平成12年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

$\boxed{\mathbf{1}}$〜$\boxed{\mathbf{2}}$必答，$\boxed{\mathbf{3}}$〜$\boxed{\mathbf{5}}$から1題選択，$\boxed{\mathbf{6}}$〜$\boxed{\mathbf{8}}$から1題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ 原点をO，直線 $x=1$ 上の動点をP，中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C とする。線分OPと C との交点で原点でないものをQとし，OP上に $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ を満たす点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ をとる。

(1) 点Pを動かしたとき，点Rの軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。

(2) m，n を100以下の自然数として，点 $\left(\dfrac{1}{m},\ \dfrac{1}{n}\right)$ が(1)で求めた曲線上にあるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 p，q，r を係数とする関数 $f(x)=px^2+qx+r$ をここでは高々2次の関数とよぶことにする。また，a，b，c は異なる3つの実数とする。

(1) $f(a)=1$，$f(b)=0$，$f(c)=0$ を満たす高々2次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 高々2次の関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(a)=g(a),\quad f(b)=g(b),\quad f(c)=g(c)$$

を満たすならば $f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3) $h(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とすると，

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

であることを示せ。

3 係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは**M 多項式**とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき**合同**であるという。例えば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式が共に x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき**可約**であるといい，可約でないとき**既約**であるという。例えば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1) x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3) x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。

4 下記の各命題についてその真偽を記し，理由を述べよ。

(1) $\sqrt{7}$ は無理数である。

(2) 和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a，b は，共に有理数である。

(3) 無理数は何乗かすると有理数になる。ただし，ここで何乗かするというのは，n を 1 以上のある整数として n 乗することである。

(4) 和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a，b に対して，a^5+b^5 は有理数である。

5 正五角形の頂点を反時計回りに A，B，C，D，E とし，線分 AC と BD の交点を F，BD と CE の交点を G，CE と DA の交点を H，DA と EB の交点を I，EB と AC の交点を J とする。

(1) 三角形 ABF と三角形 AFH は合同な三角形であることを示せ。

(2) 三角形 ABJ の面積と五角形 FGHIJ の面積はどちらが大きいか検討せよ。

(3) 星形 AJBFCGDHEIA の面積と，正五角形 ABCDE からその星形を除いた残りの部分の面積は，どちらが大きいか検討せよ。

$\boxed{6}$ 表のでる確率が $\dfrac{1}{2}$ の公平な（歪みのない）コインが n 枚，表のでる確率が $\dfrac{3}{4}$ の歪んだコインが1枚ある。公平なコインはそれぞれを2回投げ，2回共に表がでた場合にそのコインを用意した箱に入れる。また，歪んだコインは n 回投げて n 回すべてが表であったらその箱に入れる。全部のコインについてこれを行ったとき，箱に入っているコインの枚数を X とする。

(1) $n=2$ のとき，$P(X \geqq 1)$ と X の期待値を求めよ。

(2) $P(X \geqq 1) > \dfrac{13}{16}$ となる最小の n を求めよ。

(3) X の期待値と分散を n を用いて表せ。

$\boxed{7}$ 1から n までの数で m 個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として，下記のものを考えた。ただし，S は順列を表し，算法の開始の時は数を含まない (S は空であるという) とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法　［以下 (a)，(b)，(c)，$\cdots$ の順に行う］

(a) S を空とし，$j=n-m+1$ とする。

(b) 1から j までの数からデタラメに数 t を選ぶ。

(c) t が順列 S に入っているならば，t の直後に j を入れ，そうでないならば，t を S の先頭に入れる。

(d) j を1増やす。

(e) $j \leqq n$ ならば，(b) へもどる。$j > n$ ならば，終了する。

(1) $n=10$，$m=6$ の場合で (b) において選ばれた数 t は順に4，3，6，3，2，5であった。その結果として得られる順列 S はどのような順列か。

(2) $n=10$，$m=6$ の場合で結果として得られた順列 S が 8 2 7 5 9 3 であった。(b) で選ばれた数 t の列は何であったか。

(3) 算法の結果として得られた順列 S から (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

$\boxed{8}$ 空間内に3点 A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) をとる。

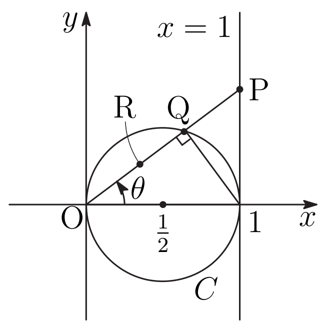
(1) 空間内の点Pが $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点Pはある定点Qから一定の距離にあることを示せ。

(2) (1) における定点Qは3点A，B，Cを通る平面上にあることを示せ。

(3) (1) におけるPについて，四面体ABCPの体積の最大値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 線分 OP と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $(-90^\circ < \theta < 90^\circ)$



$$\mathrm{OP} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \mathrm{OQ} = \cos\theta,$$
$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} - \mathrm{OQ}$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$\mathrm{OR} = \mathrm{PQ}$ であるから，$\mathrm{R}(x,\ y)$ は

$$x = \mathrm{OR}\cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta = \sin^2\theta$$
$$y = \mathrm{OR}\sin\theta, = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}$$

上の 2 式から，θ を消去すると

$$y^2 = \frac{\sin^6\theta}{\cos^2\theta} = \frac{(\sin^2\theta)^3}{1-\sin^2\theta} = \frac{x^3}{1-x} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y^2 = \frac{x^3}{1-x}}$$

補足 $t = \tan\theta$ とすると，$\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ より，次の媒介変数表示もある．

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \sin^2\theta\tan\theta = \frac{t^2}{1+t^2}\cdot t = \frac{t^3}{1+t^2}$$

(2) (1) の結果に $x = \dfrac{1}{m}$，$y = \dfrac{1}{n}$ を代入すると

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^3}{1-\frac{1}{m}} \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = m^2(m-1)$$

m，n は自然数であるから　　$n = m\sqrt{m-1}$

このとき，m，n は 100 以下の自然数であることに注意すると

$$m = 1^2+1,\ 2^2+1,\ 3^2+1,\ 4^2+1$$

よって　$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 2),\ (5,\ 10),\ (10,\ 30),\ (17,\ 68)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(b)=0$，$f(c)=0$ であるから

$$f(x)=p(x-b)(x-c) \quad \cdots ①$$

とおける．また，$f(a)=0$ であるから

$$p(a-b)(a-c)=1 \quad \text{ゆえに} \quad p=\frac{1}{(a-b)(a-c)} \quad \cdots ②$$

①，② より $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}}$

(2) $\lambda(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，$f(x)$，$g(x)$ は高々2次の関数であるから，$\lambda(x)$ は高々2次の関数である．

このとき，$\lambda(a)=0$，$\lambda(b)=0$ であるから，定数 k を用いて

$$\lambda(x)=k(x-a)(x-b) \quad \cdots ③$$

とおける．また，$\lambda(c)=0$ であるから

$$k(c-a)(c-b)=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=0 \quad \cdots ④$$

③，④ より，$\lambda(x)=0$　よって　$f(x)=g(x)$

(3) 高々2次の関数 $\mu(x)$ を

$$\mu(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$$

とすると，$\mu(a)=\mu(b)=\mu(c)=0$ であるから　$\mu(x)=0$

したがって　$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1 \quad \cdots (*)$$

$$\begin{aligned} h(x)&=(x-a)(x-b)(x-c) \\ &=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc \end{aligned}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} h'(x)&=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca \\ &=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b) \end{aligned}$$

ゆえに　$h'(a)=(a-b)(a-c)$，$h'(b)=(b-a)(b-c)$，$h'(c)=(c-a)(c-b)$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\frac{(x-b)(x-c)}{h'(a)}+\frac{(x-a)(x-c)}{h'(b)}+\frac{(x-a)(x-b)}{h'(c)}=1$$

さらに，この両辺を $h(x)$ で割ることにより，次式を得る．

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 以下，合同を記号「≡」で表すことにする．

1 次の M 多項式は，x と $x+1$ であるから，可約な 2 次の M 多項式は

$$xx = x^2, \quad x(x+1) = x^2 + x, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \equiv x^2 + 1$$

すべての 2 次の M 多項式は

$$x^2, \quad x^2+1, \quad x^2+x, \quad x^2+x+1 \quad \cdots (*)$$

であるから，x^2+x+1 は既約な 2 次の M 多項式である．

(2) $(*)$ から，3 次の可約な M 多項式は

$$\begin{aligned} &xx^2 = x^3, && x(x^2+1) = x^3+x, \\ &x(x^2+x) = x^3+x^2, && x(x^2+x+1) = x^3+x^2+x, \\ &(x+1)x^2 = x^3+x^2, && (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1, \\ &(x+1)(x^2+x) \equiv x^3+x, && (x+1)(x^2+x+1) \equiv x^3+1 \end{aligned}$$

したがって，3 次の既約な既約な M 多項式は　x^3+x+1，x^3+x^2+1

よって，3 次以下の既約な M 多項式は，これと (1) の結果により

$$\boldsymbol{x, \quad x+1, \quad x^2+x+1, \quad x^3+x+1, \quad x^3+x^2+1}$$

(3) x^4+x+1 が 1 次と 3 次の M 多項式の積と合同であるとすると，定数項に注意して (a，b は 0 または 1)

$$\begin{aligned} x^4+x+1 &\equiv (x+1)(x^3+ax^2+bx+1) \\ &= x^4+(a+1)x^3+(a+b)x^2+(b+1)x+1 \end{aligned}$$

上式から　　$a+1$ は偶数，　$a+b$ は偶数，　$b+1$ は奇数

これを満たす a，b は存在しない．

x^4+x+1 が 2 つの 2 次の M 多項式の積と合同であるとすると，2 次の M 多項式の一方が可約であるなら，1 次と 3 次の M 多項式の積で表されることになる．したがって，ともに既約な 2 次の M 多項式の積について調べればよい．(1) の結果から

$$(x^2+x+1)^2 \equiv x^4+x^2+1$$

よって，x^4+x+1 は既約である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) **真**である．

$\sqrt{7}$ が有理数であるとすると，互いに素である 2 つの整数 m，n を用いて

$$\sqrt{7} = \frac{m}{n} \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = 7n^2$$

このとき m は 7 で割り切れるから，整数 k を用いて $m = 7k$ とおける．これを上の第 2 式に代入すると

$$(7k)^2 = 7n^2 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = 7k^2$$

これから，n も 7 で割り切れることなり，仮定に反する．

よって，$\sqrt{7}$ は無理数である．

(2) **偽**である．

(反例) $a + b = 2$，$ab = -6$ をみたす 2 数 a，b を次のようにとれる．

$$a = 1 + \sqrt{7}, \quad b = 1 - \sqrt{7}$$

(3) **偽**である．

次式をみたす 2 つの整数からなる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．

$$(1 + \sqrt{7})^n = a_n + b_n\sqrt{7} \quad \cdots (*)$$

このとき，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ であり，

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{7})^{n+1} &= (1 + \sqrt{7})(a_n + b_n\sqrt{7}) \\ &= (a_n + 7b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{7}\end{aligned}$$

したがって　　$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 7b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n$

上の漸化式より，a_n，b_n は正の整数である．

$(*)$ により，$(1 + \sqrt{7})^n$ は無理数である．

(4) **真**である．

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ より，$a^2 + b^2$ は有理数.

また，$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2) - ab(a + b)$ より，$a^3 + b^3$ は有理数.

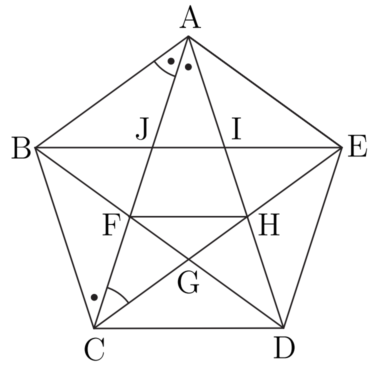
さらに，$a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - (ab)^2(a + b)$ より，$a^5 + b^5$ は有理数.

補足 $a + b$，ab，$a^2 + b^2$ が有理数であり，すべての自然数 n について

$$a^{n+2} + b^{n+2} = (a + b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$$

であるから，$a^n + b^n$ は有理数である．

$\boxed{5}$ (1) 正五角形は円に内接する．BC $=$ AE であるから，円周角の性質により



$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{ACE} \quad \cdots ①$$

同様に，AB $=$ CD より

$$\angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{CAD} \quad \cdots ②$$

① より　AB//HC，　② より　BC//AH

また，AB $=$ BC より，四角形 ABCH はひし形であるから

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AH} \quad \cdots ③$$

$\triangle$BCF $\equiv$ DEH より，FC $=$ HD であるから

$$\mathrm{AF} = \mathrm{AH} \quad \cdots ④$$

BC $=$ CD であるから，円周角の性質により

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD} \quad \cdots ⑤$$

$\triangle$ABF と $\triangle$AFH について，③，④，⑤ により　$\triangle$ABF $\equiv$ $\triangle$AFH

別解 二等辺三角形 ABC について，$A = C = \theta$ とおくと，$B = 3\theta$．
$5\theta = 180^\circ$，$\angle\mathrm{ABF} = 2\theta$ であるから

$$\angle\mathrm{AFB} = 180^\circ - (\angle\mathrm{BAF} + \angle\mathrm{ABF}) = 2\theta$$

したがって，AB $=$ AF．これと ④，⑤ より，$\triangle$ABF $\equiv$ $\triangle$AFH

(2) $\triangle$ABJ $=$ $\triangle$ABF $-$ $\triangle$BFJ，四角形 FHIJ $=$ $\triangle$AFH $-$ $\triangle$AJI
(1) の結果から $\triangle$ABF $=$ $\triangle$AFH，また $\triangle$BFJ $=$ $\triangle$AJI であるから

$$\triangle\mathrm{ABJ} = \text{四角形 FHIJ} < \text{五角形 FGHIJ}$$

(3) $\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 1$，$\mathrm{BF} = \mathrm{FC} = t$ とおくと，$\mathrm{AC} = 1 + t$

$\triangle\mathrm{ABF} \backsim \mathrm{ACD}$ より，$\mathrm{AB} : \mathrm{BF} = \mathrm{AC} : \mathrm{CD}$ であるから

$$1 : t = 1 + t : 1 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 + t - 1 = 0$$

$t > 0$ に注意して，これを解くと　$t = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{DAE} = \theta$ とし，正五角形 ABCDE，星型，星形を除いた部分の面積をそれぞれ S，T，U とすると，$t^2 = 1 - t$ により

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD} + \triangle\mathrm{ADE} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot (1 + t)\sin\theta \times 2 + \frac{1}{2}(1 + t)^2 \sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(t^2 + 4t + 3)\sin\theta = \frac{1}{2}(3t + 4)\sin\theta \\ U &= 5 \times \triangle\mathrm{ABJ} \\ &= 5 \times \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot t\sin\theta = \frac{5}{2}t\sin\theta \end{aligned}$$

$T = S - U$ であるから

$$\begin{aligned} U - T &= U - (S - U) = 2U - S \\ &= 2 \times \frac{5}{2}t\sin\theta - \frac{1}{2}(3t + 4)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(7t - 4)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(7 \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - 4\right)\sin\theta \\ &= \frac{7\sqrt{5} - 15}{4}\sin\theta = \frac{\sqrt{245} - \sqrt{225}}{4}\sin\theta > 0 \end{aligned}$$

よって，**星形を除いた部分の面積は，星形の面積より大きい**.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 1枚の正しいコインが箱に入る確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

歪んだコインが箱に入る確率は $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$

したがって　$P(X=0)=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\dfrac{9}{16}\right)=\dfrac{63}{256}$

よって　$P(X\geqq 1)=1-P(X=0)=1-\dfrac{63}{256}=\boldsymbol{\dfrac{193}{256}}$

また，X の期待値は　$2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{9}{16}=\boldsymbol{\dfrac{17}{16}}$

(2) $P(X=0)=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^n\times\left\{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n}$

ゆえに　$P(X\geqq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n}$

$P(X\geqq 1)>\dfrac{13}{16}$ のとき　$1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n}>\dfrac{13}{16}$

整理すると　$\left\{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{1}{4}\right\}\left\{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{3}{4}\right\}>0$

$n=1$ は上式を満たさないから，$n>1$ のとき，$\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{3}{4}<0$ に注意して

$$\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-\dfrac{1}{4}<0 \quad \text{ゆえに} \quad 4^{n-1}>3^n$$

右の表から，これをみたす最小の n は

$$\boldsymbol{n=5}$$

n	2	3	4	5
4^{n-1}	4	16	64	256
3^n	9	27	81	243

(3) X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$E(X)=n\cdot\frac{1}{4}+1\left(\frac{3}{4}\right)^n=\boldsymbol{\frac{n}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=n\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{3n}{16}+\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}}\end{aligned}$$

補足 二項分布 $B(n,\ p)$ にしたがう確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$E(X)=np,\quad V(X)=np(1-p)$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $n=10$，$m=6$ より，$j=n-m+1=10-6+1=5$

j	t	S	
5	4	4	$\leftarrow j=5$，$t=4$，S には t の 4 が入る
6	3	34	$\leftarrow j=j+1$，$t=3$ は S にないから S の先頭
7	6	634	$\leftarrow j=j+1$，$t=6$ は S にないから S の先頭
8	3	6384	$\leftarrow j=j+1$，$t=3$ は S にあるから 3 の直後に j
9	2	26384	$\leftarrow j=j+1$，$t=2$ は S にないから S の先頭
10	5	526384	$\leftarrow j=j+1$，$t=5$ は S にないから S の先頭

よって，S は　**526384**

(2) $n=10$，$m=6$ より，$j=n-m+1=10-6+1=5$
(一番下の段から表を完成していく)

j	t	S	
5	3	3	$\leftarrow j=5$，$t=3$，S には t の 3 が入る
6	5	53	$\leftarrow j=j+1$，$t=5$ は S にないから S の先頭
7	7	753	$\leftarrow j=j+1$，$t=7$ は S にないから S の先頭
8	2	2753	$\leftarrow j=j+1$，$t=2$ は S にないから S の先頭
9	5	27593	$\leftarrow j=j+1$，$t=5$ は S にあるから 5 の直後に j
10	8	827593	$\leftarrow j=j+1$，$t=8$ は S にないから S の先頭

よって，t の列は　$\mathbf{3, 5, 7, 2, 5, 8}$

(3) t の列を T とする．求める算法は

(a) T を空とし，$j=n+1$ とする．

(b) j を 1 減らす

(c) j が S の先頭以外に入っているならば，S の中の j の直前の数を T の先頭に入れ，j を S から除く．そうでないならば，S の先頭の数を T の先頭に移動する．

(d) $j>n-m+1$ ならば，(b) へもどる．
$j \leqq n-m+1$ ならば，終了する．

$\boxed{8}$ (1) 3点A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) の座標より，
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ であることに注意して

$$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$$
$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=0$$
$$3|\overrightarrow{OP}|^2-(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}=0$$

ゆえに $\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{6}\right|^2=\left|\dfrac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{6}\right|^2$ $\cdots$①

ここで，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{6}$ とおくと $\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2=\frac{49}{36}$$

① より $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2$ すなわち $|\overrightarrow{QP}|=\dfrac{7}{6}$

よって，P は $Q\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ を中心とする半径 $r=\dfrac{7}{6}$ の球面上にある．

別解 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$ より $\overrightarrow{AP}\cdot(3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=0$
線分 BC を 2 : 1 に内分する点を D とすると $3\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$
したがって $\overrightarrow{AP}\cdot(3\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OD})=0$ すなわち $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}=0$
P は AD を直径とする球面上にあり，その中心を Q，半径を r とすると

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})$$
$$r^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}|^2=\left|\frac{-3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{6}\right|^2=\frac{9\cdot1^2+2^2+4\cdot3^2}{36}=\frac{49}{36}$$

(2) $$\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{6}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
よって，Q は 3 点 A，B，C を通る平面上にある．

(3) $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 3)$ より

$$|\overrightarrow{AB}|^2=5,\quad |\overrightarrow{AC}|^2=10,\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$$

ゆえに $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1^2}=\dfrac{7}{2}$
QP が平面 ABC に垂直であるとき，四面体 ABCP の体積は最大となり，

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{6}=\mathbf{\frac{49}{36}}$$