右下の表は，原点と格子点を結ぶ折れ線グラフで，すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ である数を示したものである．(3) の条件つき確率は，下の 2 つの表における原点と点 (9, 3) を結ぶ折れ線グラフの数から $\boldsymbol{\dfrac{28}{84}=\dfrac{1}{3}}$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9										1
8									1	
7								1		9
6							1		8	
5						1		7		36
4					1		6		28	
3				1		5		21		**84**
2			1		4		15		56	
1		1		3		10		35		126
0	1		2		6		20		70	
−1		1		3		10		35		126
−2			1		4		15		56	
−3				1		5		21		84
−4					1		6		28	
−5						1		7		36
−6							1		8	
−7								1		9
−8									1	
−9										1

折れ線グラフの数

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3										**28**
2			1		3		9		28	
1		1		3		9		28		90
0	1		2		6		19		62	
−1		1		3		10		34		117
−2			1		4		15		55	
−3				1		5		21		83
−4					1		6		28	
−5						1		7		36
−6							1		8	
−7								1		9
−8									1	
−9										1

すべての $i(i=1,2,\cdots,7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0,\ k)$，$(1,\ k)$，$\cdots$，$(n-2,\ k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1,\ k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいから，n のときはじめて k になるグラフの数は

$$ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2\times {}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} - 2\times \frac{n-k}{2n}\cdot {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n}\times {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}} $$

これは，原点 O と格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの本数の $\dfrac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\dfrac{k}{n}$ となる．■

10.3　2003 年 (120 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ より 1 題選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ より 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 a，c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について，次の条件を考える。

(∗)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1) $a \geqq 2$ のとき，条件 (∗) を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2) $a \leqq 2$ のとき，条件 (∗) を満たす最小の c の値は $4 - a$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が条件 (∗) を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で，不等式　$2|x-4| + |y-5| \leqq 3$，$2\Big||x|-4\Big| + \Big||y|-5\Big| \leqq 3$

が表す領域を，それぞれ A，B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x |y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b，c を定数とし，$a > 0$ とする。$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px - f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1) 2 つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 実数 x に対し，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3) 直線 $y = px + q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y = f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p) = pt - f(t)$ かつ $q = -g(p)$ であることを示せ。

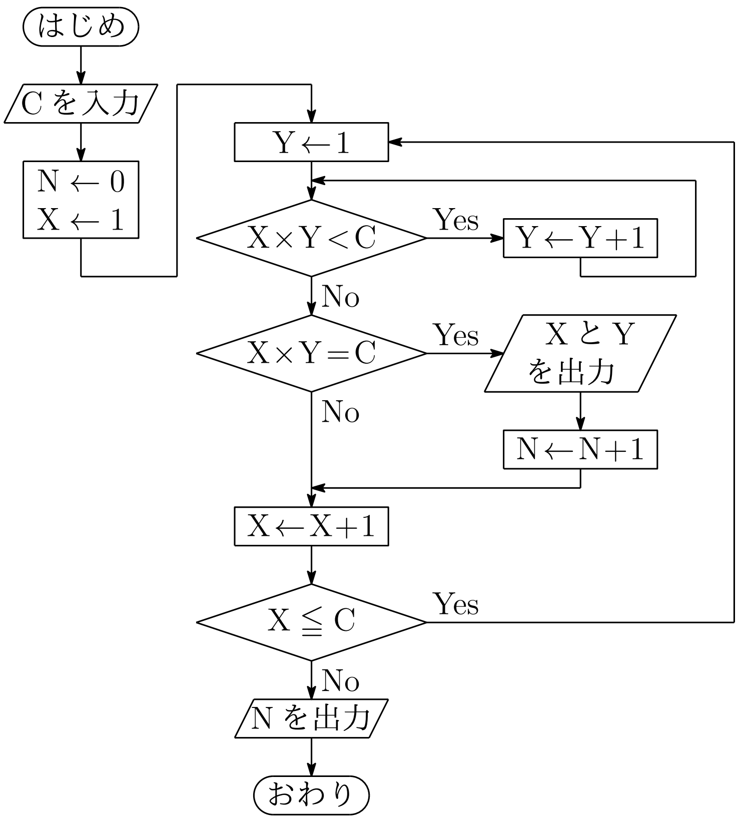
4 $\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を ℓ_k とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{k+1} とする。ただし，C と ℓ_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1}=\mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3) $a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 ℓ_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1, 0$ とする。

5 (1) 次の流れ図に対応するプログラムを実行する。$C=105$ を入力したとき，X，Y および N の値を出力順にすべて示せ。



(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。自然数 A，B，R を入力したとき，第 1 象限 (x 軸，y 軸は含まない) にあり，かつ中心が $(A,\ B)$ で半径が R の円の内部および周上にある格子点の個数と，それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である格子点 (複数個あるときは x 座標が最大のもの) の座標を出力するプログラムの流れ図を，方針を記述してから作成せよ。

6 空間内に四面体 OABC があり，∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるとする。辺 OA，OB，OC の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) ∠OGA，∠OGB，∠OGC がすべて 90° であるための条件を a，b，c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。

7 $0 < a < 1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 ℓ を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。

8 座標平面上に $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする正方形がある。ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて，$y \leqq x(a-x)$ の部分に落ちれば当たりとする。ただし，$0 < a \leqq 2$ とする。

(1) ボールを 1 回落とす。当たる確率を求めよ。

(2) 1 回目は $a = \dfrac{1}{2}$，2 回目は $a = \dfrac{3}{2}$ として，ボールを 2 回落とす。1 回だけ当たる確率を求めよ。

(3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす。少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であり，当たりの数の期待値が $\dfrac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $g(x) = f(x) - (x+1)^2$ とおくと

$$g(x) = (a-1)\left(x - \frac{1}{a-1}\right)^2 + c - \frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ のとき，$a-1 \geqq 1$ であるから，$0 < \dfrac{1}{a-1} \leqq 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$c - \dfrac{a}{a-1}$

したがって，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$c - \frac{a}{a-1} \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq \frac{a}{a-1}$$

よって，最小の c の値は　$\dfrac{a}{a-1}$

(2) i) $1 < a \leqq 2$ のとき，$0 < a-1 \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{1}{a-1}$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

ii) $a = 1$ のとき，$g(x) = -2x + c - 1$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

iii) $a < 1$ のとき，$a - 1 < 0$，$\dfrac{1}{a-1} < 0$ より

$0 \leqq x \leqq 1$ における $g(x)$ の最小値は　$g(1)$

i)〜iii) より，条件 $(*)$ が成り立つための条件は

$$g(1) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad c \geqq 4 - a$$

よって，最小の c の値は　$4 - a$

(3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2+c)\,dx = \frac{a}{3}+c$

i) $a \geqq 2$ のとき，$c \geqq \dfrac{a}{a-1}$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &\geqq \frac{a}{3}+\frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)+1}{3}+\frac{(a-1)+1}{a-1}\\ &= \frac{a-1}{3}+\frac{1}{a-1}+\frac{4}{3}\\ &\geqq 2\sqrt{\frac{a-1}{3}\times\frac{1}{a-1}}+\frac{4}{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

等号が成り立つのは

$$\frac{a-1}{3}=\frac{1}{a-1},\quad c=\frac{a}{a-1}$$

$a \geqq 2$ より　$a=1+\sqrt{3},\ c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

ii) $a \leqq 2$ のとき，$c \geqq 4-a$ より

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{a}{3}+4-a = -\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4 = \frac{8}{3}$$

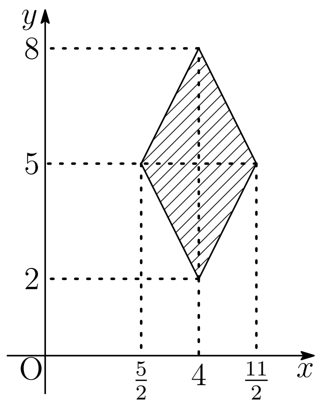
ゆえに　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \frac{8}{3}$

等号が成り立つのは　$a=2$，$c=4-a=2$

i)，ii) より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ は

$\boldsymbol{a=1+\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}}$ をとる．■

2 (1) 不等式 $2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域は，4 点 $(\frac{3}{2},\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-\frac{3}{2},\ 0)$，$(0, -3)$ を頂点とする四角形の周およびその内部である．
不等式 $2|x-4|+|y-5| \leqq 3$ の表す領域 A は，$2|x|+|y| \leqq 3$ の表す領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものであるから，A の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



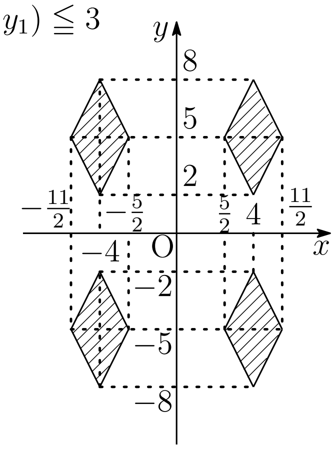
(2) $f(x,\ y)=2|x-4|+|y-5|$，$g(x,\ y)=2\Big||x|-4\Big|+\Big||y|-5\Big|$ とおく．
$f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域 A の点 $(x_1,\ y_1)$ は，(1) の結果から $x_1>0$，$y_1>0$ であり，$g(x,\ y)=f(|x|,\ |y|)$ が成り立つから

$$g(\pm x_1, \pm y_1)=f(x_1,\ y_1) \leqq 3$$

$g(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は B であるから

$$(x_1,\ y_1) \in A \quad \Longrightarrow \quad (\pm x_1, \pm y_1) \in B$$

したがって，B の表す領域は，A および A を x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したものである．よって，B の表す領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



(3) x，$|y|$ は正の整数であるから，領域 B 内の点において，これを満たす $(x,\ |y|)$ の組は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}(x,\ |y|) =&(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\\ &(4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (4,\ 7),\ (4,\ 8),\\ &(5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6)\end{aligned}$$

$\log_x |y| = \dfrac{m}{n}$ (m，n は整数) とおくと

$$x^{\frac{m}{n}}=|y| \quad ゆえに \quad x^m=|y|^n \quad \cdots ①$$

素因数分解の一意性により，① を満たすものは

$$(x,\ |y|)=(4,\ 2),\ (4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (5,\ 5)$$

よって，求める $(x,\ y)$ の組は次の 8 組である．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(4,\pm 2),\ (4,\pm 4),\ (4,\pm 8),\ (5,\pm 5)}$$ ■

3 (1)
$$\begin{aligned} px - f(x) &= px - (ax^2 + bx + c) \\ &= -ax^2 + (p-b)x - c \\ &= -a\left(x - \frac{p-b}{2a}\right)^2 + \frac{(p-b)^2}{4a} - c \end{aligned}$$

$-a < 0$ より，$px - f(x)$ の最大値 $g(p)$ は

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{(p-b)^2}{4a} - c \\ &= \frac{1}{4a}p^2 - \frac{b}{2a}p + \frac{b^2}{4a} - c \end{aligned}$$

したがって　$g(x) = \dfrac{1}{4a}x^2 - \dfrac{b}{2a}x + \dfrac{b^2}{4a} - c$

$f(x) = g(x)$ であるから

$$a = \frac{1}{4a},\quad b = -\frac{b}{2a},\quad c = \frac{b^2}{4a} - c$$

$a > 0$ より　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 0$，$c = 0$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}x^2}$

(2)
$$\begin{aligned} xp - g(p) &= xp - \left(\frac{1}{4a}p^2 - \frac{b}{2a}p + \frac{b^2}{4a} - c\right) \\ &= -\frac{1}{4a}p^2 + \frac{b+2ax}{2a}p + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= -\frac{1}{4a}\{p - (b+2ax)\}^2 + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{4a} < 0$ より，求める最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$$

別解　条件から

$$px - f(x) \leqq g(p)\quad したがって\quad xp - g(p) \leqq f(x)$$

第 2 式から，p の関数 $xp - g(p)$ の最大値 $h(x)$ は

$$\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$$

(3) $y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接するとき，2式から y を消去すると

$$f(x)=px+q\cdots①\quad \text{すなわち}\quad ax^2+(b-p)x+c-q=0\cdots②$$

$x=t$ は，① の解であるから

$$f(t)=pt+q\cdots③$$

$x=t$ は ② の重解であるから，$D=0$ より

$$(b-p)^2-4a(c-q)=0\quad \text{ゆえに}\quad q=-\frac{1}{4a}(p-b)^2+c$$

よって
$$q=-g(p)\cdots④$$

③，④ より
$$\boldsymbol{pt-f(t)=g(p),\ q=-g(p)}\quad\cdots(*)$$

逆に，$(*)$ の第1式から

$$pt-(at^2+bt+c)=\frac{1}{4a}(p-b)^2-c$$
$$t^2-\frac{1}{a}(p-b)t+\frac{1}{4a^2}(p-b)^2=0$$

したがって
$$\left(t-\frac{p-b}{2a}\right)^2=0$$

ゆえに
$$t=\frac{p-b}{2a}\quad \text{よって}\quad p=2at+b\cdots⑤$$

$(*)$ より
$$q=-pt+f(t)\cdots⑥$$

⑤，⑥ および $p=f'(t)$ であるから，直線 $y=px+q$ は

$$y=px-pt+f(t)\quad \text{すなわち}\quad y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

上式は，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式である．

別解　($px-f(x)$ の最大値が $g(p)$ であることを利用する)

$y=px+q$ が $x=t$ で $y=f(x)$ に接する．

$\iff$ 2次方程式 $px+q=f(x)$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\iff$ 2次方程式 $px-f(x)=-q$ は $x=t$ を重解にもつ．

$\iff$ 上に凸の放物線 $y=px-f(x)$ と直線 $y=-q$ は点 $(t,\ g(p))$ で接する．

$\iff$ $pt-f(t)=g(p)$，$-q=g(p)$，すなわち $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$

■

4 (1) $a_{k+1} \neq a_k$ のとき，m_k は直線 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の傾きであるから

$$m_k = \frac{{a_{k+1}}^2 - {a_k}^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

$a_{k+1} = a_k$ のとき，m_k は上式における $a_{k+1} \to a_k$ の極限値であるから

$$m_k = 2a_k$$

上の 2 式から　$m_k = a_{k+1} + a_k$　よって　$\boldsymbol{a_{k+1} = -a_k + m_k}$

(2) $m_k = m_1 r^{k-1}$ であるから　$a_{k+1} + a_k = m_1 r^{k-1}$

ゆえに　$$(-1)^{k+1}a_{k+1} - (-1)^k a_k = m_1(-r)^{k-1}$$

$k \geqq 2$ のとき　$$\sum_{j=1}^{k-1}\{(-1)^{j+1}a_{j+1} - (-1)^j a_j\} = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

$$(-1)^k a_k + a_1 = m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1}$$

したがって　$$a_k = (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1\sum_{j=1}^{k-1}(-r)^{j-1} \quad \cdots(*)$$

i) $-r \neq 1$　すなわち　$r \neq -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1 \times \frac{1-(-r)^{k-1}}{1+r} \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \end{aligned}$$

ii) $-r = 1$　すなわち　$r = -1$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + (-1)^k m_1(k-1) \\ &= (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\} \end{aligned}$$

i)，ii) で得られた結果は，ともに $k=1$ のときも成り立つので

$\boldsymbol{r \neq -1}$ **のとき**　$$\boldsymbol{a_k = (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1}$$

$\boldsymbol{r = -1}$ **のとき**　$$\boldsymbol{a_k = (-1)^k\{-a_1 + (k-1)m_1\}}$$

(3) $m_1 \neq 0$ より $a_1 = \dfrac{m_1}{1+r} \neq 0$．$r \neq -1$ より (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k+1}a_1 + \frac{(-1)^k + r^{k-1}}{1+r}m_1 \\ &= (-1)^{k+1}a_1 + \{(-1)^k + r^{k-1}\}a_1 \\ &= r^{k-1}a_1 \end{aligned}$$

$m_k = a_{k+1} + a_k$ および上式から $a_{k+1} = ra_k$ であるから

$$m_k = ra_k + a_k = (1+r)a_k$$

よって ℓ_k の方程式は

$$y - {a_k}^2 = (1+r)a_k(x - a_k) \quad \text{すなわち} \quad y = (1+r)a_kx - r{a_k}^2$$

直線 $y = (1+r)a_kx - r{a_k}^2$ について，$(1+r)a_k \neq 0$ であるから，これが $y = bx^2$ に接するとき，$b \neq 0$ である．2 式から y を消去し整理すると

$$bx^2 - (1+r)a_kx + r{a_k}^2 = 0$$

このとき

$$\begin{aligned} D &= (1+r)^2{a_k}^2 - 4br{a_k}^2 \\ &= \{(1+r)^2 - 4br\}{a_k}^2 \end{aligned}$$

$r \neq 0, -1$ であるから，$\boldsymbol{b = \dfrac{(1+r)^2}{4r}}$ とすると，$D = 0$ となる．
よって，任意の k に対して，直線 ℓ_k は放物線 $y = \dfrac{(1+r)^2}{4r}x^2$ に接する．■

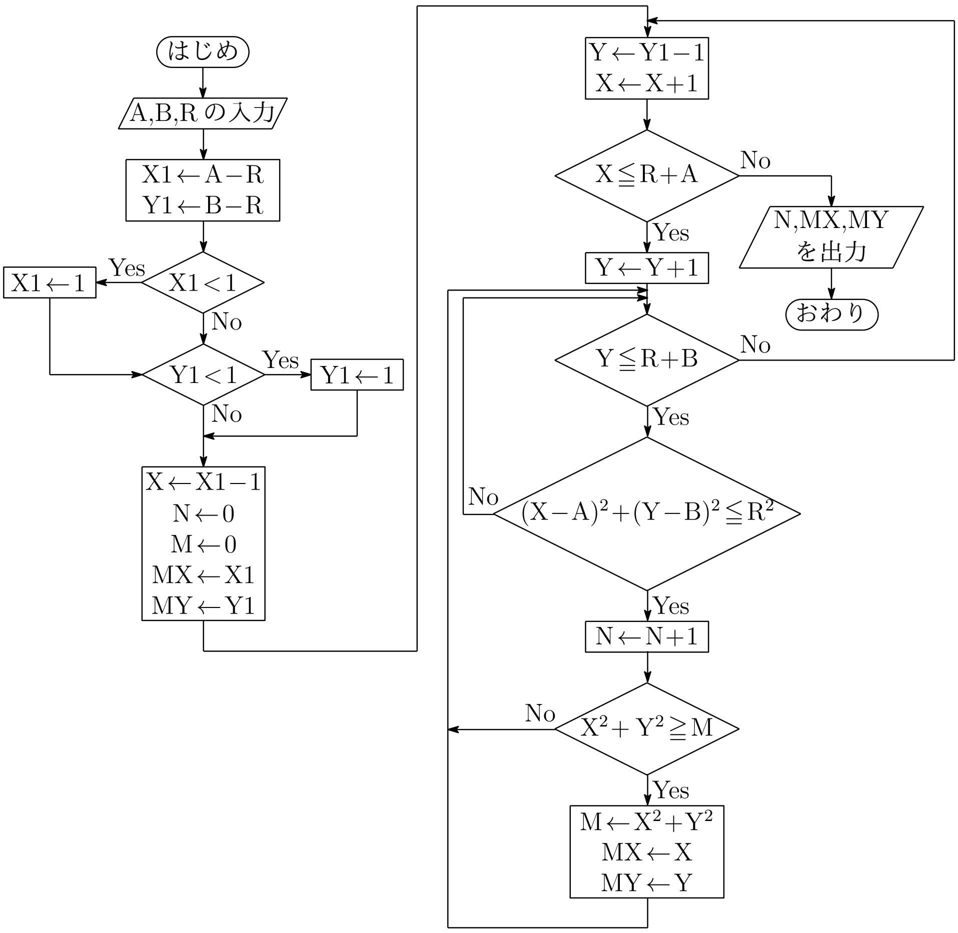
5　(1) 自然数 C に対して，$XY = C$ をみたす 2 つの自然数 $(X,\ Y)$ の組とその個数 N を求め，X を小さい順に出力するプログラムである．したがって，

$(\mathrm{X},\ \mathrm{Y}) = (1, 105),\ (3, 35),\ (5, 21),\ (7, 15),\ (15,\ 7),\ (21, 5),\ (35, 3),\ (105, 1)$ および $\mathrm{N} = 8$ が出力される．

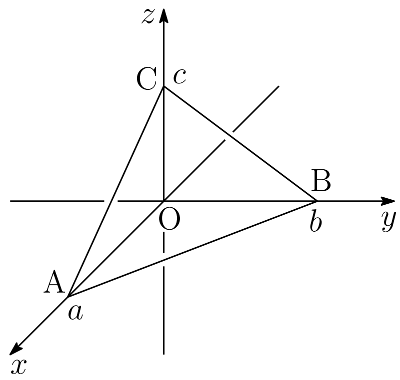
(2) $\mathrm{X1} = \max(\mathrm{A} - \mathrm{R},\ 1)$，$\mathrm{Y1} = \max(\mathrm{B} - \mathrm{R},\ 1)$ とし，$\mathrm{X1} \leqq x \leqq \mathrm{A} + \mathrm{R}$，$\mathrm{Y1} \leqq y \leqq \mathrm{B} + \mathrm{R}$ を満たす領域内の格子点 $(x,\ y)$ について，円の内部または周上にある格子点の個数を N，それらの格子点のうちで原点からの距離が最大である点の座標を (MX, MY) とする．

また，これらの点について，次の順に調べていく．

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{X1},\ \mathrm{B}+\mathrm{R}) \\
\to&(\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{X1}+1,\ \mathrm{B}+\mathrm{R}) \\
&\cdots \\
\to&(\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{Y1}) \to (\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{Y1}+1) \to \cdots \to (\mathrm{A}+\mathrm{R},\ \mathrm{B}+\mathrm{R})
\end{aligned}
$$



6 (1) ∠AOB，∠BOC，∠COA はすべて 90° であるから座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ を定めると，△ABC の重心 G の座標は



$$\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

3 点 A,B,C を通る平面の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

この平面の法線ベクトル $\vec{n}$ は　$\vec{n}=\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}/\!/\vec{n}$ であるから，定数 k を用いて

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)=k\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)\quad \text{ゆえに}\quad a^2=b^2=c^2=3k$$

よって，$a>0,\ b>0,\ c>0$ より　$\boldsymbol{a=b=c}$

(2) D は線分 BC を 1 : 2 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P は直線 AD 上の A 以外の点であるから $(t\neq 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

△APQ の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\quad \text{すなわち}\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

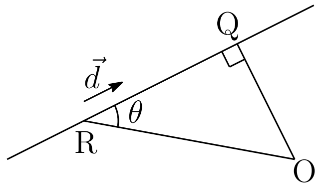
したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(-a,\ b,\ c)+\frac{t}{3}(3a,-2b,-c)\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-a,\ b,\ c)$，$\vec{d}=(3a,-2b,-c)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{t}{3}\vec{d}\quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\vec{d}$ のベクトルのなす角を θ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$，OQ が最小となるとき



$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\vec{d}|}$$

上の 2 式から $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} \quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{d} = 0$ であるから，① をこれに代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d} + \frac{t}{3}|\vec{d}|^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{3(\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \vec{d})}{|\vec{d}|^2}$$

したがって $\quad t = \dfrac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \neq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \times \vec{d} = (bc,\ 2ca, -ab)$ であるから，② より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\sqrt{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}}{\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{b^2c^2 + 4c^2a^2 + a^2b^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}}$$

法ベクトル

座標平面 (2 次元) における直線 $ax + by + c = 0$(1 次元) および座標空間 (3 次元) における平面 $ax + by + cz + d = 0$(2 次元) の法ベクトル (法線ベクトルともいう) は，それぞれ $(a,\ b)$，$(a,\ b,\ c)$ である．また，法ベクトルの次元は $2 - 1$ および $3 - 2$ で，ともに 1 次元である．

直線 $ax + by + c = 0$，平面 $ax + by + cx + d = 0$ は，n 次元空間における $n - 1$ 次元の多様体であり，法ベクトルの次元は 1(多様体の余次元) である．

したがって，これらの多様体 (ここでは，直線と平面) は同形であり，関連する公式も同形である．

たとえば，点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ までの距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であり，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離と同形である． ■

$\boxed{7}$ (1) $z = t + ai$ より

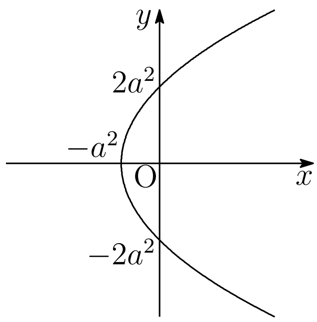
$$z^2 = (t+ai)^2 = (t^2 - a^2) + 2ati$$

$x = t^2 - a^2$，$y = 2at$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x = \frac{y^2}{4a^2} - a^2$$

ゆえに　$\boldsymbol{4a^2(x + a^2) = y^2}$　$\cdots$ ①

よって，求める軌跡は右の図のようになる．



(2) m は ℓ を原点を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\begin{aligned} z(\cos\theta + i\sin\theta) &= (t+ai)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (t\cos\theta - a\sin\theta) + i(t\sin\theta + a\cos\theta) \end{aligned}$$

$x = t\cos\theta - a\sin\theta$，$y = t\sin\theta + a\cos\theta$ とおき，2 式から t を消去すると

$$x\sin\theta - y\cos\theta + a = 0 \quad \cdots ②$$

i) $\sin\theta = 0$ のとき
② は $y = \pm a$ の直線であり，①，② の共有点は 1 個

ii) $\sin\theta \neq 0$ のとき
①，② から x を消去して整理すると

$$(\sin\theta)y^2 - (4a^2\cos\theta)y - 4a^3(a\sin\theta - 1) = 0 \quad \cdots (*)$$

これは y に関する 2 次方程式であるから，その係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= 4a^4\cos^2\theta + 4a^3\sin\theta(a\sin\theta - 1) \\ &= 4a^3(a - \sin\theta) \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ に注意して

$-1 \leqq \sin\theta < a$ のとき　$(*)$ の実数解は 2 個
$\sin\theta = a$ のとき　$(*)$ の実数解は 1 個
$a < \sin\theta \leqq 1$ のとき　$(*)$ の実数解は 0 個

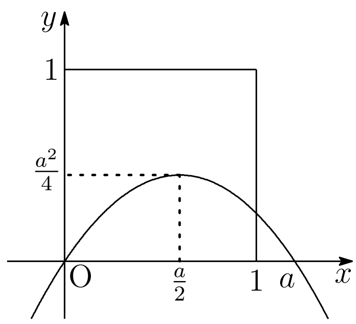
i)，ii) より，①，② の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta < 0,\ 0 < \sin\theta < a} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{\sin\theta = 0,\ a} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a < \sin\theta \leqq 1} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

■

8 (1) 正方形の面積は　1

正方形の周および内部と放物線 $y = x(a-x)$ で囲まれた部分の面積を S とし，求める確率を $P(a)$ とすると　$P(a) = \dfrac{S}{1} = S$



i) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$P(a) = \int_0^a x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$

ii) $1 < a \leqq 2$ のとき

$$P(a) = \int_0^1 x(a-x)\,dx = \boldsymbol{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}}$$

(2) 求める確率は

$$P\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - P\left(\frac{3}{2}\right)\right) + \left(1 - P\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot P\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{48}\left(1 - \frac{5}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \frac{5}{12} = \boldsymbol{\frac{121}{288}}$$

(3) 3 回ともはずれる確率は　$(1 - P(a))^3$ である．

少なくとも 1 回は当たる確率が $\dfrac{19}{27}$ 以上であるから

$$1 - (1 - P(a))^3 \geqq \frac{19}{27} \quad ゆえに \quad P(a) \geqq \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

当たりの数の期待値 E は

$$E = \sum_{k=0}^{3} k \cdot {}_3\mathrm{C}_k (P(a))^k (1 - P(a))^{3-k} = 3P(a)$$

この期待値 E が $\dfrac{3}{2}$ 以下であるから

$$3P(a) \leqq \frac{3}{2} \quad ゆえに \quad P(a) \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①，② から　$\dfrac{1}{3} \leqq P(a) \leqq \dfrac{1}{2}$

これを満たす a は (1) の ii) の場合について調べればよいので

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \leqq \frac{1}{2} \qquad よって \qquad \boldsymbol{\frac{4}{3} \leqq a \leqq \frac{5}{3}}$$

■

10.4　2004 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 2 つの関数

$$f(x) = -px^2 + 2 \quad (p > 0)$$
$$g(x) = |\,x\,| - 2$$

が与えられていて，放物線 $y = f(x)$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする。

(1) p の値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。このとき，点 A における $y = f(x)$ の接線 $y = h(x)$ を求めよ。また，この接線 $y = h(x)$ と $y = g(x)$ の，点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ。

(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a \leqq x \leqq b, \quad y \leqq h(x), \quad y \geqq f(x), \quad y \geqq g(x)$$

2 複素数平面上に複素数 $z = \cos\theta + i\sin\theta\ (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ をとり，$\alpha = z + 1$，$\beta = z - 1$ とおく。

(1) $|\,\beta\,| = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ を示せ。

(2) $\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$ を示せ。ただし，$0^\circ \leqq \arg\beta < 360^\circ$ とする。

(3) $\theta = 60^\circ$ とする。9 つの複素数 $\alpha^m\beta^n\ (m,\ n = 1, 2, 3)$ の虚部の最小値を求め，その最小値を与える $(m,\ n)$ のすべてを決定せよ。

3 $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする。平行四辺形 ABCD の辺 BC を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $1-\beta : \beta$ に内分する点を Q とする。また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ として次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(3) $\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AD} = 1$，$\angle\mathrm{DAB} = 60^\circ$ とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を求めよ。

4 スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れたあと，左から電球を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1) 赤青青青青青，赤赤青青青青，$\cdots$ のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど n 回 $(0 \leqq n \leqq 5)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 放物線 $y=-px^2+2$ は，2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るから

$$-p\cdot 18+2=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p=\frac{1}{9}}$$

(2) $y=-\frac{1}{9}x^2+2$ と $y=|\,x\,|-2$ から y を消去すると

$$-\frac{1}{9}x^2+2=|\,x\,|-2 \quad \text{ゆえに} \quad |\,x\,|^2+9|\,x\,|-36=0$$

したがって　$(|\,x\,|+12)(|\,x\,|-3)=0$　すなわち　$x=\pm 3$

よって，求める交点の座標は　**(3, 1)，(−3, 1)**

(3) (2) の結果より，点 A の座標は　$(-3,\ 1)$

$f(x)=-\frac{1}{9}x^2+2$ を微分すると　$f'(x)=-\frac{2}{9}x$

$y=f(x)$ の A における接線の傾きは　$f'(-3)=-\frac{2}{9}\cdot(-3)=\frac{2}{3}$

よって，$y=f(x)$ の A における接線の方程式 $y=h(x)$ は

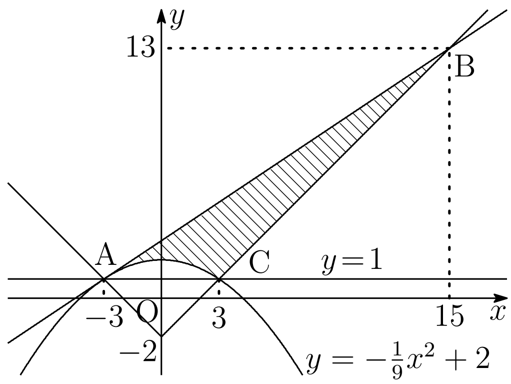
$$y-1=\frac{2}{3}(x+3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+3}$$

$y=h(x)$，$y=g(x)$ の共有点の座標は

$$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+3 \\ y=|\,x\,|-2 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad (x,\ y)=(-3,\ 1),\ (15,\ 13)$$

B は A と異なる点であるから　**B(15, 13)**

(4) (2) で求めた 2 交点で，A と異なる点を C とし，直線 AC と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^{3}\left\{\left(-\frac{1}{9}x^2+2\right)-1\right\}dx \\ &= -\frac{1}{9}\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)\,dx \\ &= 4 \end{aligned}$$

求める面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-S_1=\frac{1}{2}\{3-(-3)\}(13-1)-4=\boldsymbol{32}$$

■

2 (1) $\beta = z - 1 = \cos\theta - 1 + i\sin\theta$ より

$$|\,\beta\,| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2(1 - \cos\theta)}$$
$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$ であるから　$|\,\beta\,| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

(2) $\beta = \cos\theta - 1 + i\sin\theta = -2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + 90^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + 90^\circ\right)\right\}$$

(1) の結果より $2\sin\dfrac{\theta}{2} = |\beta|$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$90^\circ < \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ < 180^\circ$ であるから　$\arg\beta = \dfrac{\theta}{2} + 90^\circ$

(3) $\alpha = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

上式および (1) の結果から，$\theta = 60^\circ$ のとき

$$\alpha = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ),\quad \beta = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

ゆえに　$|\alpha^m\beta^n| = (\sqrt{3})^m$，$\arg(\alpha^m\beta^n) = 30^\circ \times m + 120^\circ \times n$

$\alpha^m\beta^n$ の虚部を I とすると　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 120^\circ \times n)$

$n = 1$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 120^\circ)$　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 2$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 240^\circ)$　$(m = 1, 2, 3)$

$n = 3$ のとき　$I = (\sqrt{3})^m \sin(30^\circ \times m + 360^\circ)$　$(m = 1, 2, 3)$

$I < 0$ となるのは，次の 4 通りで，そのときの I の値は

$(m,\ n) = (1,\ 2)$ のとき　$I = -\sqrt{3}$,

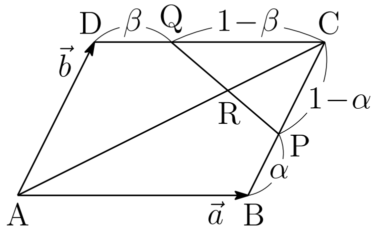
$(m,\ n) = (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)$ のとき　$I = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(m,\ n) = (2, 2),\ (3, 1),\ (3, 2)}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$ をとる．■

3 (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \boldsymbol{\vec{a} + \alpha\vec{b}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}} \\ &= \boldsymbol{\vec{b} + \beta\vec{a}}\end{aligned}$$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-\alpha\beta)\vec{a}, \quad -\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-\alpha\beta)\vec{b}$$

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ より，$1-\alpha\beta \neq 0$ であるから

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}, \quad \vec{b} = \frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} + \frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} \\ &= \frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{1-\alpha\beta} \\ &= \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta} \times \frac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-\alpha)+(1-\beta)}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}} = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha}, \quad \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}}$

(3)

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{AQR} &= \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \times \triangle\mathrm{AQC} \\ &= \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{DC}} \times \triangle\mathrm{ADC} \\ &= \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta} \times (1-\beta) \times \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120^\circ \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2(2-\alpha-\beta)}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ 起こりうる場合の総数は 2^6 (通り)

(1) 左端が赤色で，色の変化がちょうど 1 回起きる場合は，次の 5 通り．

「赤青青青青青」,「赤赤青青青青」,「赤赤赤青青青」,
「赤赤赤赤青青」,「赤赤赤赤赤青」

よって，求める確率は $\dfrac{5}{2^6} = \mathbf{\dfrac{5}{64}}$

(2) 色の変化が 1 回も起きない場合は，次の 2 通り

「赤赤赤赤赤赤」,「青青青青青青」

色の変化が 1 回だけ起きる場合は，(1) の左端が赤である場合と，同様に左端が青である場合の 5×2 通りである．

したがって，色の変化が 1 回以下である確率は $\dfrac{2+5\times 2}{2^6} = \dfrac{3}{16}$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1 - \dfrac{3}{16} = \mathbf{\dfrac{13}{16}}$

(3) 左端が赤色か青色の 2 通りに対して，色の変化が 2 個目，3 個目，$\cdots$，6 個目の 5 個の電球の中から変化する電球 n 個を選ぶ場合の数は

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_n \text{ (通り)}$$

求める確率を $P(n)$ とすると $(0 \leqq n \leqq 5)$

$$P(n) = \frac{2 \times {}_5\mathrm{C}_n}{2^6} = \boldsymbol{\frac{{}_5\mathrm{C}_n}{32}}$$

(4) 求める期待値を E とすると，(3) の結果から

$$E = \sum_{n=0}^{5} n \cdot P(n) = \frac{1}{32}\sum_{n=0}^{5} n \cdot {}_5\mathrm{C}_n = \frac{1}{32} \times 5 \cdot 2^{5-1} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

補足

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

■

10.5　2005 年 (120 分)

出題分野 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の実数とし，点 A$\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C : y = ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $a > 0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2 + tz + t = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が (2) の図形 C 上を動くとき，

$$w = \frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が動く図形を求め，図示せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば，$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$，$[2] = 2$ である。このとき，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2} + \log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2} + \cos\theta\right] \leqq 0 \leqq \left[\dfrac{3}{2} + \log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

4 1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $x_1 < x_2$ となる確率を求めよ。

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ。

(3) $x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4) $x_k \geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k = 4$ と定める。

解答例

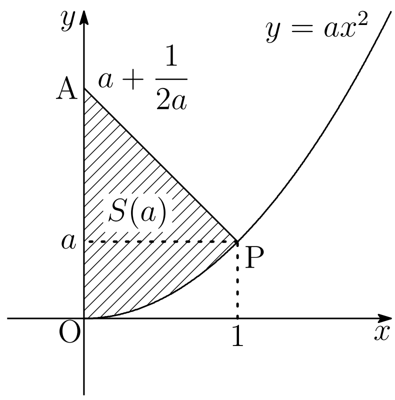
$\boxed{1}$ (1) C 上の点を $\mathrm{X}(t,\ at^2)$ とすると $(t \geqq 0)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{AX}^2 &= t^2 + \left\{at^2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right)\right\}^2 \\
&= a^2t^4 - 2a^2t^2 + \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\
&= a^2(t^2-1)^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}
\end{aligned}$$

AX^2 は，$t^2 = 1$　すなわち　$t = 1$ のとき，AX^2 は最小値 $1 + \dfrac{1}{4a^2}$ をとる．

よって　　$\mathbf{P(1,\ \boldsymbol{a})}$，$\mathbf{AP} = \sqrt{\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\boldsymbol{a}^2}}}$

(2) $$\begin{aligned}
S(a) &= \frac{1}{2}\left\{a + \left(a + \frac{1}{2a}\right)\right\} \times 1 - \int_0^1 ax^2\,dx \\
&= a + \frac{1}{4a} - \frac{a}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{2a}{3} + \frac{1}{4a}}
\end{aligned}$$



(3) $a > 0$ より，$\dfrac{2a}{3} > 0$，$\dfrac{1}{4a} > 0$ であるから，
相加平均および相乗平均の関係により

$$\frac{2a}{3} + \frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{4a}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{2a}{3} = \dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のときに限る．

よって，$S(a)$ は，$\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．　■

2 (1) 2 次方程式 $z^2+tz+t=0\cdots$ ① が異なる 2 つの虚数解をもつとき，$D<0$ であるから

$$t^2-4\cdot1\cdot t<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0<t<4}$$

このとき，方程式 ① の解は $\boldsymbol{z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$

(2) $z=z(t)$ とおくと，解と係数の関係により $z+\overline{z}=-t$，$z\overline{z}=t$

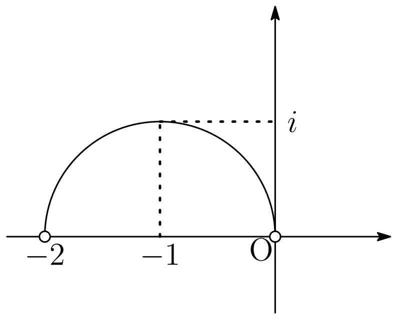
上の 2 式から t を消去すると

$$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$

したがって $|z+1|^2=1$

よって $|z+1|=1$



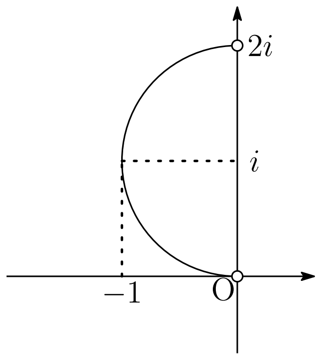
ゆえに，$z(t)$ は，-1 を中心とする半径 1 の円周上で，虚部が正である点である．

よって，$z(t)$ が描く図形 C は，右の図のようになる．

(3) (2) の結果から，$z=-1+(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0^\circ<\theta<180^\circ)$

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{iz}{z+1}=\frac{i\{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)\}}{-1+(\cos\theta+i\sin\theta)+1}\\
&=\frac{-i+i(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta}\\
&=-i\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\
&=(\cos270^\circ+i\sin270^\circ)\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}+i\\
&=i+\cos(270^\circ-\theta)+i\sin(270^\circ-\theta) \qquad (90^\circ<270^\circ-\theta<270^\circ)
\end{aligned}
$$

よって，w が描く図形は，下の図のようになる．



■

3 (1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$ より　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 2$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 2$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 3$　すなわち　$\cos\theta < \dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\boldsymbol{60^\circ < \theta < 180^\circ}$

(2) $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 1$ より

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\boldsymbol{45^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ}$

(3) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 0$ であるから　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 1$

したがって　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 1$

ゆえに　$\dfrac{5}{2}+\cos\theta < 2$　すなわち　$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$120^\circ < \theta < 180^\circ$　$\cdots$①

次に，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \geqq 0$ であるから

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\sin\theta \geqq \log_2\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

したがって　$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\alpha \leqq \theta \leqq 180^\circ - \alpha$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{120^\circ < \theta \leqq 180^\circ - \alpha}$　■

4 さいころを4回投げるとき，目の出方の総数は 6^4 (通り)

(1) $x_1 < x_2$ の目の出方の総数は ${}_6\mathrm{C}_2$ (通り)

x_3，x_4 の目の出方の総数は 6^2 (通り)

よって，求める確率は $P(x_1 < x_2) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \times 6^2}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ の目の出方の総数は ${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)

x_4 の目の出方の総数は 6 (通り)

よって，求める確率は $P(x_1 < x_2 < x_3) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 6}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{5}{54}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} P(x_1 < x_2 \geqq x_3) &= P(x_1 < x_2) - P(x_1 < x_2 < x_3) \\ &= \frac{5}{12} - \frac{5}{54} = \boldsymbol{\frac{35}{108}} \end{aligned}$$

(4) $P(k=1) = P(x_1 \geqq x_2) = 1 - P(x_1 < x_2) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

$P(k=2) = P(x_1 < x_2 \geqq x_3) = \dfrac{35}{108}$

$P(k=4) = P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{6^4} = \dfrac{5}{432}$

$$\begin{aligned} P(k=3) &= P(x_1 < x_2 < x_3) - P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) \\ &= \frac{5}{54} - \frac{5}{432} = \frac{35}{432} \end{aligned}$$

よって，求める期待値は

$$1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{35}{108} + 3 \times \frac{35}{432} + 4 \times \frac{5}{432} = \boldsymbol{\frac{73}{48}}$$

■

10.6　2006 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 曲線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする。ただし，$t > 0$ とする。接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ R_1，R_2 とする。また，$\triangle \mathrm{PQR}_1$ の面積を S_1 とし，曲線 C と y 軸および線分 PR_2 で囲まれる図形の面積を S_2 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 Q と点 R_1 の x 座標を t を用いて表せ。

(2) 面積 S_2 を t を用いて表せ。

(3) $S_1 > S_2$ が成り立つ t の範囲を求めよ。

2 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，$a_1 = b_1 = 1$ および，関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n$$
$$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$$

をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

3 空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について次の問いに答えよ。ただし，h と k は実数とする。

(1) $h\vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき，すべての実数 x に対して

$$|\,x\vec{a} + \vec{b}\,| \geqq |\,h\vec{a} + \vec{b}\,|$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2) $h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x，y に対して

$$|\,x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}\,| \geqq |\,h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}\,|$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 4, -2)$，$\vec{c} = (-3, -6,\ 6)$ とするとき，$|\,x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}\,|$ の最小値を与える実数 x，y と，そのときの最小値を求めよ。

4 関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$ について次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

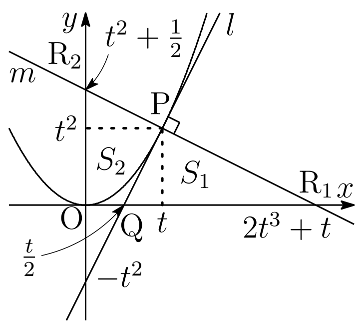
(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 実数 k に対し，$f(x)=k$ をみたす x の個数を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線 l の方程式は



$$y-t^2=2t(x-t)$$

ゆえに　　$y=2tx-t^2$

Q の x 座標は，これに $y=0$ を代入して

$$\boldsymbol{x=\frac{t}{2}}$$

$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，l に垂直な直線 m の方程式は

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

R_1 の x 座標は，これに $y=0$ を代入して　$\boldsymbol{x=2t^3+t}$

(2) S_2 は，$0\leqq x\leqq t$ において，m と C で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\left\{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+t^2\right\}\times t-\int_0^t x^2\,dx\\&=t^3+\frac{t}{4}-\frac{t^3}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t}\end{aligned}$$

(3) $S_1=\dfrac{1}{2}\left\{(2t^3+t)-\dfrac{t}{2}\right\}\times t^2=t^5+\dfrac{1}{4}t^3$

これと (2) の結果から

$$\begin{aligned}S_1-S_2&=\left(t^5+\frac{1}{4}t^3\right)-\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t\right)\\&=\frac{t}{12}(12t^4-5t^2-3)\\&=\frac{t}{12}(3t^2+1)(4t^2-3)\\&=\frac{t}{12}(3t^2+1)(2t+\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$t>0$ であるから，$S_1>S_2$ が成り立つとき

$$\frac{t}{12}(3t^2+1)(2t+\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})>0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{t>\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

■

2 (1) 数学的帰納法により示す．

「a_n は3で割り切れるが，b_n は3で割り切れない」を(A)とする．

［1］ $n=3$ のとき

$$a_2 = 2{\cdot}1{\cdot}1 = 2, \qquad b_2 = 2{\cdot}1^2 + 1^2 = 3$$
$$a_3 = 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12, \qquad b_3 = 2{\cdot}2^2 + 3^2 = 17$$

よって，$n=3$ のとき，(A)は成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき $(k \geqq 3)$，(A)が成り立つと仮定すると，

$a_k = 3M$，$b_k = 3N \pm 1$ とおけるから $(M,\ N$ は整数$)$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_kb_k = 2{\cdot}3M{\cdot}(3N \pm 1) \\ &= 3{\cdot}2M(3N \pm 1) \\ b_{k+1} &= 2{a_k}^2 + {b_k}^2 \\ &= 2(3M)^2 + (3N \pm 1)^2 \\ &= 18M^2 + (9N^2 \pm 6N + 1) \\ &= 3(6M^2 + 3N^2 \pm 2N) + 1 \end{aligned}$$

［1］，［2］から，$n \geqq 3$ について(A)が成り立つ．

(2) $b_1 = 1$，$b_{n+1} = 2{a_n}^2 + {b_n}^2$ より，b_n は奇数．以下を背理法により示す．

$a_2 = 2$，$b_2 = 3$ より，$2 \leqq n \leqq m$ のとき，a_n と b_n は互いに素であるが，a_{m+1} と b_{m+1} は素数 p を約数にもつと仮定する $(p \geqq 3)$．

$a_{m+1} = 2a_mb_m$ より，次の2つに場合分けをする．

［1］ a_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - 2{a_m}^2 = {b_m}^2$ であるから，
b_m も p で割り切れる．

［2］ b_m が p で割り切れるとき，$b_{m+1} - {b_m}^2 = 2{a_m}^2$ であるから，
a_m も p で割り切れる．

［1］，［2］より，a_m，b_m がともに p で割り切れて，仮定に反する．

よって，$n \geqq 2$ のとき，a_n，b_n は互いに素である．■

3 (1) $h\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直であるから，$\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})=0$ より

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |(x-h)\vec{a}+(h\vec{a}+\vec{b})|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+2(x-h)\vec{a}\cdot(h\vec{a}+\vec{b})+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+|h\vec{a}+\vec{b}|^2\\ &\geqq |h\vec{a}+\vec{b}|^2\end{aligned}$$

よって　$|x\vec{a}+\vec{b}| \geqq |h\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるから，$\vec{d}=h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ より，(1) と同様にして

$$\begin{aligned}|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}+\vec{d}|^2\\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &= |x-h|^2|\vec{a}|^2-2|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|+|y-k|^2|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2\\ &\qquad +2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\ &= (|x-h||\vec{a}|-|y-k||\vec{b}|)^2+|\vec{d}|^2\\ &\qquad +2\{|x-h||y-k||\vec{a}||\vec{b}|-(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\\ &\geqq |\vec{d}|^2\end{aligned}$$

よって　$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}| \geqq |h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$

(3)
$$\begin{aligned}\vec{d} &= h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}\\ &= h(1,\ 1,\ 1)+k(1,\ 4,-2)+(-3,-6,\ 6)\\ &= (h+k-3,\ h+4k-6,\ h-2k+6)\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ であるから

$$\begin{cases} h+k-1=0\\ h+7k-13=0\end{cases}$$ これを解いて　$h=-1,\ k=2$

(2) の結果から，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は，$x=h$，$y=k$ すなわち $\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=2}$ のとき最小となり，最小値は　$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=|(-2,\ 1,\ 1)|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

補足　(1) の $x\vec{a}+\vec{b}$ は点 $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通り，方向ベクトルが $\vec{a}$ の直線である．$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は原点からこの直線までの距離である．

(2) の $x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}$ は点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を通り，接ベクトルが $\vec{a}$，$\vec{b}$ の平面である．$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は原点からこの平面までの距離である．■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=0$ より，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}=0$ であるから

$$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad ゆえに\quad \sin x=0,\ 1$$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より　　$\boldsymbol{x=-\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$

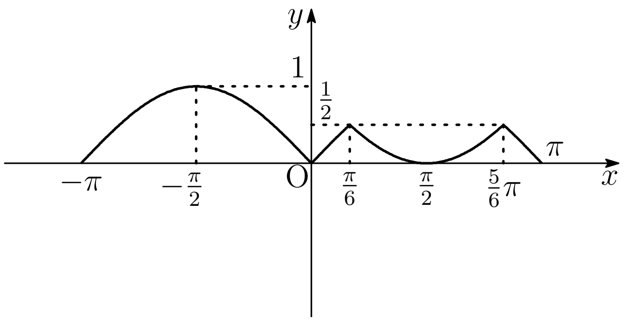
(2)　i) $\sin x-\dfrac{1}{2}\geqq 0$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x-1|=1-\sin x$$

ii) $\sin x-\dfrac{1}{2}\leqq 0$　すなわち　$-\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)-\frac{1}{2}\right|=|\sin x|$$

i)，ii) から，グラフの概形は，次のようになる．



(3) $f(x)=k$ を満たす x の個数は，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの共有点の個数であるから，(2) のグラフより

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<0,\ 1<k} \text{ のとき} & \boldsymbol{0}\text{個} \\ \boldsymbol{k=1} \text{ のとき} & \boldsymbol{1}\text{個} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}<k<1} \text{ のとき} & \boldsymbol{2}\text{個} \\ \boldsymbol{k=0,\ \frac{1}{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{4}\text{個} \\ \boldsymbol{0<k<\frac{1}{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{6}\text{個} \end{cases}$$

■

10.7　2007 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 $f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2) 不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

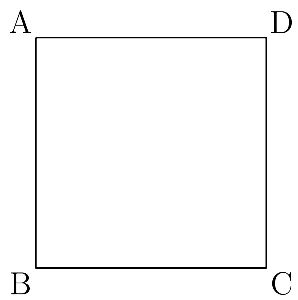
2 t を $0\leqq t\leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ t)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t\right)$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であることを示せ。

(3) 四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ。また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。

3 図のような一辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 表の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。

4 3辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の2辺より短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) x が (1) で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=0$ より　$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$
これを解いて　　$x=\pm\sqrt{2},\ 2\pm\sqrt{2}$
よって，$f(x)=0$ の解を小さい順に並べると

$$-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}$$

(2) $f(x)\leqq 0$ の解は，(1) の結果から

$$-\sqrt{2}\leqq x\leqq 2-\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\leqq x\leqq 2+\sqrt{2}$$

したがって，$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n は

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

よって　　$\boldsymbol{n=-1,\ 0,\ 2,\ 3}$

(3) n が整数のとき，$f(n)$ は整数であるから，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n を，次の 2 つの場合に分けて求める．

i) $f(n)\leqq 0$ のとき，(2) の結果から　$n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$
ii) $f(n)=1$ のとき　$(n^2-2)(n^2-4n+2)=1$
n^2-2 は整数であるから，上式から　$n^2-2=\pm 1$
$n^2-2=1$ を満たす整数 n は存在しないから

$$n^2-2=n^2-4n+2=-1\quad これを解いて\quad n=1$$

i)，ii) から，求める整数 n は　　$\boldsymbol{n=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3}$

補足 (高次不等式)

$\alpha<\beta<\gamma<\delta$ とすると

1 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)<0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x<\gamma$

2 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ の解は　$\alpha<x<\beta,\ \gamma<x$

3 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta,\ \gamma<x<\delta$

4 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)>0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x<\gamma,\ \delta<x$ ■

2 (1)

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-t)^2+(t-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$$
$$\mathrm{BC}=\sqrt{(0-1)^2+(1-t)^2+(t-0)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$$
$$\mathrm{CA}=\sqrt{(t-0)^2+(0-1)^2+(1-t)^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}$$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$．よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形

したがって　$S(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin 60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)}$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{t+1+0}{3},\ \frac{0+t+1}{3},\ \frac{1+0+t}{3}\right)\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)\\&=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-t,\ t,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-t,\ 1,\ t-1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\cdot(1-t,\ t,\ -1)=\frac{3-t}{9}(1-t+t-1)=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3-t}{9}(1,\ 1,\ 1)\cdot(-t,\ 1,\ t-1)=\frac{3-t}{9}(-t+1+t-1)=0$$

$t\neq 3$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\neq\vec{0}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $0\leqq t\leqq 1$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{9}(3-t)$ であるから，(2) の結果から

$$\begin{aligned}V(t)&=\frac{1}{3}S(t)|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|\\&=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\times\frac{\sqrt{3}}{9}(3-t)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{18}(-t^3+4t^2-4t+3)}\end{aligned}$$

$V(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}V'(t)&=\frac{1}{18}(-3t^2+8t-4)\\&=-\frac{1}{18}(t-2)(3t-2)\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$	極小 $\frac{49}{486}$	$\nearrow$	

増減表から，$V(t)$ は，$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{486}}$ をとる．■

3 (1) 試行を n 回繰り返したとき，点 Q が，頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ，$P_n(\mathrm{A})$，$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ とすると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = P_1(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}$$

また，次式が成り立つ ($n = 1, 2, 3, \cdots$).

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) = P_{n+1}(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_n(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{B}) = P_{n+1}(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_n(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_n(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) = P_2(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_1(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_2(\mathrm{B}) = P_2(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_1(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_1(\mathrm{C}) = \mathbf{0} \\ P_3(\mathrm{A}) = P_3(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_2(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{D}) = \mathbf{0} \\ P_3(\mathrm{B}) = P_3(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_2(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_2(\mathrm{C}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_4(\mathrm{A}) = P_4(\mathrm{C}) &= \frac{1}{2}P_3(\mathrm{B}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{D}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \\ P_4(\mathrm{B}) = P_4(\mathrm{D}) &= \frac{1}{2}P_3(\mathrm{A}) + \frac{1}{2}P_3(\mathrm{C}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(2) 試行を n 回繰り返したときの確率を (1) と同様に定めると

$$P_1(\mathrm{A}) = P_1(\mathrm{C}) = 0,\ P_1(\mathrm{B}) = p,\ P_1(\mathrm{D}) = 1 - p$$

また，次式が成り立つ ($n = 1, 2, 3, \cdots$).

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) &= (1-p)P_n(\mathrm{B}) + pP_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{B}) &= pP_n(\mathrm{A}) + (1-p)P_n(\mathrm{C}) \\ P_{n+1}(\mathrm{C}) &= pP_n(\mathrm{B}) + (1-p)P_n(\mathrm{D}) \\ P_{n+1}(\mathrm{D}) &= (1-p)P_n(\mathrm{A}) + pP_n(\mathrm{C}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) &= (1-p)P_1(\mathrm{B}) + pP_1(\mathrm{D}) = -2p^2 + 2p \\ P_2(\mathrm{B}) &= pP_1(\mathrm{A}) + (1-p)P_1(\mathrm{C}) = 0 \\ P_2(\mathrm{C}) &= pP_1(\mathrm{B}) + (1-p)P_1(\mathrm{D}) = 2p^2 - 2p + 1 \\ P_2(\mathrm{D}) &= (1-p)P_1(\mathrm{A}) + pP_1(\mathrm{C}) = 0 \end{aligned}$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_2(\mathrm{C}) - P_2(\mathrm{A}) = (2p-1)^2 > 0$

よって，試行を 2 回繰り返すとき，点 Q が頂点 C にある確率が最大となる．

さらに

$$
\begin{aligned}
P_3(\mathrm{A}) &= (1-p)P_2(\mathrm{B}) + pP_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{B}) &= pP_2(\mathrm{A}) + (1-p)P_2(\mathrm{C}) \\
&= p(-2p^2+2p) + (1-p)(2p^2-2p+1) \\
&= -4p^3+6p^2-3p+1 \\
P_3(\mathrm{C}) &= pP_2(\mathrm{B}) + (1-p)P_2(\mathrm{D}) \\
&= 0 \\
P_3(\mathrm{D}) &= (1-p)P_2(\mathrm{A}) + pP_2(\mathrm{C}) \\
&= (1-p)(-2p^2+2p) + p(2p^2-2p+1) \\
&= 4p^3-6p^2+3p
\end{aligned}
$$

$p > \dfrac{1}{2}$ であるから　$P_3(\mathrm{D}) - P_3(\mathrm{B}) = (2p-1)^3 > 0$

よって，試行を 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となる．

■

4 (1) 辺の長さは正であるから　$x^2-2x>0$　かつ　$4-x>0$

これを解いて　　$x<0,\ 2<x<4$　$\cdots$①

題意より　$\sqrt{x^2-2x} \geqq 4-x$，　$\sqrt{x^2-2x} \geqq 2$

第 1 式から　　$x^2-2x \geqq 16-8x+x^2$　ゆえに　$x \geqq \dfrac{8}{3}$　$\cdots$②

第 2 式から　　$x^2-2x \geqq 4$　ゆえに　$x \leqq 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5} \leqq x$　$\cdots$③

3 辺の長さによる三角形の存在条件から　$\sqrt{x^2-2x} < (4-x)+2$

したがって　$\sqrt{x^2-2x} < 6-x$　ゆえに　$x^2-2x < 36-12x+x^2$

これを解いて　　$x < \dfrac{18}{5}$　$\cdots$④

①，②，③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}}$

(2) $2-(4-x) = x-2$

(1) の結果から　　$\sqrt{5}-2 \leqq x-2 < \dfrac{8}{5}$

また，$\sqrt{5}-2>0$ であるから　$x-2>0$　ゆえに　$2-(4-x)>0$

すなわち　$2>4-x$　よって，最短の辺の長さは　$4-x$

余弦定理により　$\cos\theta = \dfrac{(x^2-2x)+2^2-(4-x)^2}{2{\cdot}2\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$

このとき，$x-2>0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}}$$

(3) (2) の結果から　$\cos\theta = \dfrac{3}{2}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}$

上式と (1) の結果から，$\cos\theta$ は $\boldsymbol{x = 1+\sqrt{5}}$ のとき最小となり，最小値は

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})-2}{1+\sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = \boldsymbol{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}}$$

■

10.8　2008 年 (120 分)

出題分野 [1] [2] [3] [4]

1 自然数 n に対して，$a_n = (\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

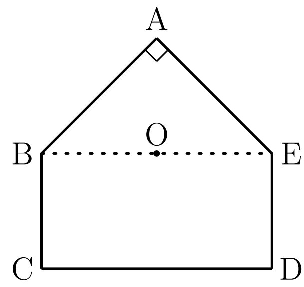
(3) $a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。

2 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

3 図のような五角形 ABCDE(角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形) において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点を O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i = \mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。

4 放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ。

(2) (1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。この操作を繰り返してできる数列を a_1，a_2，$\cdots$，$a_n \cdots$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n > 1$ を示せ。

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < {b_n}^2$ を示せ。

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.3010 として計算してよい。

解答例

$\boxed{1}$ (1)　$a_1 = \cos 2 \cos 1$

2 倍角の公式により　$\sin 4 = 2\sin 2\cos 2 = 2\cdot 2\sin 1\cos 1\cdot\cos 2$

したがって　$\dfrac{\sin 4}{4\sin 1} = \cos 2\cos 1$

よって　$a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2) a_n の定義式から　$a_{n+1} = a_n \cos 2^{n+1}$　$\cdots$①

自然数 n に対して $a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ $\cdots$(A) が成り立つことを数学的帰納法により証明する．

［1］ $n = 1$ のとき，(1) の結果より成り立つ．

［2］ $n = k$ のとき

$$a_k = \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$$

が成り立つと仮定すると，① から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1} \times \cos 2^{k+1} \\ &= \frac{2\sin 2^{k+1}\cos 2^{k+1}}{2^{k+2}\sin 1} = \frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1} \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n に対して，(A) が成り立つ．

(3)　$\sin 2^{n+1} \leqq 1$

$\sin 1 > \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　ゆえに　$\dfrac{1}{\sin 1} < \sqrt{2}$

上の 2 式を (A) に適用すると

$$a_n = \frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1} = \sin 2^{n+1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{\sin 1} < 1 \times \frac{1}{2^{n+1}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

よって　$a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$　■

2 (1) $y' = 2x$ より，点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における C の接線のベクトルは　$(1,\ 2p)$
ゆえに，P における C の法線の方程式は

$$1(x-p) + 2p(y-p^2) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{x + 2py - 2p^3 - p = 0}$

(2) (1) で求めた法線が点 $(0,\ a)$ を通るとき

$$2pa - 2p^3 - p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad p\left(p^2 - \frac{2a-1}{2}\right) = 0 \quad \cdots ①$$

① を p に関する 3 次方程式と考えると，この 3 次方程式の実数解の個数が求める法線の本数と一致する．したがって，次の 3 つに場合分けをする．

i) $\dfrac{2a-1}{2} < 0$ すなわち $a < \dfrac{1}{2}$ のとき
すべての実数 p に対して　$p^2 - \dfrac{2a-1}{2} > 0$
したがって，① の実数解は　$p = 0$ の 1 個

ii) $\dfrac{2a-1}{2} = 0$ すなわち $a = \dfrac{1}{2}$ のとき
方程式は　$p^3 = 0$
したがって，① の実数解は　$p = 0$ の 1 個

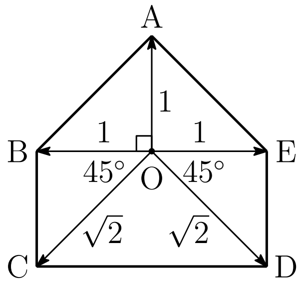
iii) $\dfrac{2a-1}{2} > 0$ すなわち $a > \dfrac{1}{2}$ のとき
方程式は　$p\left(p + \sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right)\left(p - \sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}\right) = 0$
したがって，① の実数解は　$p = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{2a-1}{2}}$ の 3 個

i)，ii)，iii) より，法線の本数は

$$\boldsymbol{a \leqq \frac{1}{2}\ \text{のとき 1 本},\quad a > \frac{1}{2}\ \text{のとき 3 本}}$$

■

3 (1) 右の図から



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 45^\circ \\ &= 1\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{1}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=1$ となる $(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$ の組は，次の 7 組である．

$$(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2}) = (\mathrm{A},\ \mathrm{A}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{C},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{E}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{D})$$

よって，求める確率は $\dfrac{7}{5^2} = \boldsymbol{\dfrac{7}{25}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ゆえに $q_i = -2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$

$q_i \neq 0$ となる P_i は，A，C，D の 3 組である．

したがって，$q_1q_2\cdots q_n \neq 0$ となる確率は $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

よって，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率は $\boldsymbol{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$ ■

4 (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2-1)$ における接線の方程式は

$$y-({a_1}^2-1)=2a_1(x-a_1)\quad\text{すなわち}\quad y=2a_1x-{a_1}^2-1$$

この直線上に $(a_2,\ 0)$ があるから

$$0=2a_1a_2-{a_1}^2-1\quad\text{ゆえに}\quad 2a_1a_2={a_1}^2+1\quad\cdots①$$

$a_1\neq0$ より　$\boldsymbol{a_2=\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}}$

(2) (1) と同様にして　$2a_na_{n+1}={a_n}^2+1\quad\cdots②$

上式において，$a_n>0$ のとき　$a_{n+1}>0$

$a_1>0$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n>0$

② から，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+1}{2a_n}$ が成り立つので

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n^2+1}{2a_n}-1\quad\text{ゆえに}\quad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}\quad\cdots③$$

③ から $a_n>1$ のとき，$a_{n+1}>1$ が成り立つ．

$a_1>1$ であるから，すべての自然数 n について　$a_n>1$

(3) ③ および (2) の結果から

$$a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}<\frac{(a_n-1)^2}{2}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-1)<\left\{\dfrac{1}{2}(a_n-1)\right\}^2$

よって，すべての自然数 n について　$b_{n+1}<{b_n}^2$

(4) (2) の結果から $b_n>0$ であるから，$c_n=\log_{10}b_n$ とおくと，$a_1=2$ より

$$c_1=\log_{10}b_1=\log_{10}\frac{1}{2}(a_1-1)=\log_{10}\frac{1}{2}(2-1)=-\log_{10}2$$

(3) の結果から　$c_{n+1}<2c_n$　ゆえに　$c_n<2^{n-1}c_1=-2^{n-1}\log_{10}2$

$b_n<10^{-12}$ のとき　$c_n<-12$ であるから

$$-2^{n-1}\log_{10}2<-12\quad\text{ゆえに}\quad 2^{n-1}>\frac{12}{\log_{10}2}$$

$\dfrac{12}{\log_{10}2}=39.8\cdots$，$2^5=32$，$2^6=64$ であるから，

求める n の値の一つは，$n-1=6$，すなわち　$\boldsymbol{n=7}$　■

10.9　2009 年 (120 分)

出題分野 1 2 3 4

1 $\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を 1 : 3 に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2) $\angle$QMR の 2 倍と $\angle$QMB の大小を判定せよ。

2 座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) $s = \dfrac{1}{2}$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(3) $s = 1$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

3 1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d，e，f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a + b = c$ となる確率を求めよ。

(2) $a + b = c + d$ となる確率を求めよ。

4 曲線 $y = x^2$ の点 P$(a,\ a^2)$ における接線と点 Q$(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a < 0 < b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

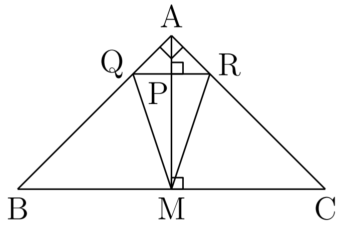
(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形 PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ。

解答例

1 (1) 求める三角比は，三角形の大きさに関係しないので，右の図において $\mathrm{AP}=1$ とすると



$\mathrm{PM}=3$，$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=1$，$\mathrm{QR}=2$，

$\mathrm{MQ}=\mathrm{MR}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{QMR}=\frac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{10+10-4}{2\cdot10}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2) $\mathrm{MB}=4$，$\mathrm{MQ}=\sqrt{10}$，$\mathrm{BQ}=3\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

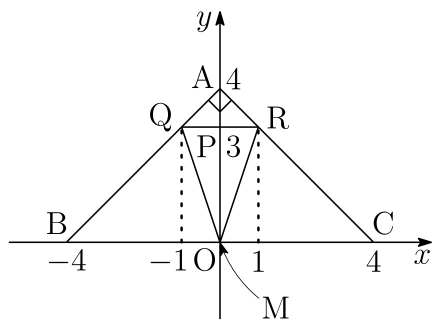
$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot4\cdot\sqrt{10}}=\frac{16+10-18}{2\cdot4\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

(1) の結果から　$\cos2\angle\mathrm{QMR}=2\cos^2\angle\mathrm{QMR}-1=2\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$

ここで　$\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{7}{25}=\frac{5\sqrt{10}-14}{50}=\frac{\sqrt{250}-\sqrt{196}}{50}>0$

よって，$2\angle\mathrm{QMR}$，$\angle\mathrm{QMB}$ は鋭角であるから　$\boldsymbol{2\angle\mathrm{QMR}>\angle\mathrm{QMB}}$

別解 M は BC の中点であるから，M を原点にとる．このとき，求める三角比は，三角形の大きさに関係にしないので，右の図のように



$\mathrm{A}(0,\ 4)$，$\mathrm{B}(-4,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 0)$，

$\mathrm{P}(0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 3)$，$\mathrm{R}(1,\ 3)$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=(-1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(-4,\ 0)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{QMR}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}=\frac{-1\cdot1+3\cdot3}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MB}}|}=\frac{-1\cdot(-4)+3\cdot0}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{4^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

■

$\boxed{2}$ (1) C は直線 AB 上にあるから，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \alpha(2,\ 6) + (1-\alpha)(3,\ 4)\\ &= (3-\alpha,\ 4+2\alpha)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 4)-(2,\ 6) = (1, -2)$ であるから

$$(3-\alpha)\cdot 1 + (4+2\alpha)\cdot(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = -1$$

したがって　　**C(4, 2)**

与式および上の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= s(2,\ 6) + t(3,\ 4) - (4,\ 2)\\ &= (2s+3t-4,\ 6s+4t-2)\end{aligned}$$

よって　$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 &= (2s+3t-4)^2 + (6s+4t-2)^2\\ &= \boldsymbol{40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20}\end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{1}{2}$ を (1) の結果に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 - 10t + 10 = 25\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + 9 \quad (t \geqq 0)$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t = \dfrac{1}{5}$ で最小値 **9** をとる．

(3) $s = 1$ を (1) の結果に代入して

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = 25t^2 + 20t + 20 = 25\left(t + \frac{2}{5}\right)^2 + 16 \quad (t \geqq 0)$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は，$t = 0$ で最小値 **20** をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a+b=c$ を満たす $a<b$ の組は，次の 6 通り

$$\begin{aligned}
&c=3\text{ のとき}\quad (a,\ b)=(1,\ 2)\\
&c=4\text{ のとき}\quad (a,\ b)=(1,\ 3)\\
&c=5\text{ のとき}\quad (a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)\\
&c=6\text{ のとき}\quad (a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)
\end{aligned}$$

このとき，$a>b$ の場合も含めて $6\times 2!$ 通りある．また，d，e，f の並べ方が $3!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{6\times 2!\times 3!}{6!}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

(2) $a+b=c+d$ を満たす $a<b$，$c<d$ の組は，次の 14 通り

$$\begin{aligned}
&a+b=5\text{ のとき}\quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4)\\
&a+b=6\text{ のとき}\quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)\\
&a+b=7\text{ のとき}\quad (a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 6,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 1,\ 6),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1,\ 6,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 1,\ 6),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)\\
&a+b=8\text{ のとき}\quad (a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 6,\ 3,\ 5),\ (3,\ 5,\ 2,\ 6)\\
&a+b=9\text{ のとき}\quad (a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 6,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3,\ 6)
\end{aligned}$$

このとき，$a>b$，$c>d$ の場合も含めて $14\times 2!\times 2!$ 通りある．また，e，f の並べ方が $2!$ 通りあるので，求める確率は

$$\frac{14\times 2!\times 2!\times 2!}{6!}=\mathbf{\frac{7}{45}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$.

点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad \text{ゆえに}\quad y=2ax-a^2\quad \cdots ①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は　$y=2bx-b^2\quad \cdots ②$

①，② を解いて　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{a+b}{2},\ ab}\right)$

直線 PQ の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=(a+b)x-ab$$

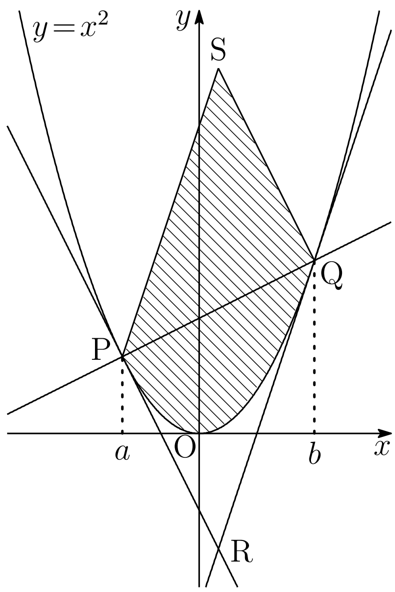
直線 PQ 上の x 座標が $\frac{a+b}{2}$ である点を M とすると　$\mathrm{M}\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a^2+b^2}{2}\right)$

このとき　　$\mathrm{MR}=\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{1}{2}(b-a)^2$

よって　$\triangle\mathrm{PRQ}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\times(b-a)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(b-a)^2\times(b-a)=\boldsymbol{\frac{1}{4}(b-a)^3}$

(2) 直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx$$
$$=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3$$



$\triangle$PSQ の面積は $\triangle$PRQ の面積に等しいので，上式および (1) の結果から，求める図形の面積は

$$\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\boldsymbol{\frac{5}{12}(b-a)^3}$$

(3) $\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ$ のとき，直線 ①，② は直交するので

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

これを ② の結果に代入すると　$\dfrac{5}{12}\left(b + \dfrac{1}{4b}\right)^3$

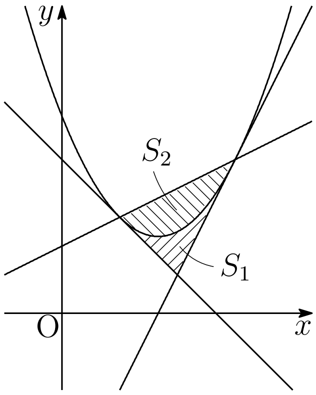
ここで，$b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

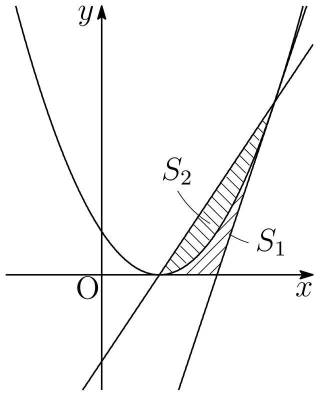
$$b + \frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

よって，求める最小値は　$\dfrac{5}{12}\cdot 1^3 = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

補足

放物線と放物線の 2 本の接線で囲まれた図形の面積 S_1 と，その 2 つの接点を結ぶ直線と放物線で囲まれた図形の面積 S_2 の比は，$S_1 : S_2 = 1 : 2$ である．また，2 本の接線の交点の x 座標は，2 つの接点の中点の x 座標と等しい．





10.10　2010年(120分)

出題分野 [1] [2] [3] [4]

1 三角形ABCの3辺の長さを$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とする。実数$t \geqq 0$を与えたとき，Aを始点としBを通る半直線上に$\mathrm{AP}=tc$となるように点Pをとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2をa，b，c，tを用いて表せ。

(2) 点Pが$\mathrm{CP}=a$を満たすとき，tを求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点Pが辺AB上にちょうど2つあるとき，∠Aと∠Bに関する条件を求めよ。

2 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう1回サイコロを振って，2つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が7以上になった場合は0点とする。この取り決めによって，2回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1) 競技者が常にサイコロを2回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2) 競技者が最初の目が6のときだけ2回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに2回目を振るとよいか。

3 xy平面上に原点Oを中心とする半径1の円を描き，その上半分をCとし，その両端を$\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$とする。C上の2点N，Mを$\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$となるように取る。ただし，$\mathrm{N} \neq \mathrm{B}$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$と置くとき，弦の長さMB及び点Mの座標を$\theta$を用いて表せ。

(2) 点Nからx軸に降ろした垂線をNPとしたとき，PBをθを用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$とおく。条件$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$をtを用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$となるような点Mが唯一つあることを示せ。

4 以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和$1+2+\cdots+n$をnの多項式で表せ。

(2) 和$1^2+2^2+\cdots+n^2$をnの多項式で表せ。

(3) 和$1^3+2^3+\cdots+n^3$をnの多項式で表せ。

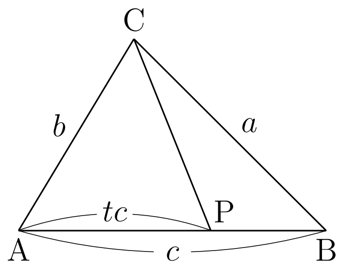
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

△APC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CP}^2 = b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc\cos A$$



したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b{\cdot}tc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ &= b^2 + t^2c^2 - t(b^2+c^2-a^2)\\ &= \boldsymbol{ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{CP} = a$ を (1) の結果に代入すると

$$a^2 = ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2-t)c^2$$

ゆえに　$(t-1)(a^2-b^2+tc^2) = 0$

$t \geqq 0$ に注意して

$$\boldsymbol{b \geqq a} \text{ **のとき** } \boldsymbol{t = 1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}}$$

$$\boldsymbol{b < a} \text{ **のとき** } \boldsymbol{t = 1}$$

(3) AB 上にちょうど 2 つあるのは，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に (2) の条件を満たす t が 2 個あればよい．したがって，(2) の結果から

$b \geqq a$ のとき ($B \geqq A$)

$$\frac{b^2-a^2}{c^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad b^2 < c^2 + a^2 \quad \text{ゆえに} \quad B < 90^\circ$$

よって　$\boldsymbol{A \leqq B < 90^\circ}$　■

2

(1) サイコロを 2 回振るときの得点は，右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{21}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

$$E = 0 \times \frac{21}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} = \mathbf{\frac{35}{18}}$$

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0

(2) (1) の場合において，最初の目が 6 であるとき，2 回目の目に関係なく 6 点であると考えればよいので，得点は右の表のようになる．このとき，確率は，次の表のようになる．

得点	0	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

よって，得点の期待値 E は

得　点

		2回目					
		1	2	3	4	5	6
1回目	1	2	3	4	5	6	0
	2	3	4	5	6	0	0
	3	4	5	6	0	0	0
	4	5	6	0	0	0	0
	5	6	0	0	0	0	0
	6	6	6	6	6	6	6

$$E = 0 \times \frac{21}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \mathbf{\frac{53}{18}}$$

(3) サイコロを投げて 1 回目，2 回目に出た目をそれぞれ i，j とする．1 回目 (最初) の目が n 以上であるとき ($1 \leqq n \leqq 6$)，2 回目を振らないとすると，そのときの得点の期待値 $E(n)$ は

$$E(n) = \frac{1}{6}\sum_{i=n}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1\leqq i<n \\ i+j\leqq 6}} (i+j)$$

また，$E(n+1)$ は ($1 \leqq n \leqq 5$)

$$E(n+1) = \frac{1}{6}\sum_{i=n+1}^{6} i + \frac{1}{36}\sum_{\substack{1\leqq i<n+1 \\ i+j\leqq 6}} (i+j)$$

上の 2 式から，$1 \leqq n \leqq 5$ のとき

$$\begin{aligned} E(n+1) - E(n) &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{n+j\leqq 6}(n+j) \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36}\sum_{k=n+1}^{6} k \\ &= -\frac{1}{6}n + \frac{1}{36} \times \frac{1}{2}(6-n)(n+7) \\ &= \frac{1}{72}(-n^2 - 13n + 42) \\ &= \frac{1}{72}\{42 - n(n+13)\} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} &E(2) - E(1) > 0, \quad E(3) - E(2) > 0, \quad E(4) - E(3) < 0, \\ &E(5) - E(4) < 0, \quad E(6) - E(5) < 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$E(1) < E(2) < E(3) > E(4) > E(5) > E(6)$$

したがって，得点の期待値を最大にするためには，最初に 3 以上の目が出たときに 2 回目を振らなければよい．

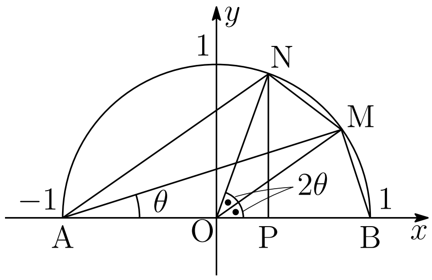
よって，2 回目を振るのは，最初の目が 1 または 2 のときである． ■

3 (1) $\angle\mathrm{AMB} = 90^\circ$ であるから

$$\mathrm{MB} = \mathrm{AB}\sin\theta = \boldsymbol{2\sin\theta}$$

$\angle\mathrm{BOM} = 2\theta$ であるから

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\cos 2\theta},\ \boldsymbol{\sin 2\theta})$$



(2) $\angle\mathrm{BON} = 4\theta$ であるから　$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

したがって　　$\mathbf{PB} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\cos 4\theta}$

(3) (1) の結果から　$\mathrm{MB} = 2t$

(2) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= 1 - \cos 4\theta = 1 - (1 - 2\sin^2 2\theta)\\ &= 2\sin^2 2\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta)^2\\ &= 8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) = 8t^2(1-t^2)\end{aligned}$$

$\mathrm{MB} = \mathrm{PB}$ より

$$2t = 8t^2(1-t^2) \quad \text{すなわち} \quad t(4t^3 - 4t + 1) = 0$$

ここで，$0^\circ < \angle\mathrm{BON} \leqq 180^\circ$ であるから　$0^\circ < \theta \leqq 45^\circ$

したがって　　$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める条件は　　$\boldsymbol{4t^3 - 4t + 1 = 0}$

(4) $f(t) = 4t^3 - 4t + 1 \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおくと　$f'(t) = 12\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$	極小 $1 - \frac{8}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$1 - \sqrt{2}$

したがって，$0 < t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$f(t) = 0$ の解は 1 個存在し，その解を t_0 とすると

$$\sin\theta = t_0 \quad (0 < \theta \leqq 45^\circ)$$

を満たす θ はただ 1 つ存在する．すなわち，$\mathrm{MB} = \mathrm{PB}$ となるような M がただ一つ存在する．■

$\boxed{4}$ (1) $2k = k(k+1) - (k-1)k$ より

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) - (k-1)k\}$$
$$= n(n+1)$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)}$

(2) $3k^2 + 3k = k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ より

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

これに (1) の結果を代入すると

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)(n+2)$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

(3) $4k^3 = k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2$ より

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\{k^2(k+1)^2 - (k-1)^2k^2\}$$
$$= n^2(n+1)^2$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$　■