平成10年度　九州大学２次試験前期日程(数学問題)120分
文系(文学部，教育学部，法学部，経済学部(経済・経営))

$\boxed{1}$〜$\boxed{2}$必答，$\boxed{3}$〜$\boxed{5}$から1題選択，$\boxed{6}$〜$\boxed{8}$から1題選択

$\boxed{1}$ 放物線 $y=x^2-2px$ 上の点 $(t,\ t^2-2pt)$ における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を $l(t,\ b)$ とする。

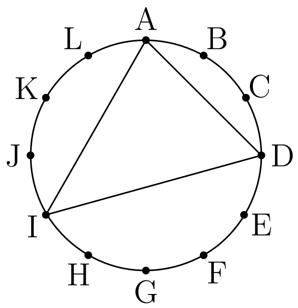
(1) 直線 $l(t,\ b)$ の方程式を求めよ。

(2) この放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが，x 座標が正の2点で交わるための t，b の範囲を求めよ。

(3) 放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが2点で交わるとき，これらが囲む図形の面積 S を求めよ。

(4) (3) の図形の面積 S を直線 $x=u$ で2等分したい。u を求めよ。

$\boxed{2}$ 右図のように円周を12等分する点A，B，C，D，E，F，G，H，I，J，K，Lが与えられている。これらの中から相異なる3点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば，A，D，Iを選べば，図のような三角形がえられる。このとき，次の問に答えよ。



(1) 正三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。

(4) 3点を選んでえられる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

$\boxed{3}$ (1) $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2) ① 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

② ① の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

4 (1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

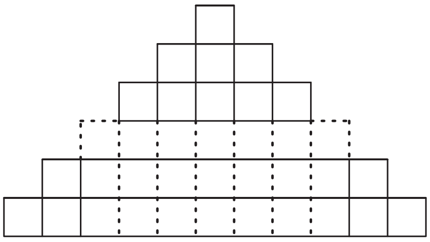
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 辺の長さ1の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

① $m = 2, 3, 4$ のとき，どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。

② 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3) 辺の長さ1の正三角形を底面とする高さ1の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ1の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ1の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



5 次の BASIC によるプログラムを実行するとき，以下の問に答えよ。

```
10   INPUT  N
20   S = 0
30   M = 2 * INT(N/2) + 1
40   FOR  K=1  TO  M  STEP  2
50   X = N - K * INT(N/K)
60   IF  X > 0  THEN  GOTO  80
70   S = S + K
80   NEXT  K
90   PRINT  S
100  END
```

(1) 入力が12のとき出力はいくらか。

(2) 出力が1となるような自然数の入力はどのような数か。

(3) 範囲 $2 \leqq \mathrm{N} \leqq 50$ の自然数 N を入力するとき，出力が1より大きな奇数となる N をすべて求めよ。

6 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。(ただし，$m,\ n>0$ とする。)

(1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。
② $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めよ。
③ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうか調べよ。

(2) ① $m=n$ のとき点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ。
② このとき PQ，RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。
③ G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

7 k を正の実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の 3 個の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす。

(1) $x=1$ は上の方程式の解であるかどうかを調べよ。

(2) 3 点 z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(4) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが，原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の値を求めよ。

8 1 から n までの数字を書いた玉がそれぞれ 2 個ずつ，全部で $2n$ 個入っている袋がある。この袋から 2 個の玉を同時に取り出すことを考える。取り出した玉の数字の大きい方を X，小さい方を Y とする。ただし同じ数字のときはその数字を X および Y（すなわち $X=Y$）とする。

(1) 確率 $P(X \leqq k)$ および $P(Y \geqq k)$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(X=k)$ および $P(Y=k)$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ を求めよ。

(3) $n=4$ のとき $X-Y$ の期待値 $E(X-Y)$ を求めよ。

(4) 一般の n について $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=x^2-2px$ を微分すると　　$y'=2(x-p)$

放物線 $y=x^2-2px$ 上の点 $(t,\ t^2-2pt)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2-2pt)=2(t-p)(x-t)\quad すなわち\quad y=2(t-p)x-t^2$$

直線 $l(t,\ b)$ は，これを y 軸方向に b だけ平行移動したのであるから

$$\boldsymbol{y=2(t-p)x-t^2+b}$$

(2) 放物線 $y=x^2-2px$ と直線 $l(t,\ b)$ の方程式から y を消去すると

$$x^2-2px=2(t-p)x-t^2+b\quad 整理すると\quad (x-t)^2=b$$

この方程式が異なる 2 つの正の解をもつことから，$b>0$ であり

$$x=t\pm\sqrt{b}$$

がともに正であるから　$t-\sqrt{b}>0$　よって　$\boldsymbol{b>0,\ \ t>\sqrt{b}}$

(3) 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_{t-\sqrt{b}}^{t+\sqrt{b}}\{2(t-p)x-t^2+b-(x^2-2px)\}\,dx\\
&=\int_{t-\sqrt{b}}^{t+\sqrt{b}}\{-(x-t)^2+b\}\,dx\\
&=-\int_{t-\sqrt{b}}^{t+\sqrt{b}}(x-t+\sqrt{b})(x-t-\sqrt{b})\,dx\\
&=\frac{1}{6}\{(t+\sqrt{b})-(t-\sqrt{b})\}^3\,dx=\boldsymbol{\frac{4}{3}b\sqrt{b}}
\end{aligned}$$

(4) $t-\sqrt{b}\leqq x\leqq u$ における (3) の図形の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_{t-\sqrt{b}}^{u}\{-(x-t)^2+b\}\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{3}(x-t)^3+b(x-t)\right]_{t-\sqrt{b}}^{u}\\
&=-\frac{1}{3}(u-t)^3+b(u-t)+\frac{2}{3}b\sqrt{b}
\end{aligned}$$

条件より，$S_1 = \dfrac{1}{2}S = \dfrac{2}{3}b\sqrt{b}$ であるから

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}(u-t)^3 + b(u-t) + \frac{2}{3}b\sqrt{b} &= \frac{2}{3}b\sqrt{b} \\ (u-t)^3 - 3b(u-t) &= 0 \\ (u-t)\{(u-t)^2 - 3b\} &= 0 \\ (u-t)(u-t+\sqrt{3b})(u-t-\sqrt{3b}) &= 0 \end{aligned}$$

このとき，$t-\sqrt{b} < u < t+\sqrt{b}$ であるから　$\boldsymbol{u = t}$

解説 (3) で示した面積

$$S = \int_{t-\sqrt{b}}^{t+\sqrt{b}} \{-(x-t)^2 + b\}\, dt$$

は，放物線 $y = -(x-t)^2 + b$ と x 軸で囲まれた部分の面積である．この放物線の軸 $x = t$ に関する対称性により，S を二等分する直線 $x = u$ は，この放物線の軸である．よって，$u = t$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 正三角形は，△AEI，△BFJ，△CGK，△DHL の **4 通り**．

(2) ∠A を頂角とする二等辺三角形で正三角形以外のものは 4 通り．
∠B から ∠L までの頂角についても同様である．
したがって，これらと (1) の結果を含めて

$$4 \times 12 + 4 = \mathbf{52} \quad (\text{通り})$$

(3) 直角三角形となるのは，1 辺が円の直径の場合である．
したがって，直径の選び方は 6 通りあり，その各々に対して頂点の取り方が 10 通りであるから

$$6 \times 10 = \mathbf{60} \quad (\text{通り})$$

(4) 円周を 12 等分した円弧を含む個数により，合同でない三角形を分類できる．3 頂点間の円弧の個数を $x,\ y,\ z$ とすると

$$x + y + z = 12, \quad 1 \leqq x \leqq y \leqq z$$

を満たす整数 $(x,\ y,\ z)$ の組数であるから，次の **12 通り**．

$$\begin{aligned} (x,\ y,\ z) =& (1,\ 1,\ 10),\ (1,\ 2,\ 9),\ (1,\ 3,\ 8),\ (1,\ 4,\ 7),\ (1,\ 5,\ 6), \\ & (2,\ 2,\ 8),\ (2,\ 3,\ 7),\ (2,\ 4,\ 6),\ (2,\ 5,\ 5), \\ & (3,\ 3,\ 6),\ (3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 4,\ 4) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x \geqq y \geqq 0$ であるから

$$\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geqq 0$$

よって，与えられた不等式は成り立つ．

(2) ① $u = |x|+|y|+|z|$ とおくと

$$\frac{|x|}{1+|x|} \geqq \frac{|x|}{1+u}, \quad \frac{|y|}{1+|y|} \geqq \frac{|y|}{1+u}, \quad \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|z|}{1+u}$$

上の第 1 式において等号が成立するのは

$$x=0 \ \text{または}\ |y|+|z|=0 \quad \text{すなわち} \quad x=0 \ \text{または}\ y=z=0$$

同様に第 2, 3 式において等号が成立するのは，それぞれ

$$y=0 \ \text{または}\ z=x=0, \qquad z=0 \ \text{または}\ x=y=0$$

3 式の辺々を加えると

$$\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{u}{1+u} \quad \cdots (*)$$

また，$u \geqq |x+y+z|$ であるから，(1) の結果から

$$\frac{u}{1+u} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \quad \cdots (**)$$

$(*), (**)$ から $\displaystyle \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}+\frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \quad \cdots (***)$

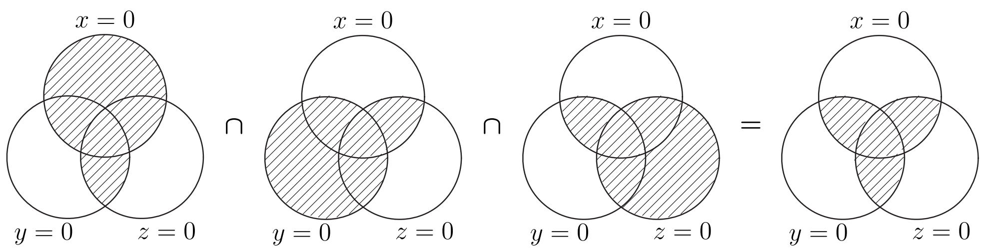
② $(*)$ の等号が成立するは，次の 3 つの条件が同時に成り立つときである．

$$x=0 \ \text{または}\ y=z=0,$$
$$y=0 \ \text{または}\ z=x=0,$$
$$z=0 \ \text{または}\ x=y=0$$

すなわち $\quad y=z=0$ または $z=x=0$ または $x=y=0$

このとき，$(**)$ においても等号が成立するので，同時に $(***)$ においても等号が成立する．

解説 等号の成立条件をベン図で示すと次のようになる．



また，空間座標において，「$x = 0$ または $y = z = 0$」を「yz 平面または x 軸上」と考えると，(yz 平面または x 軸上) かつ (zx 平面または y 軸上) かつ (xy 平面または z 軸上) は，(x 軸上または y 軸上または z 軸上) となる．

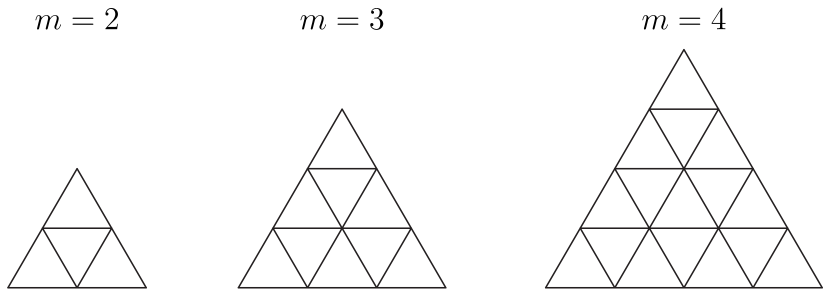
$\boxed{4}$ (1) $a_k = k(k+1)(2k+1)$，$b_k = a_k - a_{k-1}$ とおくと

$$b_k = k(k+1)(2k+1) - (k-1)k(2k-1) = 6k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 = n(n+1)(2n+1) \text{ であるから}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) ①



② 上から k 段目には正三角形のタイルが $k + (k-1) = 2k - 1$ 個並ぶ．したがって，求める正三角形のタイルの総数は

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = 2 \times \frac{1}{2}m(m+1) - m = \boldsymbol{m^2}$$

解説 面積比は相似比の 2 乗であることを考えると明らか．

(3) 上から k 段目には正三角柱のブロックが $(2k-1)^2$ 個積み上げられているから，積み上げられたブロックの総数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\ &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)\end{aligned}$$

また，ブロック 1 個の体積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 60^\circ\times 1=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，求める台全体の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}n(2n-1)(2n+1)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{N}=12$ のとき，$\mathrm{M}=13$ となり，K は 1，3，5，7，9，11，13 をとる．
K が N の約数，すなわち，K が 1，3 のとき，S は加算される．
よって，求める出力 S は　$1+3=\mathbf{4}$

(2) 出力が 1 となるは，N が 1 以外の M 以下の奇数で割り切れない場合である．
よって，$\mathbf{N=2^{\boldsymbol{k}}}$ **(k は 0 以上の整数)** の場合である．

(3) p_1，p_2，$\cdots$ を素数，q_0，q_1，q_2，$\cdots$ を 0 以上の整数とするとき，整数

$$\mathrm{N}=2^{q_0}\cdot{p_1}^{q_1}\cdot{p_2}^{q_2}\cdots$$

の奇数の約数の個数は

$$(q_1+1)(q_2+1)\cdots$$

S はいくつかの奇数の和であるから，その加えた奇数が奇数個である．
このとき，q_1，$q_2,\cdots$ は偶数となる．$2\leqq\mathrm{N}\leqq 50$ より

$$\mathrm{N}=2^{q_0}\cdot 3^{q_1}\cdot 5^{q_2}\cdot 7^{q_3}$$

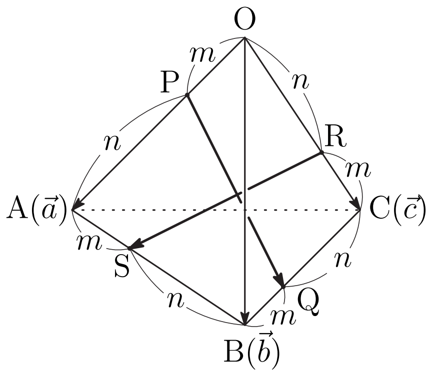
とおくと，q_0 は 0 以上の整数，q_1，q_2，q_3 は 0 以上の偶数である．ただし，(2) の結果に注意して，q_1，q_2，q_3 の少なくとも 1 つは 0 でない．
これらの条件を満たす $(q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3)$ は，次の 6 組．

$$\begin{aligned}(q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3)=&(0,\ 2,\ 0,\ 0),\ (1,\ 2,\ 0,\ 0),\ (2,\ 2,\ 0,\ 0),\\ &(0,\ 0,\ 2,\ 0),\ (1,\ 0,\ 2,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0,\ 2)\end{aligned}$$

よって，求める N は　**9，18，36，25，50，49**

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) ① $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{m\vec{a}}{m+n}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{n\vec{c}}{m+n}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{n\vec{b}+m(\vec{c}-\vec{a})}{m+n}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{m\vec{b}-n(\vec{c}-\vec{a})}{m+n}}$$

② $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

③ $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 1$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ - |\vec{b}||\vec{a}|\cos 60^\circ = 0$

① の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \frac{mn(|\vec{b}|^2 - |\vec{c}-\vec{a}|^2) + (m^2-n^2)\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})}{(m+n)^2}$$
$$= \frac{mn(1^2-1^2) + (m^2-n^2)\cdot 0}{(m+n)^2} = 0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RS}}$

(2) ① $m = n$ のとき，(1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ より，点 P，Q，R，S は同一平面上にある．

② ① で示した $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ より，四角形 PSQR は平行四辺形であるから，直線 PQ，RS の交点 G は，この平行四辺形の対角線の中点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \boldsymbol{\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$$

③ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{a}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2)=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b})=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるので

$$\mathrm{GO}^2=\mathrm{GP}^2+\mathrm{PO}^2,\qquad \mathrm{GA}^2=\mathrm{GP}^2+\mathrm{PA}^2,$$
$$\mathrm{GB}^2=\mathrm{GQ}^2+\mathrm{QB}^2,\qquad \mathrm{GC}^2=\mathrm{GQ}^2+\mathrm{QC}^2$$

また，$\mathrm{GP}=\mathrm{GQ}$，$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{QB}=\mathrm{QC}$ であるから

$$\mathrm{GO}^2=\mathrm{GA}^2=\mathrm{GB}^2=\mathrm{GC}^2$$

よって，G は正四面体 OABC に外接する球の中心である．このとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})=\frac{1}{2}$$

また，$\mathrm{GP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\mathrm{PO}=\dfrac{1}{2}$ であるから，求める球の半径は

$$\mathrm{GO}=\sqrt{\mathrm{GP}^2+\mathrm{PO}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

7 (1) $f(x)=x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2$ とおくと

$$f(1)=1-(2k+1)+(4k^2+2k)-4k^2=0$$

$x=1$ は方程式 $f(x)=0$ の解である．

(2) (1) の結果から $f(x)$ が $x-1$ を因数にもつので，方程式は

$$(x-1)(x^2-2kx+4k^2)=0$$

これを解いて　　$x=1,\ k(1\pm\sqrt{3}\,i)$

$z_1=1$，$z_2=k(1+\sqrt{3}\,i)$，$z_3=k(1-\sqrt{3}\,i)$ とおく．$z_2\neq z_1$，$z_3\neq z_1$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}&=\frac{k(1-\sqrt{3}\,i)-1}{k(1+\sqrt{3}\,i)-1}\\&=\frac{\{(k-1)-\sqrt{3}ki\}^2}{\{(k-1)+\sqrt{3}ki\}\{(k-1)-\sqrt{3}ki\}}\\&=\frac{(-2k^2-2k+1)-2\sqrt{3}k(k-1)i}{(k-1)^2+3k^2}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

3 点 z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるとき，$(*)$ は実数であるから

$$-2\sqrt{3}k(k-1)=0 \qquad k>0 \text{ に注意して} \qquad \boldsymbol{k=1}$$

(3) $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$ であるから，z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすとき，$\angle z_2z_1z_3$ は直角である．このとき，$(*)$ は純虚数であるから

$$-2k^2-2k+1=0 \qquad k>0 \text{ に注意して} \qquad \boldsymbol{k=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$$

(4) $|w_1|=|z_1|=1$，$|w_2|=|z_2|$，$|w_3|=|z_3|$，$|z_2|=|z_3|=2k$ であるから，w_1，w_2，w_3，$\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ が原点中心の正六角形であるとき

$$2k=1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$$

$\arg z_1=0$，$\arg z_2=60^\circ$，$\arg z_3=-60^\circ$ であるから

$$\arg w_1=\theta, \quad \arg w_2=60^\circ+\theta, \quad \arg w_3=-60^\circ+\theta$$

$$\arg\frac{w_1}{w_3}=\arg\frac{w_2}{w_1}=60^\circ, \quad \arg\frac{\overline{w_1}}{\overline{w_2}}=\arg\frac{\overline{w_3}}{\overline{w_1}}=60^\circ$$

w_1 と $\overline{w_1}$ に着目すると，これらは原点に関して対称であるから

$$\begin{aligned}\arg w_1-\arg\overline{w_1}&=180^\circ\times(2n-1) \qquad (n \text{ は整数})\\ \theta-(-\theta)&=180^\circ\times(2n-1)\\ \theta&=90^\circ\times(2n-1)\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ に注意して　　$\boldsymbol{\theta=90^\circ}$

$\boxed{8}$ (1) $X \leqq k$ となるのは，k 以下の $2k$ 個から 2 個取り出す確率であるから

$$P(X \leqq k)=\frac{{}_{2k}\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{k(2k-1)}{n(2n-1)}}$$

$Y \geqq k$ となるのは，k 以上の $2(n-k+1)$ 個から 2 個取り出す確率であるから

$$P(Y \geqq k)=\frac{{}_{2(n-k+1)}\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{(n-k+1)(2n-2k+1)}{n(2n-1)}}$$

(2) (1) の結果より　　$P(X=1)=P(X \leqq 1)=\dfrac{1}{n(2n-1)}$

$2 \leqq k \leqq n$ のとき　$P(X=k)=P(X \leqq k)-P(X \leqq k-1)$

$$=\frac{k(2k-1)}{n(2n-1)}-\frac{(k-1)(2k-3)}{n(2n-1)}$$

$$=\frac{4k-3}{n(2n-1)}$$

これは $k=1$ のときも成り立つので　　$\boldsymbol{P(X=k)=\dfrac{4k-3}{n(2n-1)}}$

同様に　　$P(Y=n)=P(Y \geqq n)=\dfrac{1}{n(2n-1)}$

$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき

$$P(Y=k)=P(Y \geqq k)-P(Y \geqq k+1)$$

$$=\frac{(n-k+1)(2n-2k+1)}{n(2n-1)}-\frac{(n-k)(2n-2k-1)}{n(2n-1)}$$

$$=\frac{4n-4k+1}{n(2n-1)}$$

これは $k=n$ のときも成り立つので　　$\boldsymbol{P(Y=k)=\dfrac{4n-4k+1}{n(2n-1)}}$

(3) (2) の結果から，$n=4$ のとき

k	1	2	3	4	計
$P(X=k)$	$\dfrac{1}{28}$	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{9}{28}$	$\dfrac{13}{28}$	1
$P(Y=k)$	$\dfrac{13}{28}$	$\dfrac{9}{28}$	$\dfrac{5}{28}$	$\dfrac{1}{28}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{28}+2\cdot\frac{5}{28}+3\cdot\frac{9}{28}+4\cdot\frac{13}{28}=\frac{45}{14}$$

$$E(Y)=1\cdot\frac{13}{28}+2\cdot\frac{9}{28}+3\cdot\frac{5}{28}+4\cdot\frac{1}{28}=\frac{25}{14}$$

よって　　$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=\dfrac{45}{14}-\dfrac{25}{14}=\boldsymbol{\dfrac{10}{7}}$

別解 $X-Y=0$ となるのは，$\{1,\ 1\},\ \{2,\ 2\},\ \{3,\ 3\},\ \{4,\ 4\}$.

$$P(X-Y)=\frac{4}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$$

$X-Y=1$ となるのは，$\{2,\ 1\},\ \{3,\ 2\},\ \{4,\ 3\}$.

$$P(X-Y)=\frac{3\times 2{\cdot}2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

$X-Y=2$ となるのは，$\{3,\ 1\},\ \{4,\ 2\}$.

$$P(X-Y)=\frac{2\times 2{\cdot}2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$$

$X-Y=3$ となるのは，$\{4,\ 1\}$.

$$P(X-Y)=\frac{2{\cdot}2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{8}{28}=\frac{1}{7}$$

よって　　$E(X-Y)=1{\cdot}\frac{3}{7}+2{\cdot}\frac{2}{7}+3{\cdot}\frac{1}{7}=\frac{10}{7}$

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=E(X)+E(Y)\\&=\sum_{k=1}^{n}k{\cdot}P(X=k)+\sum_{k=1}^{n}k{\cdot}P(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4k-3}{n(2n-1)}+\frac{4n-4k+1}{n(2n-1)}\right\}\\&=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{2}{n}{\cdot}\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{n+1}\end{aligned}$$