平成９年度　九州大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
文系 (文学部，教育学部，法学部，経済学部 (経済・経営))

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ より１題選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ より１題選択

1 2 定点 O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$ と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の周上を動く点 P がある。

(1) 3 点 O，A，P が同一直線上にあるとき，A と異なる点 P の座標を求めよ。

(2) 3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，△OAP の重心の軌跡を求めよ。

(3) 3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，△OAP の面積の最大値を求めよ。

2 関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ について，次の各問に答えよ。

(1) x の値が p から q まで変化するとき，関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。ただし，$p<q$ とする。

(2) $f(x)$ の $x=r$ における微分係数 $f'(r)$ を定義にしたがって求めよ。

(3) (1) の平均変化率と，(2) の $f'(r)$ が一致するとき，r を p，q を用いて表せ。

(4) $f(x)=x^2$ とする。このとき，放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$ における接線と放物線で囲まれる図形の面積を求めよ。ただし，$p<q$ とする。

3 (1) $2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1}>4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。

(2) m を (1) で求めた自然数とする。そのとき $m<n$ を満たすすべての自然数 n について，$4n^2<2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}4k^2$ とする。n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

4 次の命題 (1)，(2)，(3) について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ。

(1) x，y を実数とする。
　$|x|\leqq 1$ かつ $|y|\leqq 1$ ならば，$(x+y)^2\leqq(xy+1)^2$ である。

(2) a，b，c を実数とする。
　すべての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば，$b^2-4ac<0$ である。

(3) a を整数とする。
　2 次方程式 $x^2+3x+a=0$ が有理数の解をもつならば，a は偶数である。

5 (1) 次の $\boxed{}$ の中をうめよ。

① 2 直線 a，b が 1 点 P で交わるとき a，b 上にない点 X について，X から a，b にそれぞれ垂線 XJ，XK をひく。ただし，J，K は P と異なるとする。このとき，X が ∠JPK の二等分線上にあるための必要十分条件は，XJ = $\boxed{\text{（あ）}}$ が成り立つことである。

② 2 点 C，D に対し，点 X が線分 CD の垂直二等分線上にあるための必要十分条件は，$\boxed{\text{（イ）}}$ = $\boxed{\text{（ウ）}}$ が成り立つことである。

(2) △ABC の ∠A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を D とおく。

① 線分 AD 上に DB = DX となる点 X をとると，X より辺 BC，AB にひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

② 線分 AD の D の方向への延長上にある点 Y から直線 BC，AB にひいた垂線の長さが等しいならば，D は線分 XY の中点となることを示せ。

6 △OAB において，点 G を $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ である点とする。また，2 点 P，Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0 < p < 1,\ 0 < q < 1)$ である点とする。

(1) 点 G が △OAB の内部にあるとき，k の満たすべき条件を求めよ。ただし，△OAB の内部とは，△OAB で囲まれる部分からその周を除いた部分をさす。

(2) △OAB と △OPQ の面積をそれぞれ S，S' とするとき，$\dfrac{S'}{S}$ を p，q を用いて表せ。

(3) 3 点 G，P，Q が同一直線上にあるとき，k を p，q を用いて表せ。

(4) $k = \dfrac{1}{4}$ であって，3 点 G，P，Q が同一直線上にあるとき，$\dfrac{S'}{S}$ の最小値を求めよ。

7 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える。

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると，移った点の絶対値が a の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha = i$，$\theta = 90^\circ$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。

(2) (α, θ) を一組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか。

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2) の図形が虚軸に接するのは θ が何度のときか。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

$\boxed{8}$ 赤玉 2 球，白玉 8 球が入った袋がある。この袋から玉を同時に 2 球取りだし，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す。n 回の試行の後，袋に赤玉が 2 球残っている確率を p_n，1 球残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) q_2 を求めよ。

(3) p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} を用いて表せ。ただし，$n \geqq 2$ とする。

解答例

1 (1) 円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4 \quad \cdots ①$

直線 OA の方程式は $\quad y=\dfrac{1}{2}x \quad \cdots ②$

①，② から x を消去すると

$$(2y-2)^2+(y-2)^2=4 \quad \text{ゆえに} \quad (y-2)(5y-2)=0$$

A $\neq$ P より，$y\neq 2$ であるから $\quad y=\dfrac{2}{5}$，$x=\dfrac{4}{5} \quad$ よって $\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)}$

(2) 円 ① 上の点 P を $(s,\ t)$，△OAP の重心 G を $(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{4+s}{3},\quad y=\frac{2+t}{3} \quad \text{ゆえに} \quad s=3x-4,\quad t=3y-2$$

P は円 ① 上の点であるから

$$(3x-6)^2+(3y-4)^2=4 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

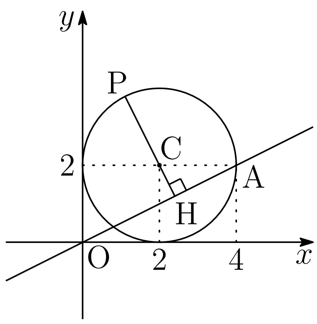
△OAP の重心 G は $\quad \mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ のとき，$\mathrm{G}\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

$\mathrm{P}(4,\ 2)$ のとき，$\mathrm{G}\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \quad (x,\ y)\neq\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right),\left(\frac{8}{3},\ \frac{4}{3}\right)}$$

(3) $\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$



円の中心を C(2, 2) とし，C から直線 OA：$x-2y=0$ に垂線 CH を引くと

$$\mathrm{CH}=\frac{|2-2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

直線 HC の延長と円の交点を P にとればよい．

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PC}+\mathrm{CH}=2+\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，△OAP の面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\left(2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{2(\sqrt{5}+1)}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 求める平均変化率は

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = \frac{aq^2+bq+c-(ap^2+bp+c)}{q-p}$$
$$= \frac{a(q^2-p^2)+b(q-p)}{q-p} = \boldsymbol{a(p+q)+b}$$

(2) 微分係数の定義により

$$f'(r) = \lim_{x\to r}\frac{f(x)-f(r)}{x-r} = \lim_{x\to r}\{a(r+x)+b\} = \boldsymbol{2ar+b}$$

微分係数

$$\boldsymbol{f'(r) = \lim_{h\to 0}\frac{f(r+h)-f(r)}{h} = \lim_{x\to r}\frac{f(x)-f(r)}{x-r}}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$a(p+q)+b = 2ar+b$

$a\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{2r = p+q}$

(4) $f(x)=x^2$ を微分すると　$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y-p^2 = 2p(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px-p^2 \quad \cdots ①$$

同様に，$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2qx-q^2 \quad \cdots ②$$

①，② の交点の x 座標は　$x=\dfrac{p+q}{2}$

求める面積を S とすると

$$S = \int_p^{\frac{p+q}{2}}\{x^2-(2px-p^2)\}\,dx + \int_{\frac{p+q}{2}}^q\{x^2-(2qx-q^2)\}\,dx$$
$$= \int_p^{\frac{p+q}{2}}(x-p)^2\,dx + \int_{\frac{p+q}{2}}^q(x-q)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_p^{\frac{p+q}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-q)^3\right]_{\frac{p+q}{2}}^q = \boldsymbol{\frac{1}{12}(q-p)^3}$$

■

3 (1) $2^m \leqq 4m^2$，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ より　$2(m+1)^2 < 2^m \leqq 4m^2$　$\cdots$①

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$2(m+1)^2$	8	18	32	50	72	98	128	162
2^m	2	4	8	16	32	64	128	256
$4m^2$	4	16	36	64	100	144	196	256

① を満たす最小の m であるから　$\boldsymbol{m=8}$

(2) (1) の結果から　$2^n > 4n^2 \quad (n \geqq 8) \quad \cdots(*)$

これを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n=9$ のとき　$2^9 = 512$，$4\cdot 9^2 = 324$　よって，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$2^k > 4k^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{k+1} > 8k^2$$

ここで　$8k^2 - 4(k+1)^2 = 4k^2 - 8k - 4$

$$= 4\{(k-1)^2 - 2\} = 4(8^2 - 2) > 0$$

したがって　$2^{k+1} > 8k^2 > 4(k+1)^2$

よって，$n = k+1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，9 以上の自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(3) (1) の表および (2) の結論により

$$\begin{array}{ll} 1 \leqq k \leqq 7 \text{ のとき} & 2^k - 4k^2 < 0 \\ k = 8 \text{ のとき} & 2^k - 4k^2 = 0 \\ 9 \leqq k \text{ のとき} & 2^k - 4k^2 > 0 \end{array}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2 = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 4k^2)$$

ゆえに，S_n を最小にする整数 n は　$n = 7,\ 8$

よって，求める S_n の最小値は

$$S_7 = \sum_{k=1}^{7} 2^k - \sum_{k=1}^{7} 4k^2$$

$$= \frac{2(2^7-1)}{2-1} - 4 \times \frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15 = \boldsymbol{-306}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $$\begin{aligned}(xy+1)^2-(x+y)^2 &= (xy+x+y+1)(xy-x-y+1)\\ &= (x+1)(y+1)(x-1)(y-1)\\ &= (x^2-1)(y^2-1) = (1-|x|^2)(1-|y|^2)\\ &= (1+|x|)(1-|x|)(1+|y|)(1-|y|)\end{aligned}$$

したがって，$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば　$1-|x| \geqq 0$，$1-|y| \geqq 1$

ゆえに　$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$　よって，この命題は真である．

(2) 偽 (反例)

$a=b=0,\ c>0$ のとき，すべての x について　$ax^2+bx+c>0$

このとき　　$b^2-4ac=0$

(3) a は整数，$x^2+3x+a=0$　$\cdots$①

① が有理数の解 $\dfrac{p}{q}$ (p と q は互いに素な整数, $q>0$) をもつとすると

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2+3\left(\frac{p}{q}\right)+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p^2}{q}=-aq-3p$$

右辺は整数であるから，左辺も整数．また，p，q は互いに素であるから，$q=1$．これを上式に代入すると

$$p^2=-a-3p \quad \text{ゆえに} \quad a=-p(p+3)$$

p と $p+3$ の偶奇は一致しないので，$p(p+3)$ は偶数．ゆえに，a は偶数．

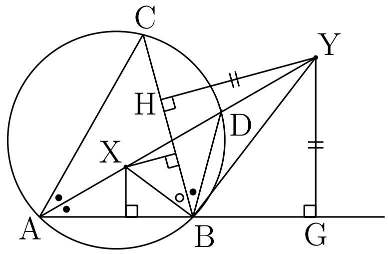
よって，この命題は真である．■

5 (1) ① (あ) XK

② (い) XC (う) XD

(2) ① $\angle\mathrm{CAB} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{CBX} = \beta$ とおく．

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の円周角により



$$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CBD} = \alpha$$

条件により，$\mathrm{DX} = \mathrm{DB}$ であるから

$$\angle\mathrm{DXB} = \angle\mathrm{DBX} = \alpha + \beta$$

$\triangle\mathrm{XAB}$ について，$\angle\mathrm{XAB} + \angle\mathrm{XBA} = \angle\mathrm{DXB}$ であるから

$$\alpha + \angle\mathrm{XBA} = \alpha + \beta \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{XBA} = \beta$$

$\angle\mathrm{CBX} = \angle\mathrm{XBA}$ となり，BX は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線である．

よって，X より辺 BC，AB にひいた垂線の長さは等しい．

② Y から辺 AB，BC にそれぞれ垂線 YG，YH を引く．$\mathrm{YG} = \mathrm{YH}$ より，

$\triangle\mathrm{YBG} \equiv \triangle\mathrm{YBH}$ であるから，$\angle\mathrm{DBY} = \gamma$ とおくと

$$\angle\mathrm{YBG} = \angle\mathrm{YBH} = \alpha + \gamma$$

$\angle\mathrm{YBG} + \angle\mathrm{YBH} + \angle\mathrm{ABC} = 180^\circ$ であるから

$$(\alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma) + 2\beta = 180^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$$

$\triangle\mathrm{DBX}$ において，上の結果により

$$\angle\mathrm{BDX} = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 2(90^\circ - \alpha - \beta) = 2\gamma$$

$\angle\mathrm{DBY} + \angle\mathrm{DYB} = \angle\mathrm{BDX}$ であるから

$$\gamma + \angle\mathrm{DYB} = 2\gamma \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{DYB} = \gamma$$

$\angle\mathrm{DBY} = \angle\mathrm{DYB}$ であるから　$\mathrm{DB} = \mathrm{DY}$

また，条件により，$\mathrm{DB} = \mathrm{DX}$ であるから　$\mathrm{DX} = \mathrm{DY}$

よって，D は線分 XY の中点である．

補足 X は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心．4 点 B，C，X，Y は D を中心とする同心円上にある．

■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) AB の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = 2k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

G が △OAB の内部にあるとき

$$0 < 2k < 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0 < k < \frac{1}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta, \quad S' = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta$$

よって
$$\frac{S'}{S} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \boldsymbol{pq}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\left(\frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right) = \frac{k}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{k}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

このとき　$\frac{k}{p} + \frac{k}{q} = 1$　よって　$\boldsymbol{k = \frac{pq}{p+q}}$

(4) $k = \frac{1}{4}$ で，3 点 P，Q，R が同一直線上にあるとき，(3) の結果から

$$p + q = 4pq$$

$p > 0$，$q > 0$ であるから，相加平均･相乗平均の関係により　$p+q \geqq 2\sqrt{pq}$
したがって　$4pq \geqq 2\sqrt{pq}$　ゆえに　$pq \geqq \frac{1}{4}$
上式において，等号が成立するのは，$p = q = \frac{1}{2}$ のときである．

したがって　$\frac{S'}{S} = pq \geqq \frac{1}{4}$　よって，求める最小値は　$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ ■

$\boxed{7}$ (1) 与えられた条件により，点 z が移動した点を w とすると

$$w = \alpha + (z - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \cdots (*)$$

このとき，$\alpha = i$，$\theta = 90^\circ$ であるから

$$w = i + (z - i)i = i(z + 1 - i)$$

また，$|w| = \frac{1}{2}|\alpha| = \frac{1}{2}|i| = 1$ であるから

$$|w| = |i(z + 1 - i)| \quad \text{ゆえに} \quad |z + 1 - i| = \frac{1}{2}$$

よって，z は，**点 $\boldsymbol{-1 + i}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ の円.**

(2) $(*)$ より　$|w| = |\alpha + (z - \alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)|$

これに $|w| = \frac{1}{2}|\alpha|$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\alpha| &= |\cos\theta + i\sin\theta|\left|\frac{\alpha}{\cos\theta + i\sin\theta} + z - \alpha\right| \\ &= |\alpha(\cos\theta - i\sin\theta) + z - \alpha| \\ &= |z - \alpha(1 - \cos\theta + i\sin\theta)|\end{aligned}$$

よって，点 z は，**$\boldsymbol{\alpha(1 - \cos\theta + i\sin\theta)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}|\alpha|}$ の円.**

(3) (2) の円の中心の実部 $\alpha(1 - \cos\theta)$ の絶対値がこの円の半径 $\frac{1}{2}|\alpha|$ に等しいとき，この円は虚軸に接するから

$$|\alpha(1 - \cos\theta)| = \frac{1}{2}|\alpha|$$

ここで，$\alpha \neq 0$，$1 - \cos\theta \geqq 0$ に注意して

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より　　$\boldsymbol{\theta = 60^\circ,\ 300^\circ}$ ■

$\boxed{8}$ (1) p_1 は 1 回の試行で白玉 2 個を取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{8\cdot7}{2\cdot1} \times \frac{2\cdot1}{10\cdot9} = \boldsymbol{\frac{28}{45}}$$

q_1 は 1 回の試行で白玉 1 個と赤玉 1 個を取り出す確率であるから

$$q_1 = \frac{{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{8\cdot2}{45} = \boldsymbol{\frac{16}{45}}$$

(2) q_2 は，(1) の結果を利用して

$$q_2 = p_1\cdot q_1 + q_1 \times \frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = q_1\left(\frac{28}{45} + \frac{7}{9}\right) = \frac{16}{45} \times \frac{7}{5} = \boldsymbol{\frac{112}{225}}$$

(3) n 回目の試行後に赤玉が 2 個残っている確率は，$n-1$ 回目の試行後に赤玉が 2 個残り，n 回目の試行において白玉 2 個を取り出す確率であるから

$$p_n = p_{n-1} \times \frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{28}{45}p_{n-1}}$$

n 回目の試行後に赤玉が 1 個残っている確率は，$n-1$ 回目の試行後に赤玉が 2 個残り，n 回目の試行において白玉 1 個，赤玉 1 個を取り出すか，または，$n-1$ 回目の試行後に赤玉が 1 個残り，n 回目の試行において白玉 2 個を取り出す確率であるから

$$q_n = p_{n-1}\cdot q_1 + q_{n-1} \times \frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{16}{45}p_{n-1} + \frac{7}{9}q_{n-1}}$$

■