平成 11 年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

$\boxed{1}$〜$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$〜$\boxed{5}$ から 1 題選択，$\boxed{6}$〜$\boxed{8}$ から 1 題選択

$\boxed{\mathbf{1}}$ k を実数として，$f(x) = x^2 - 2kx + \dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$ とおく。方程式 $f(x) = 0$ が実数解 α, β $(\alpha < \beta)$ をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) α，β が $\alpha \leqq 1 \leqq \beta$ をみたすように k の値の範囲を定めよ。

(2) (1) の場合に $f(x)$ の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直線錐の側面上で 2 点 A，B を結ぶ最短の道を ℓ とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問に答えよ。

(1) 直円錐の展開図をもちいて ℓ の長さを求めよ。

(2) ℓ 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) P から線分 OQ に下した垂線を PR とし，A から線分 OQ に下した垂線を AS とする。$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = pa_n - p,$$
$$b_1 = q,\ b_{n+1} = b_n + (-1)^{n+1}q$$

と定める。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする。m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数 a，b は $0 < a < b$ をみたすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の (1)，(2) では，それぞれ，その目的を実行するための BASIC によるプログラムの始めの部分が与えられている。方針を記述してから，プログラムの残りの部分を完成せよ。ただし，変数 A(1)，A(2) 等には座標 a_1，a_2 等が入力されるものとする。

注意：(1) のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが，DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい。そのときは，行番号 10 の文は消去し，行番号 20，30 の文は

```
20  INPUT  A1, A2
30  INPUT  P1, P2
```

で置き換えるものとする。(2) についても同様である。

(1) 座標平面上の原点 O と異なる点 A$(a_1,\ a_2)$ について，任意の点 P$(p_1,\ p_2)$ から直線 OA への距離を表示すること。

```
10  DIM    A(2), P(2)
20  INPUT  A(1), A(2)
30  INPUT  P(1), P(2)
```

(2) 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ を座標平面上の相異なる点とし，直線 AB で平面を二分する。点 P$(p_1,\ p_2)$，Q$(q_1,\ q_2)$ がこの直線の同じ側にあるときは 1 を，異なる側にあるときは -1 を，P，Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること。ただし，ある点と直線との距離が，与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする。

```
10  DIM    A(2), B(2), P(2), Q(2)
20  EPS = 0.00001
30  INPUT  A(1), A(2)
40  INPUT  B(1), B(2)
50  INPUT  P(1), P(2)
60  INPUT  Q(1), Q(2)
```

6 A，B の 2 名で次のゲームを行う。A，B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつずつ書かれた n 枚のカードを持っている (裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にしてならべる。B は，A がならべたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつならべる。次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするとき次の問いに答えよ。

(1) $n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ。

(2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする。

$$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$$

と表すとき，a_k $(k=1,2,3,\cdots,n)$ を求めよ。

(3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

7 k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha \neq \beta)$ とする。i を虚数単位として次の問に答えよ。

(1) $|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2) 複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする。$\angle$APB が直角になるような k の値を求めよ。

8 大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

をみたすように与えらえているとする。また空間ベクトル $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ が

$$\begin{array}{lll} \vec{a}\cdot\vec{d}=1, & \vec{b}\cdot\vec{d}=0, & \vec{c}\cdot\vec{d}=0, \\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0, & \vec{b}\cdot\vec{e}=1, & \vec{c}\cdot\vec{e}=0, \\ \vec{a}\cdot\vec{f}=0, & \vec{b}\cdot\vec{f}=0, & \vec{c}\cdot\vec{f}=1 \end{array}$$

をみたすとき，点 D$(\vec{d})$，E$(\vec{e})$，F$(\vec{f})$ および原点 O について次の問に答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 x，y，z を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) ベクトル $\vec{d}$，$\vec{f}$，$\vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(1) \leqq 0$ をみたせばよいから

$$1 - 2k + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3) \leqq 0$$

整理すると　$(2k-1)(k-2) \leqq 0$

これを解いて　$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq k \leqq 2}$

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2kx + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3) \\ &= (x-k)^2 - k^2 + \frac{1}{5}(2k-1)(4k-3) \\ &= (x-k)^2 + \frac{1}{5}(3k^2 - 10k + 3) \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ は $x = k$ のとき最小値 $\frac{1}{5}(3k^2 - 10k + 3)$ をとる．

(1) で求めた結果から，$g(k) = \frac{1}{5}(3k^2 - 10k + 3)$ $(\frac{1}{2} \leqq k \leqq 2)$ とおくと

$$g(k) = \frac{3}{5}\left(k - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{15}$$

したがって，$g(k)$ の最小値は　$g\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{16}{15}$

また，k の値の範囲の中央を m とすると　$m = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \frac{5}{4}$

$m < \frac{5}{3}$ であるから，$g(k)$ の最大値は　$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

よって，求める $f(x)$ の最小値 $g(k)$ のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{16}{15} \leqq g(k) \leqq -\frac{1}{4}}$$

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

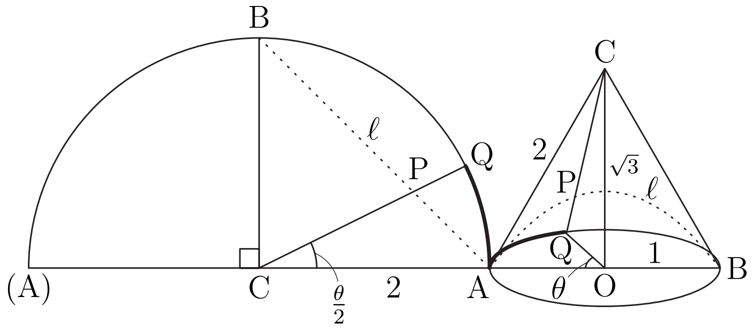
定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

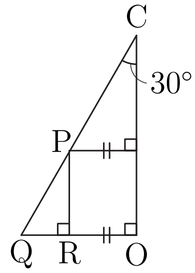
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 下の図において，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OC}=\sqrt{3}$ であるから　$\mathrm{AC}=2$

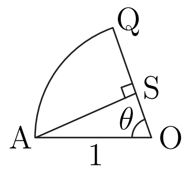
O を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は 180° であるから，$\mathrm{OA}:\mathrm{CA}=1:2$ より，

C を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は 90° である．

$\triangle\mathrm{ACB}$ は直角二等辺三角形であるから　　$\ell=\sqrt{2}\mathrm{AC}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$







(2) O を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ の中心角は θ であるから，$\mathrm{OA}:\mathrm{CA}=1:2$ より，

C を中心とする $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}$ の中心角は $\dfrac{\theta}{2}$ である．

$\triangle\mathrm{CAP}$ において，$\angle\mathrm{PCA}=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle\mathrm{CAP}=45^\circ$ であるから

$$\angle\mathrm{APC}=180^\circ-\left(\frac{\theta}{2}+45^\circ\right)=135^\circ-\frac{\theta}{2}$$

$\triangle\mathrm{CAP}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}$$

したがって　　$\mathrm{CP}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ\cos\frac{\theta}{2}-\cos 135^\circ\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}$

よって　　$\mathrm{CP}^2=\dfrac{4}{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{1+\sin\theta}}$

(3) $\mathrm{OR} = \mathrm{CP}\sin 30^\circ$ であるから，(2) の結果から

$$\mathrm{OR}^2 = \mathrm{CP}^2\sin^2 30^\circ = \frac{4}{1+\sin\theta} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{1+\sin\theta}$$

また　$\mathrm{OS} = \mathrm{OA}\cos\theta = 1\cos\theta = \cos\theta$

したがって　$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2} = \cos^2\theta(1+\sin\theta) = (1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ より，$t = \sin\theta$，$f(t) = \dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ とおくと，

$$f(t) = (1-t^2)(1+t) = -t^3 - t^2 + t + 1 \qquad (0 < t \leqq 1)$$

ゆえに　$f'(t) = -3t^2 - 2t + 1 = -(t+1)(3t-1)$

$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	

よって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{32}{27}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $p=1$ のとき　$a_{n+1}=a_n-1$

このとき，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 -1 の等差数列であるから

$$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot 1+(n-1)\cdot(-1)\}=\boldsymbol{\frac{n}{2}(3-n)}$$

$p\neq 1$ のとき，$c=\dfrac{p}{p-1}$ とおくと　$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$

したがって，数列 $\{a_n-c\}$ は公比 p の等比数列であるから

$$a_n-c=p^{n-1}(a_1-c)\quad \text{ゆえに}\quad a_n=\frac{p}{p-1}-\frac{p^{n-1}}{p-1}$$

よって　$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p}{p-1}-\frac{p^{k-1}}{p-1}\right)=\boldsymbol{\frac{pn}{p-1}-\frac{p^n-1}{(p-1)^2}}$$

(2)　$$b_1=q,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q\quad\cdots(*)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると　$b_2=b_1+(-1)^2q=2q$

また，$(*)$ より　$b_{n+1}-b_n=(-1)^{n+1}q,\quad b_{n+2}-b_{n+1}=(-1)^{n+2}q$

上の 2 式の辺々を加えると　$b_{n+2}-b_n=0$　すなわち　$b_{n+2}=b_n$

したがって，$\{b_n\}$ の奇数項は q，偶数項は $2q$

第 1 区画から第 $m-1$ 区画までの項数の和を i，第 1 区画から第 m 区画までの項数の和を j とすると，m は偶数であることに注意して

$$i=j-2q,\quad j=(q+2q)\cdot\frac{m}{2}$$

すなわち　$$i=\frac{3}{2}mq-2q,\ \ j=\frac{3}{2}mq$$

(1) の結果から，$p=1$ のとき

$$\begin{aligned}T_m=S_j-S_i&=\frac{j}{2}(3-j)-\frac{i}{2}(3-i)\\&=\frac{1}{2}(j-i)\{3-(i+j)\}=\boldsymbol{q\{3-(3m-2)q\}}\end{aligned}$$

また，$p\neq 1$ のとき

$$\begin{aligned}T_m=S_j-S_i&=\left\{\frac{pj}{p-1}-\frac{p^j-1}{(p-1)^2}\right\}-\left\{\frac{pi}{p-1}-\frac{p^i-1}{(p-1)^2}\right\}\\&=\frac{p(j-i)}{p-1}-\frac{(1-p^{i-j})p^j}{(p-1)^2}=\boldsymbol{\frac{2pq}{p-1}-\frac{(1-p^{-2q})p^{\frac{3}{2}mq}}{(p-1)^2}}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\frac{a+2b}{3}\right)^3$$

$$=\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}-\frac{a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3}{27}$$

$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{27}=\frac{(b-a)^3}{27}>0\quad(b-a>0)$$

次に $\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+4ab+4b^2}{9}-ab$

$$=\frac{4b^2-5ab+a^2}{9}$$

$$=\frac{(b-a)(4b-a)}{9}>0\quad(b-a>0,\ 4b-a>0)$$

$\frac{a+2b}{3}>0$，$\sqrt{ab}>0$，$\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>0$ であるから

$$\boldsymbol{\sqrt{ab}<\frac{a+2b}{3}<\sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}}$$

補足 $a=1$，$b=4$ とすると，次の値から結果が推測できる.

$$\frac{a+2b}{3}=3,\quad \sqrt{ab}=2,\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}=\sqrt[3]{28}>3$$

また，$x=\frac{b}{a}$ とおくと $(x>1)$

$$\frac{a+2b}{3}=\frac{a(1+2x)}{3},\quad \sqrt{ab}=a\sqrt{x},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}=a\sqrt[3]{\frac{x+x^2+x^3}{3}}$$

したがって，$x>1$ のとき，次の大小関係を求めてもよい.

$$\frac{1+2x}{3},\quad \sqrt{x},\quad \sqrt[3]{\frac{x+x^2+x^3}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

```
10 DIM A(2),P(2)
20 INPUT "A(1)=";A(1)
30 INPUT "A(2)=";A(2)
40 INPUT "P(1)=";P(1)
50 INPUT "P(2)=";P(2)
60 PRINT (ABS(A(2)*P(1)-A(1)*P(2)))/SQR(A(1)^2+A(2)^2)
70 END
```

解説 原点 O と点 A$(a_1,\ a_2)$ を通る直線は $a_2x - a_1y = 0$．点 P$(p_1,\ p_2)$ とこの直線の距離は

$$\frac{|a_2p_1 - a_1p_2|}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

(2)

```
10 DIM A(2),B(2),P(2),Q(2),DF(2)
20 DD=0.00001
30 INPUT "A(1)=";A(1)
40 INPUT "A(2)=";A(2)
50 INPUT "B(1)=";B(1)
60 INPUT "B(2)=";B(2)
70 INPUT "P(1)=";P(1)
80 INPUT "P(2)=";P(2)
90 INPUT "Q(1)=";Q(1)
100 INPUT "Q(2)=";Q(2)
110 SS=SQR((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2)
120 DF(1)=(B(2)-A(2))*P(1)-(B(1)-A(1))*P(2)-A(1)*B(2)+A(2)*B(1)
130 DF(2)=(B(2)-A(2))*Q(1)-(B(1)-A(1))*Q(2)-A(1)*B(2)+A(2)*B(1)
140 IF ABS(DF(1)/SS) < DD THEN DF(1)=0
150 IF ABS(DF(2)/SS) < DD THEN DF(2)=0
160 IF DF(1)*DF(2) > 0 THEN PRINT"1"
170 IF DF(1)*DF(2) < 0 THEN PRINT"-1"
180 IF DF(1)*DF(2)=0 THEN PRINT"0"
190 END
```

解説 2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ を通る直線の方程式は

$$(b_2 - a_2)x - (b_1 - a_1)y - a_1b_2 + a_2b_1 = 0$$

点 P$(p_1,\ p_2)$ とこの直線の距離は

$$\frac{|(b_2 - a_2)p_1 - (b_1 - a_1)p_2 - a_1b_2 + a_2b_1|}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 3 個の完全順列の総数を M_3 とすると　$M_3 = 2$

したがって　$P(X=2) = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2 \times M_3}{5!} = \dfrac{10 \times 2}{120} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

補足 $0 \leqq k \leqq 5$ のとき　$P(X=k) = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_k \times M_{5-k}}{5!}$

なお　$M_0 = 1,\ M_1 = 0,\ M_2 = 1,\ M_3 = 2,\ M_4 = 9,\ M_5 = 44$ (後述)

(2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する条件付き確率を $P_1(X=k)$, $n-k$ 個の完全順列の総数を M_{n-k} とすると

$$P_1(X=k) = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot M_{n-k}}{n!} = \frac{k}{n} \times \frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot M_{n-k}}{n!} = \frac{k}{n} \times P(X=k)$$

よって　$\boldsymbol{a_k = \dfrac{k}{n}}$

(3) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率 p は

$$p = \frac{1 \times (n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

(2) の結果から　$p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot P(X=k)$

上の 2 式から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\cdot P(X=k) = \frac{1}{n}$

よって　$E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \mathbf{1}$

別解 (2) の計算により　$kP(X=k) = \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot M_{n-k}}{(n-1)!}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot M_{n-k}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_k\cdot M_{n-1-k}}{(n-1)!} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

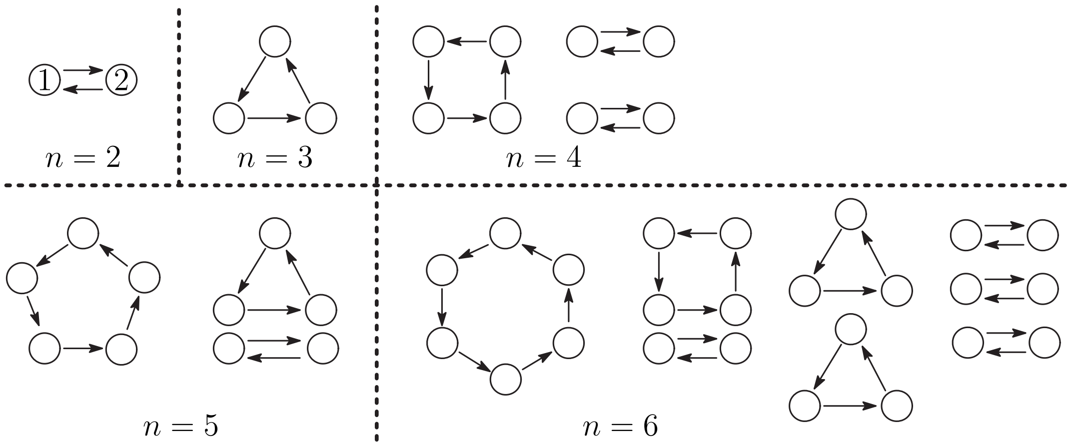
モンモール数

n 個の整数 $1, 2, 3, \cdots, n$ を要素とする順列において，i 番目 $(1 \leqq i \leqq n)$ が i でない順列を**完全順列**という．

完全順列の総数を**モンモール数** (Montmort number) という．n 個の要素の完全順列の総数を M_n で表すことにする．

例えば，n 人が各自 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，プレゼントの交換会を行うとき (全員が交換)，プレゼントの交換方法の総数が M_n に等しい．

モンモール数は，次の図に示したループにより求めることもできる．



まず，$M_1 = 0$，$M_2 = 1$ は明らか．$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について

$$
\begin{aligned}
M_3 &= 2! = 2, \\
M_4 &= 3! + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2!} = 9, \\
M_5 &= 4! + {}_5\mathrm{C}_3 \times 2! = 44, \\
M_6 &= 5! + {}_6\mathrm{C}_4 \times 3! + \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 2! \times 2!}{2!} + \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{3!} = 265
\end{aligned}
$$

n 個の整数 $1, 2, \ldots, n$ の完全順列の総数 M_n を，上の図で示したループを用いて考える．あるループの中で i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ に n が続くとする．このとき，次の場合分けができる．

(i) i と n が互換でないとき (i と n を含むループが 3 個以上で構成)，i と n を同一視することにより，$n-1$ 個の完全順列の総数 M_{n-1} に等しい．

(ii) i と n が互換であるとき (i と n を含むループが 2 個で構成)，i と n を除く残りの $n-2$ 個の完全順列の総数 M_{n-2} に等しい．

(i)，(ii) から次の漸化式が成立する．

$$M_n = (n-1)(M_{n-1} + M_{n-2}) \quad \cdots (*)$$

$M_1 = 0$，$M_2 = 1$ であるから，$(*)$ より，順次以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}&M_1 = 0,\ M_2 = 1,\ M_3 = 2,\ M_4 = 9,\ M_5 = 44,\ M_6 = 265,\\ &M_7 = 1854,\ M_8 = 14833,\ M_9 = 133496, \cdots\end{aligned}$$

$(*)$ に $n = 2$ を代入すると　$M_2 = M_1 + M_0$
これから便宜的に $M_0 = 1$ とすることがある．また，$(*)$ より

$$\begin{aligned}M_k - kM_{k-1} &= -\{M_{k-1} - (k-1)M_{k-2}\}\\ &= (-1)^{k-2}(M_2 - 2M_1) = (-1)^{k-2}\end{aligned}$$

ゆえに　$$\frac{M_k}{k!} - \frac{M_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

したがって　$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{M_k}{k!} - \frac{M_{k-1}}{(k-1)!}\right\} = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\frac{M_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$M_0 = 1$，$M_1 = 0$ であるから，$n \geqq 0$ について，次式が成立する．

$$M_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

n 人が各自 1 個ずつプレゼントを持ち寄り，くじ引きでプレゼント交換を行うとき，全員が交換する確率は

$$\frac{M_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

とくに　$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

上の結果から，このくじ引きによるプレゼント交換会において，n がいくら大きくてもプレゼントが交換できない人がいる確率は

$$1 - \frac{1}{e} \fallingdotseq 0.632\cdots$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-2k, \quad \alpha\beta=3k$$

2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=k^2-3k=k(k-3)$$

i) $D>0$，すなわち $k<0,\ 3<k$ のとき，α，β は実数であるから

$$\begin{aligned}|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2 &= (\alpha-i)(\overline{\alpha-i})+(\beta-i)(\overline{\beta-i}) \\ &= (\alpha-i)(\alpha+i)+(\beta-i)(\beta+i) \\ &= \alpha^2+\beta^2+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2 \\ &= (-2k)^2-2\cdot3k+2=\boldsymbol{4k^2-6k+2}\end{aligned}$$

ii) $D<0$，すなわち $0<k<3$ のとき，α と β は共役複素数であるから

$$\begin{aligned}|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2 &= (\alpha-i)(\overline{\alpha-i})+(\beta-i)(\overline{\beta-i}) \\ &= (\alpha-i)(\beta+i)+(\beta-i)(\alpha+i) \\ &= 2\alpha\beta+2=2\cdot3k+2=\boldsymbol{6k+2}\end{aligned}$$

(2) $\angle$APB が直角であるとき

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=\mathrm{AB}^2 \quad \text{すなわち} \quad |\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|\beta-\alpha|^2 \quad \cdots ①$$

(i) $k<0,\ 3<k$ のとき，α，β は実数であるから

$$\begin{aligned}|\beta-\alpha|^2 &= (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= (-2k)^2-4\cdot3k=4k^2-12k\end{aligned}$$

(1) の結果および上式を ① に代入すると

$$4k^2-6k+2=4k^2-12k \quad \text{ゆえに} \quad 6k+2=0$$

k の値の範囲に注意してこれを解くと $\quad k=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $0<k<3$ のとき，$\overline{\alpha}=\beta$，$\overline{\beta}=\alpha$ であるから

$$\begin{aligned}|\beta-\alpha|^2&=(\beta-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=(\beta-\alpha)(\alpha-\beta)\\&=-(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta=-(-2k)^2+4\cdot3k=-4k^2+12k\end{aligned}$$

(1) の結果および上式を ① に代入すると

$$6k+2=-4k^2+12k \quad ゆえに \quad (k-1)(2k-1)=0$$

k の体の範囲に注意してこれを解くと　　$k=\dfrac{1}{2},\ 1$

よって　　$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ 1}$

別解 $\angle$APB が直角であるとき，$\dfrac{\beta-i}{\alpha-i}$ は純虚数である．

(i) $k<0,\ 3<k$ のとき，α，β は実数であるから

$$\frac{\beta-i}{\alpha-i}=\frac{(\beta-i)(\alpha+i)}{(\alpha-i)(\alpha+i)}=\frac{\alpha\beta+(\beta-\alpha)i+1}{\alpha^2+1}=\frac{3k+1+(\beta-\alpha)i}{\alpha^2+1}$$

このとき　　$3k+1=0$

k の値の範囲に注意してこれを解くと　$k=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $0<k<3$ のとき，$\overline{\alpha}=\beta$，$\overline{\beta}=\alpha$ であるから

$$\frac{\beta-i}{\alpha-i}=\frac{(\beta-i)(\overline{\alpha-i})}{(\alpha-i)(\overline{\alpha-i})}=\frac{(\beta-i)(\beta+i)}{|\alpha-i|^2}=\frac{\beta^2+1}{|\alpha-i|^2}$$

β は方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の解であるから

$$\beta^2+1=-2k\beta-3k+1, \quad \beta=-k\pm\sqrt{3k-k^2}\,i$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}\beta^2+1&=-2k(-k\pm\sqrt{3k-k^2}\,i)-3k+1\\&=2k^2-3k+1\mp2k\sqrt{3k-k^2}\,i\end{aligned}$$

このとき　　$2k^2-3k+1=0$

k の値の範囲に注意してこれを解くと　$k=\dfrac{1}{2},\ 1$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ を $\vec{a}\cdot\vec{d}=1$, $\vec{b}\cdot\vec{d}=0$, $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$ にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}+z\vec{a}\cdot\vec{c}&=1, \\ x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2+z\vec{b}\cdot\vec{c}&=0, \\ x\vec{a}\cdot\vec{c}+y\vec{b}\cdot\vec{c}+z|\vec{c}|^2&=0 \end{aligned}$$

上の 3 式に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を代入すると

$$x-\frac{1}{2}y=1,\quad -\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z=0,\quad -\frac{1}{2}y+z=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{x=\frac{3}{2},\ y=1,\ z=\frac{1}{2}}$

同様に，$\vec{f}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおき，これを $\vec{a}\cdot\vec{f}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{f}=0$, $\vec{c}\cdot\vec{f}=1$ にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{a}\cdot\vec{c}&=0, \\ s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}&=0, \\ s\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}+u|\vec{c}|^2&=1 \end{aligned}$$

上の 3 式に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を代入すると

$$s-\frac{1}{2}t=0,\quad -\frac{1}{2}s+t-\frac{1}{2}u=0,\quad -\frac{1}{2}t+u=1$$

これを解いて　$s=\frac{1}{2}$, $t=1$, $u=\frac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{\vec{f}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2&=\left|\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2 \\ &=\frac{9}{4}|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} \\ &=\frac{9}{4}+1+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ |\vec{f}|^2&=\left|\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right|^2 \\ &=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{9}{4}|\vec{c}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} \\ &=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{|\vec{d}|=|\vec{f}|=\frac{\sqrt{6}}{2}}$

また　　$\vec{d}-\vec{f}=\left(\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{c}$

したがって　　$|\vec{d}-\vec{f}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=1+1=2$

よって　　$\boldsymbol{|\vec{d}-\vec{f}|=\sqrt{2}}$

(3) (2) の結果から

$$\vec{d}\cdot\vec{f}=\frac{1}{2}(|\vec{d}|^2+|\vec{f}|^2-|\vec{d}-\vec{f}|^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-(\sqrt{2})^2\right\}=\frac{1}{2}$$

よって　$\triangle\mathrm{ODF}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{d}|^2|\vec{f}|^2-(\vec{d}\cdot\vec{f})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

別解 (2) の結果より，$\triangle\mathrm{ODF}$ は $\mathrm{OD}=\mathrm{OF}$ の二等辺三角形であるから，DF の中点を M とすると

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OD}^2-\left(\frac{\mathrm{DF}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=1$$

よって　　$\triangle\mathrm{ODF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{DF}\cdot\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\vec{d}-\vec{f}=\vec{a}-\vec{c}$ であるから

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}\cdot\vec{d}=0,\quad \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

したがって，$\vec{b}$ は平面 ODF と垂直である．
また，$\vec{e}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ とおき，これを $\vec{a}\cdot\vec{e}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{e}=1$，$\vec{c}\cdot\vec{e}=0$ にそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned}\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}+\gamma\vec{a}\cdot\vec{c}&=0,\\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2+\gamma\vec{b}\cdot\vec{c}&=0,\\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{c}+\beta\vec{b}\cdot\vec{c}+\gamma|\vec{c}|^2&=1\end{aligned}$$

上の 3 式に $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を代入すると

$$\alpha-\frac{1}{2}\beta=0,\ -\frac{1}{2}\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma=1,\ -\frac{1}{2}\beta+\gamma=0$$

これを解いて　$\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=1$　よって　$\vec{e}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$

また　　$\vec{b}\cdot\vec{e}=\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}+2-\dfrac{1}{2}=1$

E から平面 ODF に下ろした垂線の長さを h とすると　$h=|\vec{b}\cdot\vec{e}|=1$

したがって，求める体積を V とすると，(3) の結果により

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ODF}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

解説 $X=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}\vec{d} & \vec{e} & \vec{f}\end{pmatrix}$，$A={}^tXX$ とおくと (E は単位行列)

$$A={}^tXX=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\quad {}^tXY={}^tYX=E$$

したがって　$Y=({}^tX)^{-1}=({}^tXXX^{-1})^{-1}=X({}^tXX)^{-1}=XA^{-1}$

すなわち　　$\begin{pmatrix}\vec{d} & \vec{e} & \vec{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

よって　　$\vec{d}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{e}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より，$\vec{h}=\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}$ とおくと，$\vec{h}\cdot\vec{a}=\vec{h}\cdot\vec{c}=0$

ゆえに　　$\vec{h}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$|\vec{h}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって　$|\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}|=|\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{h} & \vec{c}\end{pmatrix}|=|\vec{a}||\vec{h}||\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

また，$\det(A^{-1})=2$ により

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{6}|\det\begin{pmatrix}\vec{d} & \vec{e} & \vec{f}\end{pmatrix}|\\&=\frac{1}{6}|\det\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}||\det(A^{-1})|\\&=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$