

平成13年度 九州大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部, 教育学部, 法学部, 経済学部(経済・経営))

問題 1 2 必答, 3 4 5 より1題選択, 6 7 8 より1題選択

1 関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め, その範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a = 0$ のとき, 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め, その範囲を ab 平面上に図示せよ。

2 3次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (4) G は y 軸に平行などんな直線に対しても線対称でないことを示せ。

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。 a_1, \dots, a_n の積を P_n とおく。

- (1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。
- (2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。
- (3) $S_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$ とおく。 S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。
- (4) 各 n について S_n を P_n で表せ。

- 4 (1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。
 (2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。
 (3) n を自然数とする。もしも \sqrt{n} が有理数ならば、 \sqrt{n} は自然数であることを示せ。ただし、有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。
 (4) n が自然数のとき、 $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも2つは無理数であることを示せ。

- 5 r を1より小さい正の定数とする。平面上の点 A を端点とする半直線 l 上の点で A からの距離が $1-r, 1, 1+r$ となるものをそれぞれ B, C, D とする。 BD を直径とする円を描き、 A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする。 m 上の点で A からの距離が $1-r, 1, 1+r$ となるものをそれぞれ E, F, G とする。 E, F を通り l に接する円を描きその接点を P とする。また F, G を通り l に接する円を描きその接点を Q とする。

- (1) A と P との間の距離 AP を r で表せ。
 (2) CF を r で表せ。
 (3) $PQ = CF$ を示せ。

- 6 複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき、どのような図形を描くか。ただし、 \bar{z} は z に共役な複素数を表す。

- (2) 0でない複素数 d に対して

$$dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか。

7 サイコロを n 回振って、出た目を小さい方から順に並べ、第 i 番目を X_i ($i = 1, \dots, n$) とする。

- (1) $n = 7$ のとき、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出たとする。このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ。
- (2) 一般の n に対して、 $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ。
- (3) 一般の n に対して、 X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。
- (4) 一般の n に対して、期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ。

8 m, n を自然数とする。次の算法を考える。

- (a) $i = m, j = n, k = 0$.
- (b) $i = 1$ ならば $\text{Ans} = k + j$ として終了する。
- (c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする。
- (d) $i = [i/2]$. (e) $j = 2 * j$. (f) (b) にもどる。

(ここで、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。)

- (1) $m = 100$ のとき、3 周目と 4 週目の (b) における i, j, k の値を求めよ。たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である。
- (2) 一般の m に対して、(b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ。
- (3) 一般の m に対して、 Ans を求めよ。

解答例

- 1 (1) $f(x)$ を微分すると, $f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b+1 \quad \dots (*)$
 $a \neq 0$ のとき, すべての自然数 x に対して, $f'(x) \geq 0$ となるための条件は
 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると $2a > 0, D \leq 0$

$$D/4 = (a+b)^2 - 2a(b+1) = a^2 + b^2 - 2a \dots \textcircled{1} \text{ により}$$

$$a > 0, (a-1)^2 + b^2 \leq 1$$

$a = 0$ のとき $f(x) = bx^2 + (b+1)x$ となる.

これがつねに増加するためには $b = 0$

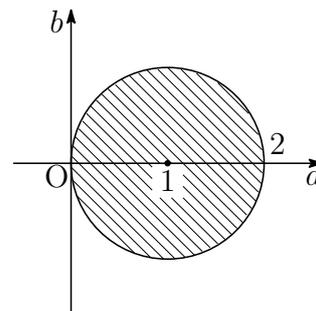
すなわち $f(x) = x$ となり, 条件を満たす.

よって $a > 0$ のとき $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$

$$a = 0 \text{ のとき } b = 0$$

したがって $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$

これを ab 平面上に図示すると, 右の図のような円 $(a-1)^2 + b^2 = 1$ の内部で, 境界線を含む.



- (2) $a = 0$ のとき $f(x) = bx^2 + (b+1)x$
 $b \geq 0$ は, $x > -1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である.
 $f(x)$ を微分すると $f'(x) = 2bx + b+1$
 $b > 0$ のとき, $f'(-1) \geq 0$ であることが条件であるから

$$b > 0, 2b(-1) + b + 1 \geq 0 \text{ すなわち } 0 < b \leq 1$$

$b = 0$ のとき $f(x) = x$ となり, これは条件を満たす.

よって $0 \leq b \leq 1$

- (3) $a \geq 0$ は, $x > -1$ で $f(x)$ がつねに増加するための必要条件である.
 $a = 0$ の場合が (2) であり, $a > 0, D \leq 0$ の場合が (1) である.

したがって, $a > 0, D > 0$ の場合を求める.

(*) より

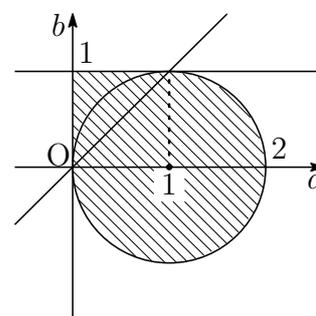
$$f'(x) = 2a \left(x + \frac{a+b}{2a} \right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 2a}{2a}$$

ゆえに $-\frac{a+b}{2a} \leq -1, f'(-1) = -b+1 \geq 0$

$D > 0$ であるから, ①より $a^2 + b^2 - 2a > 0$

これを解いて $a > 0, b \geq a, b \leq 1, (a-1)^2 + b^2 > 1$

求める領域は, 右の図のように (1), (2) の結果および上式をまとめた領域で, 境界線を含む. ■



2 (1) 求める点の座標を (x, y) とすると $\frac{x+X}{2} = p, \frac{y+Y}{2} = q$

よって、求める点の座標は $(2p - X, 2q - Y)$

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \\ &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \left(x + \frac{a}{3}\right) + f\left(-\frac{a}{3}\right) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。G の点 $(-\frac{a}{3}, f(-\frac{a}{3}))$ に関して $y = f(x)$ と対称なグラフは

$$2f\left(-\frac{a}{3}\right) - y = f\left(-\frac{2a}{3} - x\right)$$

ゆえに $y = 2f\left(-\frac{a}{3}\right) - f\left(-\frac{2a}{3} - x\right) \quad \cdots \textcircled{2}$

② のグラフは ① より

$$\begin{aligned} y &= 2f\left(-\frac{a}{3}\right) - \left\{ \left(-\frac{2a}{3} - x + \frac{a}{3}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \left(-\frac{2a}{3} - x + \frac{a}{3}\right) + f\left(-\frac{a}{3}\right) \right\} \\ &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \left(x + \frac{a}{3}\right) + f\left(-\frac{a}{3}\right) \quad \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

①, ②' は一致するから、G は点 $(-\frac{a}{3}, f(-\frac{a}{3}))$ に関して対称である。

(3) 求める点の座標を (x, y) とすると $\frac{x+X}{2} = p, Y = y$

よって、求める点の座標は $(2p - X, Y)$

- (4) G が y 軸に平行なある直線 l に関して対称であるとき、G と l の交点を P とする。P における G の接線の傾きが 0 でないと仮定すると、G は l に関して対称であるから、G は P において自己交差し、G が 3 次関数であることに反する。したがって、G は P において $f'(x) = 0$ となる。G 上に $f'(x) = 0$ となる P 以外の点 P' が存在すると仮定すると、 l に関して P' と対称な点 P'' が存在することになり、G 上に $f'(x) = 0$ となる点が 3 点存在することになる。このことは G が 3 次関数であることに反する。したがって、 $f'(x) = 0$ となる点は P に限り、G は単調増加の関数である。G 上に P と異なる点 Q をとり、 l に関して Q と対称な点 Q' が存在する。このとき、3 点 Q, P, Q' を結ぶ曲線部分は単調増加ではないので、矛盾を生じる。よって、題意は成立する。 ■

3 (1) $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \cdots$ ① より

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} \geq a_n$$

$a_1 = 2$ であるから、すべての自然数 n に対して $a_n \geq 2 \cdots$ ②

よって、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

(2) ① から $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) \cdots$ ③

②, ③ から, $\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_n$ が成り立つから

$$\frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} = a_1, \quad \frac{a_3 - 1}{a_2 - 1} = a_2, \quad \cdots, \quad \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = a_n$$

これらの式の辺々を掛けて

$$\begin{aligned} \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \times \frac{a_3 - 1}{a_2 - 1} \times \cdots \times \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} &= a_1 a_2 \cdots a_n \\ \frac{a_{n+1} - 1}{a_1 - 1} &= P_n \end{aligned}$$

$a_1 = 2$ であるから, $a_{n+1} = P_n + 1$ が成り立つ.

(3) $a_1 = 2, a_2 = a_1^2 - a_1 + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$$a_3 = a_2^2 - a_2 + 1 = 3^2 - 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - a_3 + 1 = 7^2 - 7 + 1 = 43$$

$$S_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{a_3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{a_4} = \frac{41}{42} + \frac{1}{43} = \frac{1805}{1806}$$

(4) ②, ③ より $\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$

(2) の結果から $\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$ ゆえに $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n}$

したがって $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_n}$

上式の両辺に $\frac{1}{a_1}$ を加えると

$$S_n = \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{P_n} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{P_n}$$



4 (1) a, b は 1 以外に共通の約数をもたないことである。

(2) a, b を素因数分解して

$$a = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k}, \quad b = b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_l^{n_l}$$

とする. a, b が互いに素であるならば, a_1, a_2, \dots, a_k と b_1, b_2, \dots, b_l のどの 2 つも一致しない. 上式から

$$a^2 = (a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k})^2, \quad b^2 = (b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_l^{n_l})^2$$

このとき, a^2 は b_1, b_2, \dots, b_l で割れない. また, b^2 も a_1, a_2, \dots, a_k で割れない. よって, a^2 と b^2 は互いに素である.

(3) \sqrt{n} が有理数であるとき $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ (p, q は互いに素)

$$\text{したがって} \quad n = \frac{p^2}{q^2}$$

上式において, 左辺は自然数であり, p, q は互いに素であるから

$$q^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad q = 1, \quad \sqrt{n} = p$$

よって, \sqrt{n} が有理数ならば, \sqrt{n} は自然数である.

(4) \sqrt{n} が有理数ならば, \sqrt{n} は自然数であるから, $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ の中に有理数が 2 個以上あれば, それらの差で整数になるものがある.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < 1$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{3} + 1} < 1$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} < 1$$

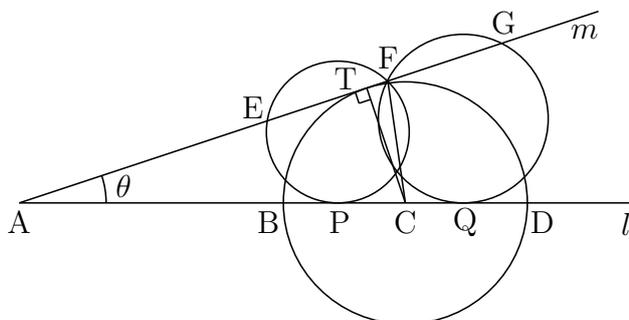
上の 3 式より, $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち 2 個以上が有理数となることはない. したがって, 有理数は 1 個以下である.

よって, $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 個が無理数である. ■

5 (1) 方べきの定理により

$$AP^2 = AE \cdot AF = (1-r) \cdot 1 = 1-r$$

よって $AP = \sqrt{1-r}$



(2) $\theta = \angle FAC$ において, $\triangle FAC$ に余弦定理を適用すると

$$CF^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad CF = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$$

$CT = AC \sin \theta$ より

$$r = 1 \cdot \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - r^2}$$

よって $CF = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-r^2}}$

(3) 方べきの定理により

$$AQ^2 = AF \cdot AG = 1 \cdot (1+r) = 1+r \quad \text{ゆえに} \quad AQ = \sqrt{1+r}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} PQ &= AQ - AP = \sqrt{1+r} - \sqrt{1-r} \\ PQ^2 &= (\sqrt{1+r} - \sqrt{1-r})^2 \\ &= (1+r) - 2\sqrt{1+r}\sqrt{1-r} + (1-r) \\ &= 2 - 2\sqrt{1-r^2} \end{aligned}$$

したがって $PQ = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-r^2}}$

よって, 上式および (2) の結果から $PQ=CF$ ■

6 (1) $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ (a, c は実数) より

$$a^2z\bar{z} + a(\bar{b}z + b\bar{z}) + b\bar{b} = b\bar{b} - ac$$

ゆえに $(az + b)(a\bar{z} + \bar{b}) = |b|^2 - ac$

したがって $|az + b|^2 = |b|^2 - ac$

$$|b|^2 - ac > 0 \text{ より } \left| z + \frac{b}{a} \right| = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$$

よって, z は中心 $-\frac{b}{a}$, 半径 $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$ の円を描く.

(2) $dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1)$ より

$$i(d - \bar{d})z\bar{z} + idz - i\bar{d}\bar{z} = 0$$

i) $d \neq \bar{d}$ のとき (d は虚数)

$$a = i(d - \bar{d}), \quad b = -i\bar{d} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおくと

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} = 0$$

a は実数であり, ①と $c = 0$ を (1) の結果に代入すると

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-i\bar{d}}{i(d - \bar{d})} = \frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}$$

$$\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|-i\bar{d}|}{|i(d - \bar{d})|} = \frac{|d|}{|d - \bar{d}|}$$

よって, z は中心 $\frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}$, 半径 $\frac{|d|}{|d - \bar{d}|}$ の円を描く.

ii) $d = \bar{d}$ のとき (d は実数)

$$d = \bar{d} \neq 0 \text{ より } z(\bar{z} + 1) = \bar{z}(z + 1)$$

したがって $z = \bar{z}$ ゆえに, z は実数である.

よって, z は実軸上の直線を描く. ■

7 (1) 次の6通りに分類できる.

$$\begin{aligned}
 X_1 X_2 33355 \text{ のとき} & \quad X_4 = 3 \\
 X_1 333 X_5 55 \text{ のとき} & \quad X_4 = 3 \\
 X_1 33355 X_7 \text{ のとき} & \quad X_4 = 3 \\
 333 X_4 X_5 55 \text{ のとき} & \quad X_4 = 3, 4, 5 \\
 333 X_4 55 X_7 \text{ のとき} & \quad X_4 = 3, 4, 5 \\
 33355 X_6 X_7 \text{ のとき} & \quad X_4 = 5
 \end{aligned}$$

よって, X_4 のとりうる値は **3, 4, 5**

$$(2) P(X_1 = 2) = P(X_1 \geq 2) - P(X_1 \geq 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(3) 1 \leq k \leq 6 \text{ のとき} \quad P(X_1 = k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
 E(X_1) &= \sum_{k=1}^6 k P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^6 k \left\{ \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \left(\frac{6-k}{6}\right)^n \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^6 k \left(\frac{7-k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^6 k \left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\
 &= \sum_{k=0}^5 (k+1) \left(\frac{6-k}{6}\right)^n - \sum_{k=0}^5 k \left(\frac{6-k}{6}\right)^n \\
 &= \frac{1}{6^n} \sum_{k=0}^5 (6-k)^n \\
 &= \frac{1}{6^n} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n)
 \end{aligned}$$

(4) $2 \leq k \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n \leq k) - P(X_n \leq k-1) \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

$P(X_n = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ であるから, 上式は $k = 1$ のときも成り立つ.

ゆえに, $1 \leq k \leq 6$ のとき $P(X_n = k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) = \sum_{k=1}^6 k \left\{ \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{k=1}^6 k \left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^6 k \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \\ &= 6 + \sum_{k=1}^5 k \left(\frac{k}{6}\right)^n - \sum_{k=1}^5 (k+1) \left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{6}\right)^n \\ &= 6 - \frac{1}{6^n} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \end{aligned}$$

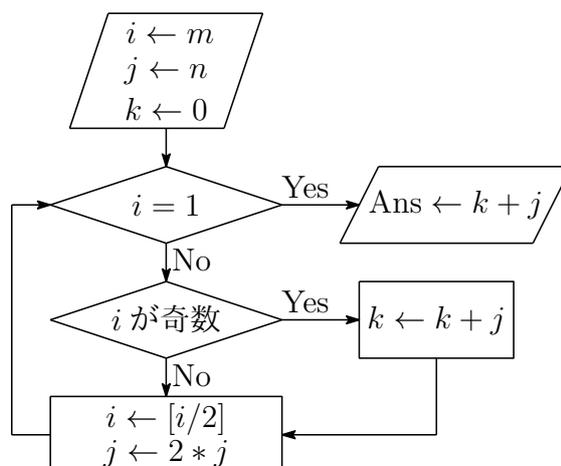
よって, 上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_n) &= E(X_1) + E(X_n) \\ &= \frac{1}{6^n} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n) \\ &\quad + 6 - \frac{1}{6^n} (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n) \\ &= \mathbf{7} \end{aligned}$$



8 (1) 右のフローチャートから

	i	j	k
1 周目	100	n	0
2 周目	50	$2n$	0
3 周目	25	$4n$	0
4 周目	12	$8n$	$4n$



(2) i) i が奇数のとき, $[i/2] = \frac{i-1}{2}$ であるから

$$k \leftarrow k + j, i \leftarrow \frac{i-1}{2}, j \leftarrow 2 * j \text{ より}$$

$$i * j + k = \frac{i-1}{2} * (2 * j) + (j + k) = i * j + k$$

ii) i が偶数のとき, $[i/2] = \frac{i}{2}$ であるから

$$i \leftarrow \frac{i}{2}, j \leftarrow 2 * j \text{ より}$$

$$i * j + k = \frac{i}{2} * (2 * j) + k = i * j + k$$

i), ii) より, $i * j + k$ は一定である.

(3) 1 周目の $i * j + k$ は $m * n + 0 = mn$

この値は i の値に関係なく不変であり, $i = 1$ のとき $k + j$ となる.

したがって, 求める Ans は mn ■