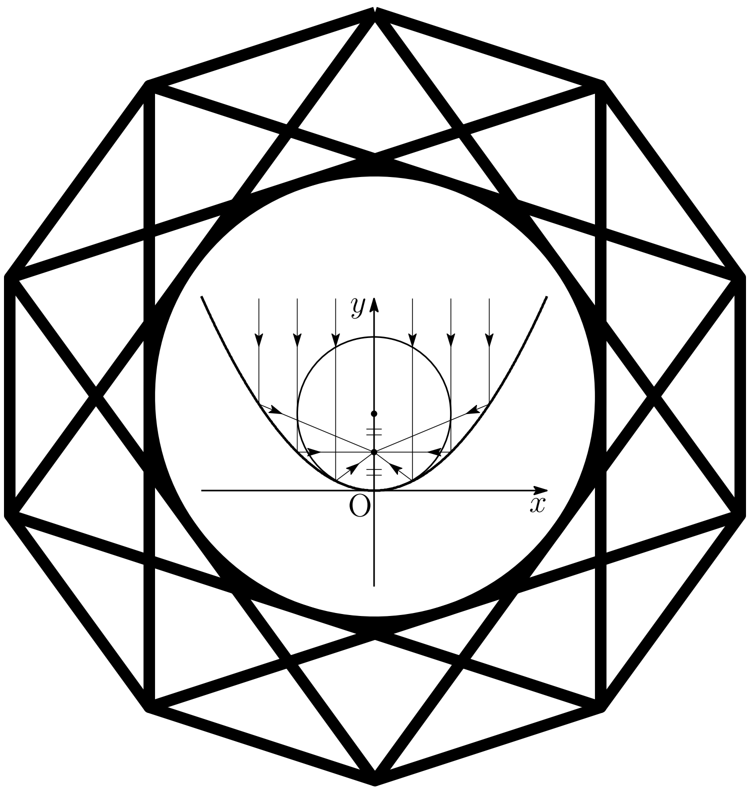
入試の軌跡

九州地区大学

2015 − 2020

数　学



2021 年 3 月 23 日

Typed by LaTeX 2_ε

序

現行課程において，九州地区の国立大学

九州大学	九州工業大学	福岡教育大学	佐賀大学	長崎大学
熊本大学	大分大学	宮崎大学	鹿児島大学	琉球大学

で実施された平成 27 年 (2015 年) 度から令和 2 年 (2020 年) 度までの一般前期試験問題 (数学) および解答例をすべて掲載した．

また，これらの問題および解答例は，年度ごとに次のサイトにも掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

本書の作成にあたり，以下の点に留意した．

1. 解答は，図や解説を充実させ，自学自習ができるように配慮した．
2. ICT 教材として，電子黒板やプロジェクターでの使用を視野に入れており，この機能を利用する際には，全画面表示 (Ctrl+L) および描画領域に合わせる (Ctrl+3) と見やすくなる．ページスクロールには，(Ctrl+▲，Ctrl+▼) が利用でき，リンク (ジャンプ) 先から戻る (Alt+◀)，進む (Alt+▶) も利用できる．なお，全画面表示を解除するには ESC．
3. スマートフォンでの使用も想定し，ページリンクの操作性を配慮した ICT 教材でもある．問題および解答には相互リンクを施した．各問の解答の終わりにある ■ をクリックすると，各大学の出題分野に戻る．また，出題分野の左上にある ◀ をクリックすると，最初のページに戻る．

上の 2，3 の機能をサポートする PDF ブラウザとして，Adobe Reader をご使用ください (フリーソフト)．スマートフォンには，同アプリがインストールされていない場合が多いので，同アプリをインストールされてからご使用ください．

令和 2 年 5 月　編者

目 次

序 i

第 1 章　九州大学 1
文系 出題分野 1
1.1　2015 年 (文系) 2
1.2　2016 年 (文系) 7
1.3　2017 年 (文系) 15
1.4　2018 年 (文系) 21
1.5　2019 年 (文系) 26
1.6　2020 年 (文系) 30
理系 出題分野 35
1.7　2015 年 (理系) 36
1.8　2016 年 (理系) 45
1.9　2017 年 (理系) 56
1.10　2018 年 (理系) 67
1.11　2019 年 (理系) 81
1.12　2020 年 (理系) 91

第 2 章　九州工業大学 99
工学部 出題分野 99
2.1　2015 年 (工学部) 100
2.2　2016 年 (工学部) 110
2.3　2017 年 (工学部・情報工学部) 122
2.4　2018 年 (工学部・情報工学部) 130
2.5　2019 年 (工学部・情報工学部) 139
2.6　2020 年 (工学部・情報工学部) 147
情報工学部 出題分野 158
2.7　2015 年 (情報工学部) 159
2.8　2016 年 (情報工学部) 167

第 3 章　福岡教育大学 177
出題分野 177
3.1　2015 年 178
3.2　2016 年 185
3.3　2017 年 191

3.4 2018 年 198
3.5 2019 年 205
3.6 2020 年 211

第 4 章 佐賀大学 **219**
出題分野 219
4.1 2015 年 223
4.2 2016 年 235
4.3 2017 年 244
4.4 2018 年 257
4.5 2019 年 272
4.6 2020 年 283

第 5 章 長崎大学 **297**
出題分野 297
5.1 2015 年 301
5.2 2016 年 316
5.3 2017 年 331
5.4 2018 年 349
5.5 2019 年 364
5.6 2020 年 379

第 6 章 熊本大学 **403**
文系 出題分野 403
6.1 2015 年 (文系) 404
6.2 2016 年 (文系) 409
6.3 2017 年 (文系) 415
6.4 2018 年 (文系) 421
6.5 2019 年 (文系) 427
6.6 2020 年 (文系) 434
理系 出題分野 443
6.7 2015 年 (理系) 444
6.8 2016 年 (理系) 452
6.9 2017 年 (理系) 459
6.10 2018 年 (理系) 466
6.11 2019 年 (理系) 472
6.12 2020 年 (理系) 479
医学部 出題分野 487
6.13 2015 年 (医学部) 488

6.14 2016 年 (医学部) 495
6.15 2017 年 (医学部) 501
6.16 2018 年 (医学部) 514
6.17 2019 年 (医学部) 523
6.18 2020 年 (医学部) 529

第 7 章　大分大学 **539**
出題分野 539
7.1　2015 年 543
7.2　2016 年 556
7.3　2017 年 570
7.4　2018 年 582
7.5　2019 年 595
7.6　2020 年 605

第 8 章　宮崎大学 **619**
出題分野 619
8.1　2015 年 623
8.2　2016 年 644
8.3　2017 年 662
8.4　2018 年 681
8.5　2019 年 695
8.6　2020 年 712

第 9 章　鹿児島大学 **731**
出題分野 731
9.1　2015 年 734
9.2　2016 年 745
9.3　2017 年 755
9.4　2018 年 767
9.5　2019 年 777
9.6　2020 年 788

第 10 章 琉球大学 **805**
出題分野 805
10.1 2015 年 807
10.2 2016 年 815
10.3 2017 年 823
10.4 2018 年 831

10.5 2019 年 839
10.6 2020 年 848

第 1 章　九州大学

出題分野　(文系　理系)

文系 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	九州大学 文系	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式							2			
	2 次関数										
	図形と計量				3						
	データの分析										
II	式と証明									4	
	複素数と方程式										3
	図形と方程式			2·4	1			2			
	三角関数				3						
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1	2	4	1	1	1	1	1	2	1
A	場合の数と確率	4	4	3	4*	3	3	3	4	1	4
	整数の性質		3		2	4	4	4	2		3
	図形の性質				3		2				
B	平面上のベクトル	3							3		
	空間のベクトル		1	1		2				3	2
	数列	2	4								
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

1.1 2015年(文系)

1 座標平面上の2つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし，a，b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるための a，b に関する条件を求めよ。

以下，a，b が(1)の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる面積が9であるとする。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

2 1辺の長さが1である正四面体OABCを考える。辺OAの中点をP，辺OBを2 : 1に内分する点をQ，辺OCを1 : 3に内分する点をRとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分PQの長さと線分PRの長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3) 三角形PQRの面積を求めよ。

3 袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を考える。

(操作) 袋から1個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を1枚もらう。

この操作を4回繰り返す。もらう硬貨の総数が1枚である確率と，もらう硬貨の総数が2枚である確率をそれぞれ求めよ。

4 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は3の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし，k を0以上の整数とする。$2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。

解答例

1 (1) $y=x^2$ と $y=-x^2+ax+b$ から y を消去すると

$$x^2=-x^2+ax+b \quad \text{すなわち} \quad 2x^2-ax-b=0 \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるとき，$(*)$ より

$$(-a)^2-4\cdot2\cdot(-b)>0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a^2+8b>0}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2},\quad \alpha\beta=-\frac{b}{2}$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b} \quad \cdots①$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\{(-x^2+ax+b)-x^2\}\,dx &= -\int_\alpha^\beta(2x^2-ax-b)\,dx\\ &=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

したがって $\quad \dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=9 \quad$ ゆえに $\quad \beta-\alpha=3 \quad \cdots②$

①，② より $\quad \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}=3 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{b=-\dfrac{1}{8}a^2+\dfrac{9}{2}}$

(3) (2) の結果から，C_2 は

$$y=-x^2+ax-\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{8}a^2+\frac{9}{2}$$

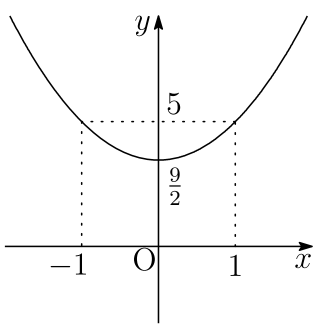
C_2 の頂点を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，C_2 の頂点が描く軌跡の方程式は

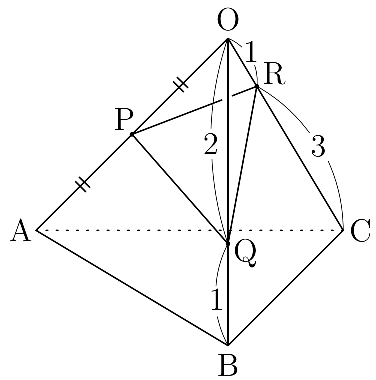
$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$$

その軌跡は，右の図のようになる．



■

2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

よって
$$\mathbf{PQ}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{13}}{6}},\quad \mathbf{PR}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

別解 △OPQ および △OPR に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$$
$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{5}{48}}$$

(3) $$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{131}}{96}}$$ ■

3 1，3 回目の操作で青玉の個数は 2 個または 0 個.

2，4 回目の操作で青玉の個数は 3 個または 1 個.

したがって，もらう硬貨の枚数は 0，1，2 枚のいずれかである.

2 回目の操作で青玉 3 個である確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

したがって，2 回目の操作で青玉 1 個である確率は

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

2，4 回目の操作で青玉 3 個，すなわち，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率は

$$\frac{2}{9}\times 1\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

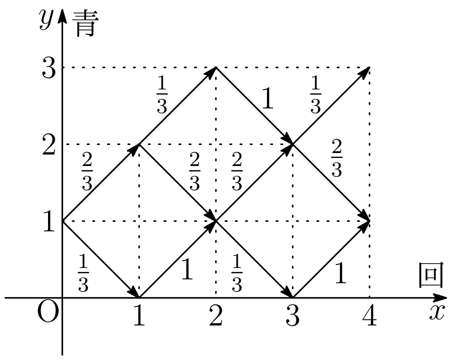
2，4 回目の操作で青玉 1 個，すなわち，硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$$

よって，もらう硬貨の総数が 1 枚である確率は

$$1-\left(\frac{2}{27}+\frac{49}{81}\right)=\boldsymbol{\frac{26}{81}}$$

補足 x 回目の操作で青玉が y 個である確率を $P(x,y)$ とすると



$$P(2,3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$
$$P(2,1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$$

4 回の操作で硬貨を 2 枚もらう (青玉が 2 回 3 個になる) 確率は

$$P(2,3)\times 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

4 回の操作で硬貨を 1 枚ももらわない確率は

$$\{P(2,1)\}^2=\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$$

■

$\boxed{4}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) $2^{p-1} - 1 = p^k$ (p は素数, k は 0 以上の整数)　$\cdots(*)$

(i) $p = 2$ のとき，$(*)$ は

$$1 = 2^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 0$$

(ii) $p \neq 2$ のとき，p は奇素数であるから，$p - 1$ は偶数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数である．

$(*)$ より，p^k は 3 を因数にもつから

$$p = 3$$

これを $(*)$ に代入すると

$$3 = 3^k \quad \text{ゆえに} \quad k = 1$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ k) = (2,\ 0),\ (3,\ 1)}$

■

1.2　2016 年 (文系)

1 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$　$(0 < \alpha < \beta)$ があり，曲線 $C : y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a，b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0 < \alpha < \beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2 : 1$，$t : 1-t$，$1 : 3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 袋の中に，赤玉が15個，青玉が10個，白玉が5個入っている。袋の中から玉を1個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作) コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を1度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となり得る点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の4点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1, -1)$，$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を13で割った余りを a_n とおく。a_n は0から12までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を13で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ。

(3) 以下の3条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

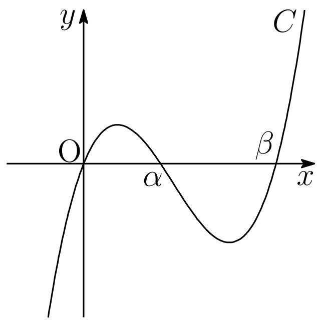
　(i) N を十進数で表示したとき6桁となる。

　(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと2016となる。

　(iii) N は13で割り切れる。

解答例

1 (1) C は x 軸との共有点の x 座標が $x=0,\ \alpha,\ \beta$ であるから，$C: y=f(x)$ の方程式は x^3 の係数に注意して $(0<\alpha<\beta)$



$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3+\frac{1}{2}\alpha\beta x^2$$

とおくと

$$F(0)=0,\quad F(\alpha)=-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta,\quad F(\beta)=-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x)\,dx-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_0^\alpha-\Big[\,F(x)\,\Big]_\alpha^\beta \\ &= 2F(\alpha)-F(\beta)-F(0) \\ &= 2\left(-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta\right)-\left(-\frac{1}{12}\beta^4+\frac{1}{6}\alpha\beta^3\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta-\frac{1}{6}\alpha\beta^3+\frac{1}{12}\beta^4} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2\beta-\frac{1}{6}\beta^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\alpha-\beta)\{2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2\} \end{aligned}$$

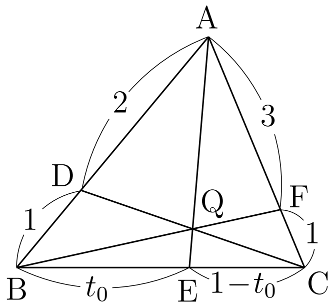
$0<\alpha<\beta$ であるから　$2\alpha(\beta-\alpha)+\beta^2>0$

したがって

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	(β)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，S を最小にする α は　$\boldsymbol{\alpha=\frac{\beta}{2}}$ ■

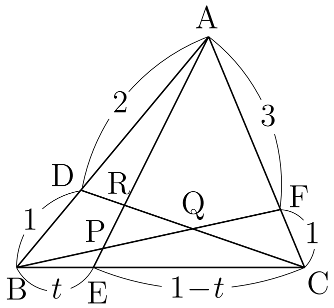
2　(1)　チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\frac{3}{5}}$

(2)　△AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\frac{3}{t}$

よって　$k=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\frac{3}{3+t}}$

△BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\frac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\frac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\frac{3(1-t)}{3-t}}$

(3)　(2) の図について，△BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\frac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\frac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\frac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}{\cdot}\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}{\cdot}\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5)^2$$

(3) の結果から　　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2{\cdot}\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると [1]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2 次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{3}$ (1) 白玉を1度だけ取り出すので，赤玉を m 回 $(m=0,1,\cdots,n-1)$ 取り出すとすると，青玉を取り出す回数は $n-m-1$ であるから，到達点 $(x,\ y)$ は

$$x=m-1,\quad y=(n-m-1)-1=n-m-2$$

よって，到達点は　$\boldsymbol{(m-1,\ n-m-2)\quad (m=0,1,\cdots,n-1)}$

(2) 赤玉，青玉，白玉を取り出す回数を，それぞれ i，j，k とすると，到達点 $(x,\ y)$ は $(i+j+k=n)$

$$x=i-k,\quad y=j-k$$

このとき，$k=n-i-j$ であるから

$$(*)\begin{cases} x=i-(n-i-j)=2i+j-n \\ y=j-(n-i-j)=i+2j-n \end{cases}$$

ここで

$$2i+j-n=2i'+j'-n,\quad i+2j-n=i'+2j'-n$$

とすると

$$2(i-i')+(j-j')=0,\quad (i-i')+2(j-j')=0$$

これを解くと　$(i,\ j)=(i',\ j')$

したがって，$(i,\ j)\neq(i',\ j')$ のとき

$$(2i+j-n,\ i+2j-n)\neq(2i'+j'-n,\ i'+2j'-n)$$

このことから，$(i,\ j,\ k)$ の組合せの個数とその到達点の個数は一致する．

よって，求める到達点の個数は，赤玉，青玉，白玉の3種類の玉から n 個取り出す重複組合せの総数に一致するので

$${}_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\boldsymbol{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

(3) $(*)$ から

$$i=\frac{2x-y}{3}+\frac{n}{3},\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+\frac{n}{3}\quad\cdots(**)$$

$n=3$ のとき，上式より

$$i=\frac{2x-y}{3}+1,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+1$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3-i-j)$

$$(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ (1,-1,\ 2,\ 0,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{6}+\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{25}{72}}$$

(4) $n=3N$ のとき，$(**)$ より

$$i=\frac{2x-y}{3}+N,\quad j=\frac{2x-y}{3}-x+y+N$$

$(x,\ y)$ が D 内にあるとき $(k=3N-i-j)$

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ i,\ j,\ k)=(-1,\ 1,\ N-1,\ N+1,\ N),\ (0,\ 0,\ N,\ N,\ N),\\ (1,-1,\ N+1,\ N-1,\ N)\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P_{3N}&=\frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&\quad+\frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{N}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&\qquad+\frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}\\&=\boldsymbol{\frac{(19N+6)(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^2(N+1)!}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 仮定から　$10^n \equiv a_n$，　$10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第 1 式から　$10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって　$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より　$\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法 13 について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q$$

とおくと，法 13 に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p{\cdot}10^5 + 2{\cdot}10^4 + 10^2 + 6{\cdot}10 + q \\ &\equiv p{\cdot}4 + 2{\cdot}3 + 9 + 6{\cdot}10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

1.3　2017 年 (文系)

$\boxed{1}$ 定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面上に原点 O，点 A$(1,\ a)$，点 B$(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) $a=1$ のとき，△OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3) △OAB が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。

$\boxed{3}$ A と B の 2 人が A，B，A，B，$\cdots$ の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3) 自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 求める直線を $l: y = px + q$ とおく．C_1 と l の方程式から y を消去すると

$$2x^2 + 1 = px + q \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 - px - q + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と l は接するので，方程式 $(*)$ の係数について

$$(-p)^2 - 4{\cdot}2(-q+1) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 + 8q - 8 = 0 \quad \cdots ①$$

同様に，C_2 と l の方程式から y を消去すると

$$-x^2 + a = px + q \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + px + q - a = 0 \quad \cdots (**)$$

C_2 と l は接するので，上の方程式の係数について

$$p^2 - 4{\cdot}1(q - a) = 0 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 4q + 4a = 0 \quad \cdots ②$$

①，② から　$p^2 = \dfrac{8}{3}(1-a)$，$q = \dfrac{1}{3}(a+2)$

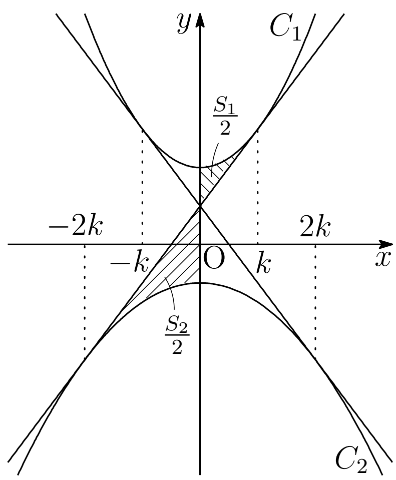
よって，求める 2 直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}\,x + \frac{1}{3}(a+2)}$$

(2) (1) の結果から，次の 2 式は平方式になることに注意して

$$2x^2 + 1 - (px + q) = 2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$
$$px + q - (-x^2 + a) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$p = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}(1-a)}$ のとき，$k = \dfrac{p}{4}$ とおく．C_1，C_2 および 2 接線は y 軸に関して対称であることに注意して



$$\frac{S_1}{2} = \int_0^k 2(x-k)^2\,dx = \left[\frac{2}{3}(x-k)^3\right]_0^k = \frac{2k^3}{3},$$

$$\frac{S_2}{2} = \int_{-2k}^0 (x+2k)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x+2k)^3\right]_{-2k}^0 = \frac{8k^3}{3}$$

よって　$\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{16k^3}{3} \times \dfrac{3}{4k^3} = \mathbf{4}$

解説 $y = kx^2 \cdots ①$ は $y = x^2 \cdots ②$ を x 軸を元に y 軸方向に k 倍だけ拡大したものであるが，① 上の点 $\mathrm{P}(t,\ kt^2)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ をとると

$$(x,\ y) = k(t,\ kt^2) \quad \text{ゆえに} \quad x = kt,\quad y = (kt)^2$$

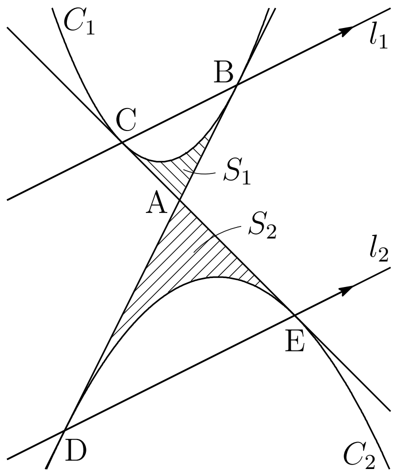
これから，点 Q の描く軌跡は，$y = x^2$ である．

したがって，① と ② は相似であり，その相似比は $1 : |k|$ である．

一般に，放物線は相似であり，2 つの放物線

$$C_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1,\quad C_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

の相似比は $\dfrac{1}{|a_1|} : \dfrac{1}{|a_2|}$ である．



右の図のように，C_1，C_2 と 2 本の共通接線との接点を B，C，D，E とすると，点 A は線分 BD および線分 CE を

$$\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$$

に内分するである．また，2 つの斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると，面積比は相似比の 2 乗に比例するから

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{{a_1}^2} : \frac{1}{{a_2}^2}$$

特に，$S_1 = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2 = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ADE}$ である [2]．

本題の点 A は C_1 の頂点 $(0,\ 1)$ と C_2 の頂点 $(0,\ a)$ を $1 : 2$ に内分する点で

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2+a}{3}\right)$$

また，C_1 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をみたす点 Q の軌跡が C_2 である．

点 A を通り，傾き m の直線 $y = mx + \dfrac{2+a}{3}$ が $C_1 : y = 2x^2 + 1$ と接するとき，

2 次方程式 $2x^2 - mx + \dfrac{1-a}{3} = 0$ の係数により

$$(-m)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}\frac{1-a}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

2 (1) 3点 O(0, 0)，A(1, 1)，B$(s,\ t)$ について，△OAB が正三角形であるから，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$ より

$$1^2+1^2=s^2+t^2=(s-1)^2+(t-1)^2$$

整理すると　　$s^2+t^2=2,\quad s+t=1$

これを解いて　$\boldsymbol{(s,\ t)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)}$　**(複号同順)**

(2) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，自然数 p，q を用いて

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\quad(p,\ q\text{ は互いに素})$$

とおける．これから，$p=\sqrt{3}q$ の両辺を平方すると

$$p^2=3q^2\quad\cdots①$$

p^2 は3の倍数であるから，p は3の倍数である．

したがって，$p=3k$ (k は自然数) とおけ，これを ① に代入すると

$$(3k)^2=3q^2\quad\text{ゆえに}\quad q^2=3k^2$$

q^2 は3の倍数であるから，q も3の倍数である．このことは，p と q が互いに素であることに反する．よって，$\sqrt{3}$ は無理数である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t)$ であるから，△OAB の面積により

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin 60^\circ=\frac{1}{2}|t-as|$$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2}(a^2+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}|t-as|\quad\text{ゆえに}\quad\sqrt{3}=\frac{2|t-as|}{a^2+1}\quad\cdots(*)$$

a が有理数であるとき，2数 s，t がともに有理数であるとすると，$(*)$ の右辺は有理数となり，(2) の結果に矛盾する．

よって，s と t のうち少なくとも1つは無理数である．■

3 (1) サイコロを 1 回投げるとき，勝敗が決まらない，すなわち，1 または 2 の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

n 回以下では勝敗が決まらないのは，n 回とも 1 または 2 の目が出ることであるから，よって，求める確率 p_n は

$$p_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{3^n}}$$

p_n が 0.005 より小さいとき

$$\frac{1}{3^n}<0.005=\frac{1}{200}\quad \text{ゆえに}\quad 3^n>200$$

$3^4=81$，$3^5=243$ であるから，求める最小の n は　　$\boldsymbol{n=5}$

(2) サイコロを 1 回投げるとき，勝者が決まる，すなわち，3，4，5，6 の目が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つのは，1 回目または 3 回目で A が勝つことであるから，求める確率は

$$\frac{2}{3}+p_2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{20}{27}}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\sum_{i=1}^{k}p_{2i}\times\frac{2}{3}&=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^{2i}}=\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{9}\right)^i\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{9^{k+1}}\right)}\end{aligned}$$

■

4 (1) ユークリッドの互除法を用いて

$$\begin{aligned} 2017 &= 225 \times 8 + 217, \\ 225 &= 217 \times 1 + 8, \\ 217 &= 8 \times 27 + 1 \end{aligned}$$

よって，求める最大公約数は　**1**

(2) $225 = 3^2 \times 5^2$，$2017 = 15 \times 134 + 7$
全体集合を $U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 134\}$ とし，その部分集合を

$$\begin{aligned} A &= \{3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}3,\ \cdots,\ 3{\cdot}44\}, \\ B &= \{5{\cdot}1,\ 5{\cdot}2,\ 5{\cdot}3,\ \cdots,\ 5{\cdot}26\} \end{aligned}$$

とすると

$$A \cap B = \{15{\cdot}1,\ 15{\cdot}2,\ 15{\cdot}3,\ \cdots,\ 15{\cdot}8\}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 134 - (44 + 26 - 8) = \mathbf{72} \end{aligned}$$

(3) $225 = 3^2 \times 5^2$，$15 = 3 \times 5$，$1998 = 2 \times 3^3 \times 37$，$111 = 3 \times 37$
求める数は2017以下で，$3 \times 5 \times 37$ の倍数は

$$\{555n \mid n = 1, 2, 3\}$$

ただし，n は2，3，5と互いに素であるから，求める数は　**555**　■

1.4　2018 年 (文系)

$\boxed{1}$ 座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，a，b は実数，$c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) a，b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_{(2)}$$

をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し，

$$L = \mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとき，次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot\vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また，L の最小値は

$$\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2)$$

であることを示せ。

4 3 つの部品 a，b，c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b，c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。
- 部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < \dfrac{1}{3}$，$0 < r < \dfrac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b の少なくとも一方が不良品である確率を p，q を用いて表せ。

(2) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p，q，r を用いて表せ。

(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき，部品 b も不良品である確率を p，q を用いて表せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接するから，曲線の方程式の x^3 の係数および定数項に注意して

$$y = (x-c)^2\left(x + \frac{1}{c}\right) \quad \cdots (*)$$

とおける．これを展開すると

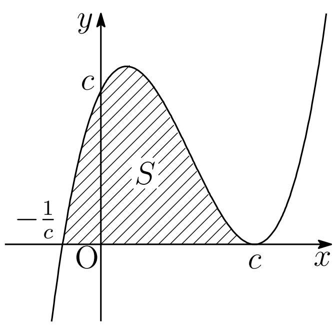
$$y = x^3 + \left(\frac{1}{c} - 2c\right)x^2 + (c^2-2)x + c$$

与えられた曲線の方程式と上式の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{c} - 2c, \quad b = c^2 - 2}$$

(2) $(*)$ により $(c > 0)$

$$S = \int_{-\frac{1}{c}}^{c}\left(x + \frac{1}{c}\right)(c-x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{12}\left(c + \frac{1}{c}\right)^4$$



$c > 0,\ \dfrac{1}{c} > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$c + \frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{1}{c}} = 2$$

上式において，等号が成立するのは

$$c = \frac{1}{c} \quad すなわち \quad c = 1$$

のときで，このとき S は最小となる．よって $\boldsymbol{c = 1}$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

が利用できる[3]．■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{2}$ (1) $2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8\equiv 1 \pmod 7$ であるから

$$2^n \text{ を 7 で割った余りは } \begin{cases} \boldsymbol{n\equiv 0 \pmod 3} \text{ のとき} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{n\equiv 1 \pmod 3} \text{ のとき} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{n\equiv 2 \pmod 3} \text{ のとき} & \mathbf{4} \end{cases}$$

(2) $$m = 101101101101101101_{(2)}$$

これに (1) の結果を用いると，法 7 に関して

$$m=\sum_{k=0}^{5}(2^2+1)2^{3k}\equiv\sum_{k=0}^{5}5\cdot 1=30\equiv 2 \pmod 7$$

よって，求める余りは　**2**　■

$\boxed{3}$ (1) $L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より

$$\begin{aligned} L &= |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 \\ &= |\vec{a}-\vec{x}|^2+|\vec{b}-\vec{x}|^2+|\vec{c}-\vec{x}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2 \\ &= 3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とし，$\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}$$

これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} L &= 3|\vec{x}|^2-6\vec{g}\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \\ &= 3(|\vec{x}|^2-2\vec{g}\cdot\vec{x}+|\vec{g}|^2)+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-3|\vec{g}|^2 \\ &= 3|\vec{x}-\vec{g}|^2+\frac{1}{3}\{3|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2-|3\vec{g}|^2\} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & 3|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+3|\vec{c}|^2-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2) \end{aligned}$$

したがって　$$L=|\vec{x}-\vec{g}|^2+\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$$

よって，$\vec{x}=\vec{g}$，すなわち，P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるとき，
L は最小値 $\frac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$ をとる．　■

4 a，b，c がそれぞれ不良品である事象をそれぞれ A，B，C とすると

$$P(A)=p,\ P_{\overline{A}}(B)=q,\ P_A(B)=3q,\ P_{\overline{B}}(C)=r,\ P_B(C)=5r$$

(1) $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{1-P(A)}$，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ より

$$P(\overline{A}\cap B)=\{1-P(A)\}P_{\overline{A}}(B)=(1-p)q$$
$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=p\cdot 3q=3pq$$

ゆえに　$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$
$=3pq+(1-p)q=(1+2p)q$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=p+(1+2p)q-3pq=\boldsymbol{p+q-pq}\end{aligned}$$

(2) $P_{\overline{B}}(C)=\dfrac{P(\overline{B}\cap C)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(\overline{B}\cap C)}{1-P(B)}$，$P_B(C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}$ より

$$P(\overline{B}\cap C)=\{1-P(B)\}P_{\overline{B}}(C)=\{1-(1+2p)q\}r$$
$$P(B\cap C)=P(B)P_B(C)=(1+2p)q\cdot 5r=5(1+2p)qr$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(C)&=P(\overline{B}\cap C)+P(B\cap C)\\&=\{1-(1+2p)q\}r+5(1+2p)qr\\&=\{1+4(1+2p)q\}r=\boldsymbol{(1+4q+8pq)r}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，求める確率は

$$P_C(B)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{5(1+2p)qr}{(1+4q+8pq)r}=\boldsymbol{\frac{5(1+2p)q}{1+4q+8pq}}$$

■

1.5 2019年(文系)

1 表に3，裏に8が書かれた硬貨がある。この硬貨を10回投げるとき，出た数字10個の積が8桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$とする。

2 kを実数とする。3次関数$y = x^3 - kx^2 + kx + 1$が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が$4|k|^3$になるとする。このとき，kの値を求めよ。

3 座標空間内の3点A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6)を通る平面をαとし，平面α上にない点P$(6,\ p,\ q)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点Pから平面αに下ろした垂線とαとの交点をHとする。線分PHの長さをp，qを用いて表せ。

(2) 点Pが$(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$を満たしながら動くとき，四面体ABCPの体積の最大値と最小値を求めよ。

4 0でない2つの整式$f(x)$，$g(x)$が以下の恒等式を満たすとする。

$$\begin{aligned} f(x^2) &= (x^2+2)g(x) + 7 \\ g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の次数と$g(x)$の次数はともに2以下であることを示せ。

(2) $f(x)$と$g(x)$を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ 硬貨を 10 回投げて，裏が出た回数を n とすると，出た数字 10 個の積は

$$8^n{\cdot}3^{10-n}$$

これが 8 桁の数であるから　$10^7 \leqq 8^n{\cdot}3^{10-n} < 10^8$

辺々の常用対数をとると　$7 \leqq n\log_{10}8 + (10-n)\log_{10}3 < 8$

$\log_{10}8 = 3\log_{10}2 = 3\times0.3010 = 0.9030$，$\log_{10}3 = 0.4771$ より

$$7 \leqq 0.9030n + 0.4771(10-n) < 8$$

整理すると　$22290 \leqq 4259n < 32290$　ゆえに　$5+\dfrac{995}{4259} \leqq n < 7+\dfrac{2477}{4259}$

n は整数 $(0 \leqq n \leqq 10)$ であるから　$n = 6,\ 7$

よって，求める確率は

$$_{10}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (210+120)\times\frac{1}{1024} = \boldsymbol{\frac{165}{512}}$$

■

$\boxed{2}$ $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから，$f'(x) = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3} - \frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{k(k-3)} \quad \cdots ①$$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$$

極大値，極小値は，それぞれ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

条件により，$f(\alpha) - f(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = 4|k|^3 \quad \text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \cdots ②$$

①，② より　$2|k| = \dfrac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}$　ゆえに　$k(8k+3) = 0$

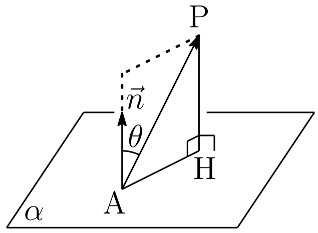
$k(k-3) > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{k = -\dfrac{3}{8}}$ ■

3 (1) A(1, 2, 3)，B(3, 2, 3)，C(4, 5, 6)，P(6, p, q) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 0,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(5,\ p-2,\ q-3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトル，すなわち，α の法線ベクトルの1つを

$$\vec{n}=(0,\ 1,\ -1)$$



とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\cos\theta|,\quad \cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\vec{n}|}$$

よって　$\mathrm{PH}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|0\cdot5+1\cdot(p-2)-1\cdot(q-3)|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\boldsymbol{\dfrac{|p-q+1|}{\sqrt{2}}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の張る平行四辺形の面積を S とすると

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\sqrt{2^2(3\sqrt{3})^2-6^2}=6\sqrt{2}$$

四面体 ABCP の体積を V とすると [4]

$$V=\frac{1}{6}S\cdot\mathrm{PH}=\frac{1}{6}\cdot6\sqrt{2}\cdot\frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}}=|p-q+1|$$

$(p-9)^2+(q-7)^2=1$ より，$p-9=\cos\theta$，$q-7=\sin\theta$ とおくと

$$p=\cos\theta+9,\quad q=\sin\theta+7$$

したがって　$V=|p-q+1|=|(\cos\theta+9)-(\sin\theta+7)+1|$
$\qquad=|3-(\sin\theta-\cos\theta)|=3-\sqrt{2}\sin(\theta-45^\circ)$

ゆえに　$3-\sqrt{2}\leqq V\leqq 3+\sqrt{2}$

よって　最大値 $\boldsymbol{3+\sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{3-\sqrt{2}}$　■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Hdai/Hdai_bun_2016.pdf [3] の解説を参照．

$\boxed{4}$ (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7 \\ g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2 + n & \cdots ① \\ 3n = \max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n = 4+m$　ゆえに　$m = 3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m = n = 2$

(ii) $4+m < 2+n$ のとき，② より　$3n = 2+n$　ゆえに　$n = 1$
これを ① に代入すると，$m = \dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x) + 7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x) = g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4 f(-x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x) = f(x)$
また，$(*)$ に $x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0) + 7,\quad g(0) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2 + 3$，$g(x) = px^2 - 2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4 + 3 = (x^2+2)(px^2-2) + 7 \\ px^6 - 2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(px^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると
$$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p,\quad p - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = p = 1$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 3,\ \ g(x) = x^2 - 2}$　■

1.6　2020年(文系)

1　$a \geqq 0$ とする。2つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。

2　座標空間内の4点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ p)$，C$(q,\ r,\ s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし，$p > 0$，$s > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) p，q，r，s の値を求めよ。

(2) z 軸に垂直な平面で正四面体OABCを切ったときの断面積の最大値を求めよ。

3　a，b，c を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b を c を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を7で割ると4余り，$f(-1)$ を11で割ると2余るとする。c の絶対値が40以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

4　4個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が25の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が4の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が100の倍数になる確率を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^2$，$g(x) = 3(x-a)^2 + a^3 - 40$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - \{3(x-a)^2 + a^3 - 40\} \\ &= -(2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

2 次方程式

$$2x^2 - 6ax + a^3 + 3a^2 - 40 = 0 \quad \cdots (**)$$

の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-3a)^2 - 2(a^3 + 3a^2 - 40) \\ &= -2a^3 + 3a^2 + 80 = (4-a)(2a^2 + 5a + 20) \\ &= (4-a)\left\{2\left(a + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{135}{8}\right\} \end{aligned}$$

方程式 $(**)$ が異なる 2 つの実数解をもつから，$D > 0$ より

$a \geqq 0$ に注意して，$4 - a > 0$ を解くと　$\boldsymbol{0 \leqq a < 4}$

(2) 2 次方程式 $(**)$ の解を α，β とおくと $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \frac{3a + \sqrt{D/4}}{2} - \frac{3a - \sqrt{D/4}}{2} = \sqrt{D/4}$$

$$f(x) - g(x) = -2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$f(x) - g(x) \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx = -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\{D/4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$h(a) = D/4$ とおくと　$S = \dfrac{1}{3}\{h(a)\}^{\frac{3}{2}}$

$h(a) = -2a^3 + 3a^2 + 80$ より　$h'(a) = -6a^2 + 6a = -6a(a-1)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$		$\nearrow$	81	$\searrow$	

よって，求める S の最大値は　$\dfrac{1}{3}\{h(1)\}^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\cdot 81^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{243}$ ■

2 (1) 4点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ p)$，$\mathrm{C}(q,\ r,\ s)$ について，
$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OA}$ であるから

$$\sqrt{1^2+p^2}=\sqrt{2}\quad \text{条件}\ p>0\ \text{により}\quad p=1$$

$\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=2$ であるから

$$(*)\begin{cases} q^2+r^2+s^2=2 \\ (q-1)^2+(r-1)^2+s^2=2 \\ (q-1)^2+r^2+(s-1)^2=2 \end{cases}$$

$(*)$ の第2式，第3式をそれぞれ整理すると

$$(q^2+r^2+s^2-2)-2(q+r-1)=0,$$
$$(q^2+r^2+s^2-2)-2(q+s-1)=0$$

$(*)$ の第1式を上の2式に代入することにより

$$\begin{cases} q+r-1=0 \\ q+s-1=0 \end{cases}\quad \text{ゆえに}\quad (**)\begin{cases} q=1-s \\ r=s \end{cases}$$

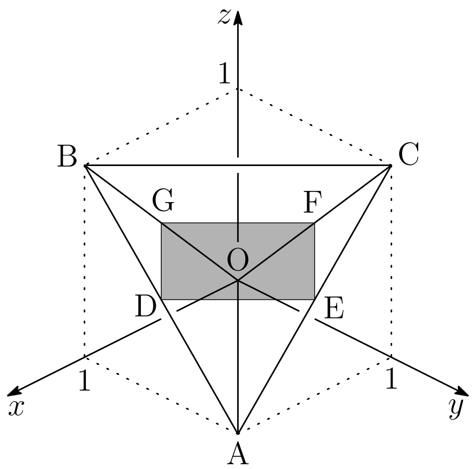
$(**)$ を $(*)$ の第1式に代入すると

$$(1-s)^2+s^2+s^2=2\quad \text{ゆえに}\quad (s-1)(3s+1)=0$$

$s>0$ に注意して　$s=1$　$(**)$ より　$q=0,\ r=1$

よって　$\boldsymbol{p=1,\ q=0,\ r=1,\ s=1}$

(2) 2点O，Aの z 座標が0で，2点B，Cの z 座標が1であるから，四面体OABCの平面 $z=t$ による断面は，線分AB，AC，OC，OBを $t:1-t$ に内分する点を頂点とする四角形である．これらの頂点を順にD，E，F，Gとおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{GF}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 0)$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，この断面積を S とすると

$$S=t(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2t(1-t)=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，断面積は，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる． ■

3 (1) $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x)=0$ の解であるから，$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+ax^2+bx+c \\ &= (x^2-x+1)(x+a+1) \\ &\qquad\qquad + (a+b)x-a+c-1 \end{aligned}$$

したがって　$a+b=0,\quad -a+c-1=0$

よって　$\boldsymbol{a=c-1,\ \ b=1-c}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+(c-1)x^2+(1-c)x+c$

ゆえに　$f(1)=c+1$，$f(-1)=3c-3$

$f(1)$ を 7 で割ると 4 余るから

$$c+1\equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad c\equiv 3 \pmod 7$$

したがって，整数 k を用いて　$c=7k+3\cdots$①

$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るから

$$3c-3\equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad 4{\cdot}3c=4{\cdot}5 \quad \text{すなわち} \quad c\equiv 9 \pmod{11}$$

① を上式に代入すると

$$7k+3\equiv 9 \quad \text{ゆえに} \quad 3{\cdot}7k\equiv 3{\cdot}6 \quad \text{すなわち} \quad k\equiv 4 \pmod{11}$$

したがって，整数 ℓ を用いて　$k=11\ell+4$

これを ① に代入すると　$c=7(11\ell+4)+3=77\ell+31$

c の絶対値が 40 以下であるから

$$c=31 \quad \text{ゆえに} \quad a=30,\ \ b=-30 \qquad \cdots(*)$$

(1) の結果から

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+a+1)$$

$(*)$ をこれに代入して

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+31)$$

$f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \ -31}$　■

4 (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(p_0+p_1) = 1-\left(\frac{626}{1296}+\frac{500}{1296}\right) = \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-(q_0+q_1) = 1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right) = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A}=2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B}=1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は　$\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \dfrac{\mathbf{41}}{\mathbf{648}}$　■

理系 出題分野 (2011-2020) 150 分

◀	九州大学 理系	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数		3								
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明									2	
	複素数と方程式										2
	図形と方程式				3						
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法					1					
III	式と曲線				3				1		
	複素数平面						5	5	5	3·5	
	関数										
	極限		3·4	1			1			1·4	
	微分法とその応用	2			1			1			1
	積分法					2					
	積分法の応用	1	1	1·4	1	3	1	1	2		5
A	場合の数と確率	5	5	3	4*	4	3	4	3	3	4
	整数の性質				2	5	4	3	4		2
	図形の性質						2				
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル	4		2				2			3
	数列	3	5					3			
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2	5							

数字は問題番号 ($*$ は旧課程の内容を含む)

1.7　2015年(理系)

1　C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$$
$$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる2つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が(1)の条件を満たすとする。このとき，ℓ と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

2　以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ。

(3) n を3以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

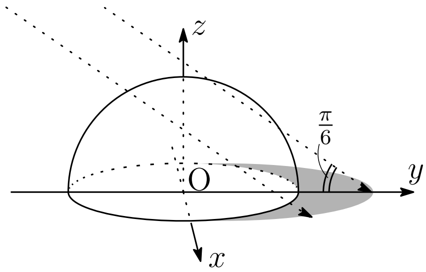
が成り立つことを示せ。

3 座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当っている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当らない部分の y 座標を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当らない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当らない部分の体積を求めよ。



4 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4) 8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，$2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。

(3) p，q を異なる素数とする。$2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=-x^2+2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2+2x=a(x+4)\quad すなわち\quad x^2+(a-2)x+4a=0\quad \cdots(*)$$

C_1 と ℓ が接するとき，$(*)$ より

$$(a-2)^2-4{\cdot}1{\cdot}4a=0,\quad 0<-\frac{a-2}{2{\cdot}1}<2$$

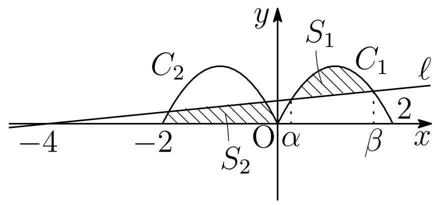
上の第 1 式および第 2 式から

$$a=10\pm4\sqrt{6},\quad -2<a<2\quad すなわち\quad a=10-4\sqrt{6}$$

よって，求める a の値の範囲は　　$\boldsymbol{0\leqq a<10-4\sqrt{6}}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha+\beta=-(a-2),\quad \alpha\beta=4a,$$
$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{a^2-20a+4}$$



したがって

$$\begin{aligned}S_1&=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x)-a(x+4)\}\,dx\\&=-\int_\alpha^\beta\{x^2+(a-2)x+4a\}\,dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) $y=-x^2-2x$ と $y=a(x+4)$ から y を消去すると

$$-x^2-2x=a(x+4)\quad すなわち\quad x^2+(a+2)x+4a=0\quad \cdots(**)$$

方程式 $(**)$ の解を γ，δ とすると $(\gamma<\delta)$

$$\gamma+\delta=-(a+2),\quad \gamma\delta=4a,$$
$$\delta-\gamma=\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}=\sqrt{a^2-12a+4}$$

したがって

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-2}^0\{-x^2-2x\}\,dx+\int_\gamma^\delta\{-x^2-2x-a(x+4)\}\,dx\\&=-\int_{-2}^0x(x+2)\,dx-\int_\gamma^\delta(x-\gamma)(x-\delta)\,dx\\&=\frac{1}{6}{\cdot}2^3-\frac{1}{6}(\delta-\gamma)^3=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ より　$\dfrac{1}{6}(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}(a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}}$

整理すると　$(a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$

ここで，$f(a) = (a^2-20a+4)^{\frac{3}{2}} + (a^2-12a+4)^{\frac{3}{2}} - 8$ とおくと

$$f(0) = 8 > 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{41\sqrt{41}-999}{125} < \frac{41\cdot 7 - 999}{125} < 0,$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 2(5-2\sqrt{6}) = \frac{2}{5+2\sqrt{6}} > \frac{2}{5+5} = \frac{1}{5}$$

$f(a)$ は連続であるから，中間値の定理により，$f(a)=0$，すなわち $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する．■

2 (1) $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ を微分すると　$y' = -\dfrac{\log x + 2x}{x^2(\log x)^3}$

したがって，$x > 1$ において　$y' < 0$

よって，$y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において，単調減少．

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}\,dx = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\log x}} + \boldsymbol{C}$　**(*C* は積分定数)**

別解 $t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3) (1)，(2) の結果から，n が 3 以上の整数であるとき

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} = \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\log k)^2}\,dx$$

$$< \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$$

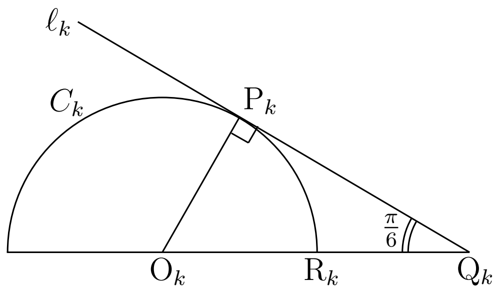
$$= \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2}$$

■

3 (1) 球 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z \geqq 0$ の部分の平面 $x=k$ $(-1<k<1)$ による断面の表す図形は，中心 $\mathrm{O}_k(k,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-k^2}$ の半円

$$y^2+z^2=1-k^2 \ (-1<k<1), \quad z \geqq 0$$

この半円を C_k とし，C_k 上の点を $\mathrm{R}_k(k, \sqrt{1-k^2})$ とする．方向ベクトルが $(0,\ \sqrt{3}, -1)$ で C_k に接する直線を ℓ_k とし，ℓ_k と C_k の接点を P_k，ℓ_k と xy 平面との共有点を Q_k とすると



$$\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=\sqrt{1-k^2}$$
$$\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k=2\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k=2\sqrt{1-k^2}$$

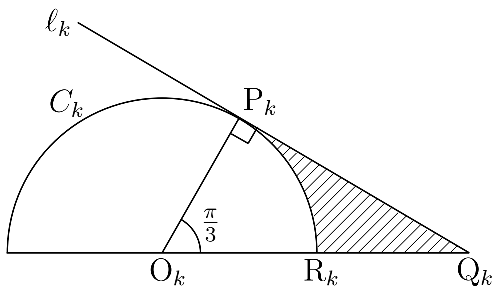
よって　$\boldsymbol{\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}}$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k=\mathrm{O}_k\mathrm{Q}_k-\mathrm{O}_k\mathrm{R}_k=\sqrt{1-k^2}$

よって　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

(3) 右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{O}_k\mathrm{P}_k\cdot\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k-\frac{1}{2}\mathrm{O}_k{\mathrm{R}_k}^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2)-\frac{\pi}{6}(1-k^2)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}(1-k^2)$$



よって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}$$

■

4 (1) 求める確率は，2 回連続して赤玉を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(2) 1 回の操作で青玉の個数は 1 個だけ増減する．最初に青玉が 1 個 (奇数個) であるから，奇数回目の操作で青玉は偶数個となる．したがって，奇数回目の操作で青玉が 3 個 (奇数個) にならない．よって，奇数回目の操作で硬貨をもらうことはない．

(3) 偶数回目の操作で青玉の個数は 1 個または 3 個であるから，2 回目の操作で青玉が 1 個である確率を p とすると，(1) の結果から

$$p=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$ppp(1-p)=p^3(1-p)=\left(\frac{7}{9}\right)^3\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{686}{6561}}$$

(4) 青玉 3 個の状態から，2 回連続して青玉を取り出す確率を q とすると

$$q=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

2 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$(1-p)qpp=p^2(1-p)q$$

4 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$p(1-p)qp=p^2(1-p)q$$

6 回目の操作のときに限り，硬貨を 1 枚もらう確率は

$$pp(1-p)q=p^2(1-p)q$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}3\times p^2(1-p)q+p^3(1-p)&=2p^2(1-p)+p^3(1-p)\\&=p^2(1-p)(2+p)\\&=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{9}=\mathbf{\frac{2450}{6561}}\end{aligned}$$

研究

操作を n 回繰り返す中で袋の中の玉が 3 個とも青玉になることなしに，青玉の個数が 1 個である確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき

(2) で示したように奇数回目に青玉が 1 個になることはないから　$p_n = 0$

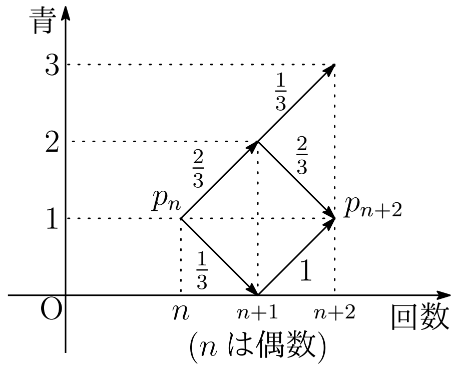
(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = \frac{7}{9}p_n$$

ゆえに　$p_n = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

n 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率は

$$p_{n-2} \times \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



東大理科 2008 年

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

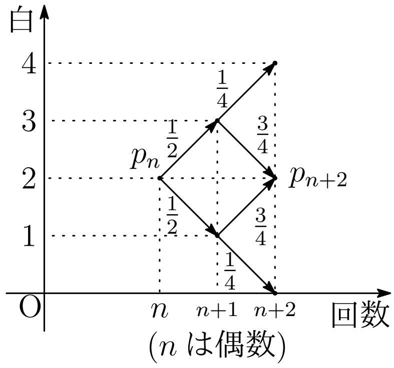
(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

解答　(1) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 4 枚とも同じ色になることなしに，白と黒のカードが 2 枚づつである確率を p_n とする．

(i) n が奇数のとき
奇数回目に 4 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

(ii) n が偶数のとき　$p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}p_n$$



ゆえに　$p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

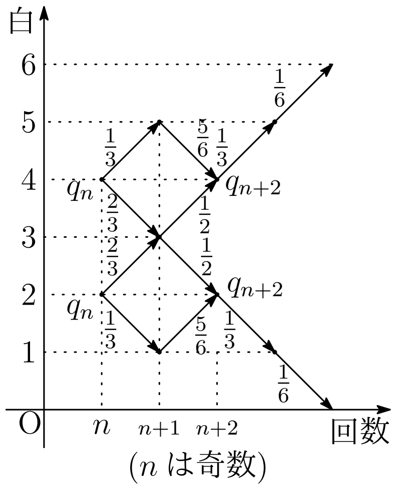
求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

(2) 操作 (A) を n 回繰り返す中で 6 枚とも同じ色になることなしに，白のカードが 2 枚である確率を q_n とすると，対称性により白のカードが 4 枚である確率も q_n である．

(i) n が奇数のとき　$q_1 = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_n \times \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + q_n\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{18}q_n \end{aligned}$$



ゆえに　$q_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

求める確率は，3 以上の奇数のとき

$$q_{n-2} \times \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$$

(ii) n が 1 または偶数のとき
6 枚とも同じ色になることはないので，求める確率は　**0**

■

$\boxed{5}$ (1) n が正の偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$ は自然数であるから

$$2^n - 1 \equiv 4^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 1^{\frac{n}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$2^n - 1$ は 3 の倍数である．

(2) n が自然数のとき，$2^n - 1$ は奇数である．

i) $n = 1$ のとき，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

ii) $n \geqq 2$ のとき

$$2^n + 1 = 1(2^n - 1) + 2$$

上式より，$2^n + 1$ を $2^n - 1$ で割った余りは 2．
$2^n - 1$ を 2 で割った余りは 1 であるから，ユークリッドの互除法により，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ の最大公約数は 1 である．

よって，$2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素である．

(3) $2^{p-1} - 1 = pq^2$ （p，q は異なる素数）　$\cdots(*)$

$(*)$ について，$p = 2$ のとき　　$1 = 2q^2$

これを満たす素数 q は存在しない．

$p \neq 2$ となり，p は奇素数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である．

(1) の結果から，$2^{p-1} - 1$ は 3 の倍数であるから，pq^2 は 3 を因数にもつ．

i) $p = 3$ のとき，$(*)$ より　　$3 = 3q^2$

q は素数であるから，不適．

ii) $q = 3$ のとき，$(*)$ より

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \text{ゆえに} \quad (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p$$

i) より，奇素数 p は $p \geqq 5$ であること，(2) の結果から，$2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素であることに注意して

$$\text{(A)} \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 9 \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(B)} \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p \\ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 9 \end{cases}$$

(A) を解いて，$p = 7$．　(B) の第 2 式を満たす奇素数 p は存在しない．

よって　　$\boldsymbol{(p,\ q) = (7,\ 3)}$　■

1.8　2016 年 (理系)

1 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \quad (x > 0)$$
$$C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし，a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P，Q で交わり，P，Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。

2 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D，E，F とする。また，AE と BF，BF と CD，CD と AE の交点をそれぞれ P，Q，R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE，BF，CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP} = k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR} = \ell\mathrm{CD}$ を満たす実数 k，ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

3 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $\mathrm{P}_0(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則)　(i) 1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば，コインが P_4 にあるとき 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば，コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(2) 3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置ある確率を求めよ。

4 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進数で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進数で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。

5 以下の問いに答えよ。

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

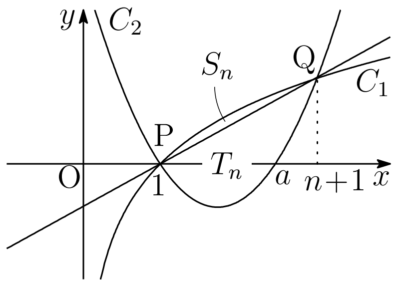
解答例

$\boxed{1}$ (1) C_1 と C_2 の交点 Q の x 座標が $n+1$ であるから

$$\log(n+1) = (n+1-1)(n+1-a)$$

$n \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{a = n+1-\frac{\log(n+1)}{n}}$$



上式より　$a-1=\dfrac{n^2-\log(n+1)}{n}$

ここで　$\displaystyle\int_0^n \frac{t}{t+1}\,dt = \Big[\, t-\log(t+1) \,\Big]_0^n = n-\log(n+1) > 0$

上の2式から　$a-1=\dfrac{n^2-\log(n+1)}{n} > \dfrac{n^2-n}{n} = n-1 \geqq 0$

よって　$\boldsymbol{a>1}$

(2) $\displaystyle S_n = \int_1^{n+1} \log x\,dx - \frac{1}{2}\{(n+1)-1\}\log(n+1)$

$$= \Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^{n+1} - \frac{n}{2}\log(n+1) = \boldsymbol{\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n}$$

C_2 の x^2 の係数および2点 P，Q の x 座標に注意して

$$T_n = \frac{1}{6}\{(n+1)-1\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n^3}$$

(3) (2) の結果から

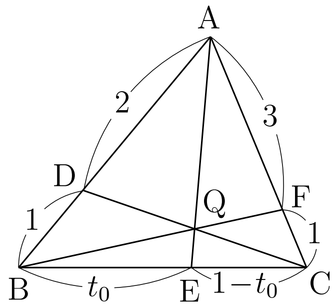
$$\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n}{n\log\frac{n^3}{6}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\log(n+1)-1}{3\log n-\log 6}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\left\{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}-1}{3\log n-\log 6}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\left\{1+\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\}-\dfrac{1}{\log n}}{3-\dfrac{\log 6}{\log n}}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)(1+0)-0}{3-0} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$ ■

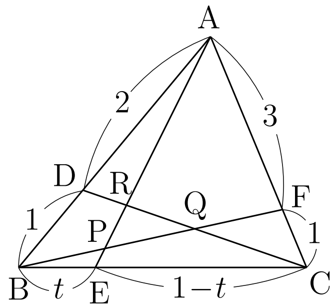
2 (1) チェバの定理により



$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{t_0=\frac{3}{5}}$

(2) $\triangle$AEC および直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{t}$

よって　$k=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{3+t}}$

$\triangle$BCD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{2}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{3(1-t)}{2t}$

よって　$\ell=\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{3(1-t)}{3(1-t)+2t}=\boldsymbol{\dfrac{3(1-t)}{3-t}}$

(3) (2) の図について，$\triangle$BCF および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{t}{1-t}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3(1-t)}{4t}$　$\cdots$①

$t=\dfrac{3}{5}$ のとき，P は Q に一致するので　$\dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

よって　$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot1=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(4) $t=\dfrac{3}{5}$ のとき，R は Q に一致するので，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CD}}=\frac{3\left(1-\frac{3}{5}\right)}{3-\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\mathrm{CQ}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3(1-t)}{3-t}-\dfrac{1}{2}=3-t:3-5t$

また，①，② から

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\frac{2}{3}:\frac{3(1-\mathrm{t})}{3(1-\mathrm{t})+4\mathrm{t}}-\frac{1}{3}=3+\mathrm{t}:3-5\mathrm{t}$$

$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{CQ}:\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BCQ}:\triangle\mathrm{PQR}=(3+t)(3-t):(3-5t)^2$$

(3) の結果から　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{(3-5t)^2}{(3+t)(3-t)}=\boldsymbol{\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}}$

解説 $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{3+t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=3(1-t):2t$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3(1-t)+2t}=\frac{1}{3-t}\{2(1-t)\vec{b}+2t\vec{c}\}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3-5t}{6(3+t)}(4\vec{b}-3\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{3-5t}{6(3-t)}(2\vec{b}-3\vec{c})$

これらを空間ベクトルと考え，外積の性質を用いると[5]

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}\vec{b}\times\vec{c}$$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}:\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}:1$

外積は高校数学の範囲外であるから，2次試験では使えないが，センター試験では，非常に有効な計算法である．なお，外積 (ベクトル積) の演算について，次式が成り立つことに注意したい．

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}$$

また，これに $\vec{c}=\vec{b}$ を代入すると　$\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$ ■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) n 回サイコロ投げた後に，コインが P_i $(i=0,1,\cdots,5)$ の位置にある確率を $P_i(n)$ とすると

$$\begin{aligned}P_0(n+1) &= \frac{1}{6}P_0(n)+\frac{1}{6}P_1(n)+\frac{1}{6}P_2(n)+\frac{1}{6}P_3(n)+\frac{1}{6}P_4(n)+\frac{1}{6}P_5(n)\\ &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\end{aligned}$$

自然数 n に対して　$P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)=1$

したがって　$P_0(n)=\dfrac{1}{6}\times 1=\dfrac{1}{6}$　$\cdots(*)$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(3) $(*)$ より，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

解説 $P_i(n+1)$ は $P_j(n)$ によって決定する確率過程 (マルコフ連鎖) である．

$$\begin{aligned}P_0(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\\ P_1(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+2P_5(n)\}\\ P_2(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_3(n)+2P_4(n)+P_5(n)\}\\ P_3(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)+P_5(n)\}\\ P_4(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+P_1(n)+2P_2(n)+P_3(n)+P_5(n)\}\\ P_5(n+1) &= \frac{1}{6}\{P_0(n)+2P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)\}\end{aligned}$$

したがって　$P_0(n)=P_3(n)=\dfrac{1}{6}$,

$$P_1(n+1)-P_5(n+1)=-\frac{1}{3}\{P_1(n)-P_5(n)\},$$

$$P_2(n+1)-P_4(n+1)=-\frac{1}{3}\{P_2(n)-P_4(n)\}$$

$P_1(1)=P_2(1)=P_4(1)=P_5(1)=\dfrac{1}{6}$ より　$P_1(n)=P_5(n)$，$P_2(n)=P_4(n)$

これらの結果から　$P_1(n+1)=P_2(n+1)=\dfrac{1}{3}\left\{P_1(n)+P_2(n)+\dfrac{1}{6}\right\}$

ゆえに　$P_1(n+1)=\dfrac{2}{3}P_1(n)+\dfrac{1}{18}$

$P_1(1)=\dfrac{1}{6}$ であるから　$P_1(n)=\dfrac{1}{6}$　よって　$P_i(n)=\dfrac{1}{6}$ $(i=0,1,\cdots 5)$

■

$\boxed{4}$ (1) 仮定から　　$10^n \equiv a_n, \quad 10^{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{13}$

第1式から　　$10^{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

したがって　　$a_{n+1} \equiv 10a_n \pmod{13}$

(2) $10^1 = 10$ より　$\boldsymbol{a_1 = 10}$

(1) の結果を用いると，法13について

$$\begin{aligned} a_2 &\equiv 10a_1 \equiv 100 \equiv 9 \\ a_3 &\equiv 10a_2 \equiv 90 \equiv 12 \\ a_4 &\equiv 10a_3 \equiv 120 \equiv 3 \\ a_5 &\equiv 10a_4 \equiv 30 \equiv 4 \\ a_6 &\equiv 10a_5 \equiv 40 \equiv 1 \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_2 = 9,\ a_3 = 12,\ a_4 = 3,\ a_5 = 4,\ a_6 = 1}$

(3) 整数 p，q を $1 \leqq p \leqq 9$，$0 \leqq q \leqq 9$ とし，求める自然数 N を

$$N = p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q$$

とおくと，法13に関して

$$\begin{aligned} N &\equiv p\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 10^2 + 6\cdot 10 + q \\ &\equiv p\cdot 4 + 2\cdot 3 + 9 + 6\cdot 10 + q = 4p + q + 75 \\ &\equiv 4p + q - 3 \end{aligned}$$

このとき，$N \equiv 0 \pmod{13}$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0),\ (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1),\ (9,\ 6)$$

よって，求める自然数 N は

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

■

5 (1) ド・モアブルの定理により

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,\quad \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \quad ゆえに \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

$(*)$ の辺々を引くと

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \quad ゆえに \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\\
\cos 2x &= \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1\\
\cos 3x &= \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$t = z + \frac{1}{z}$ とおくと

$$\cos x = \frac{1}{2}t,\quad \cos 2x = \frac{1}{2}t^2 - 1,\quad \cos 3x = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

これらを $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ に代入すると

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 1$$

整理すると　$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$　ゆえに　$(t-1)(t+2)(t-2) = 0$

これを解いて　$t = 1, -2,\ 2$　したがって　$\cos x = \frac{1}{2},\ -1,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\boldsymbol{x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi}$

(3) (1) の結果から

$$\sin^2 n\theta = \left\{-\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)$$

$\theta = 20^\circ$ とすると，$z^{18} = 1$ であるから

$$(z^2 - 1)(z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1) = 0$$

$z^2 \neq 1$ であるから　$z^{16} + z^{14} + \cdots + z^2 + 1 = 0$

また，$z \neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) = -1$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\sin^2 n\theta &= \sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right)\right\} \\ &= 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

別解 $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$ および $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により

$$\begin{aligned}&\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ \\ =&\frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}\end{aligned}$$

方程式 $\cos 3\theta + \dfrac{1}{2} = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の解は　$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$

ここで，$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから，方程式

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0 \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

の解と係数の関係により　$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$

よって　$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \dfrac{9}{4}$

補足 また，解と係数の関係により　$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\dfrac{1}{8}$

参考 $\theta = \dfrac{\pi}{n}$，$\alpha = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ とおくと

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k)$$

また　$z^n - 1 = (z-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　ゆえに　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\alpha^k) = \sum_{k=1}^{n} z^{n-k}$　$\cdots(*)$

$(*)$ は，z に関する恒等式であるから，$z=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos 2k\theta - i\sin 2k\theta) = \prod_{k=1}^{n-1}(2\sin^2 k\theta - 2i\sin k\theta\cos k\theta) \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1}(\sin k\theta - i\cos k\theta) \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \prod_{k=1}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\theta\right)\right\} \\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta \times (\cos 0 - i\sin 0) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin k\theta
\end{aligned}$$

$(\text{右辺}) = n$

よって　$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

たとえば，$n=9$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9} = \frac{9}{256}$

したがって　$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}$　$\cdots$①

同様に，$n=18$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=1}^{17}\sin\frac{k\pi}{18} = \frac{9}{2^{16}}$

したがって　$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \cdots \sin 80^\circ = \dfrac{3}{256}$　$\cdots$②

さらに，①，② から　$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \dfrac{1}{16}$　■

1.9　2017 年 (理系)

$\boxed{1}$ 定数 $a>0$ に対し，曲線 $y=a\tan x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y=\sin 2x$ の $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2) a が (1) の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 2 つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の 4 点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を a，b を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a，b を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 初項 $a_1=1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

4 赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A，B，C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール (a)，(b)，(c) に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。

(a) 赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

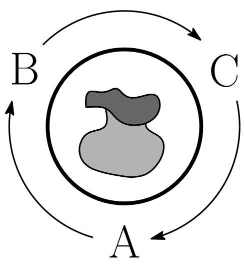
(c) 白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A，B，C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

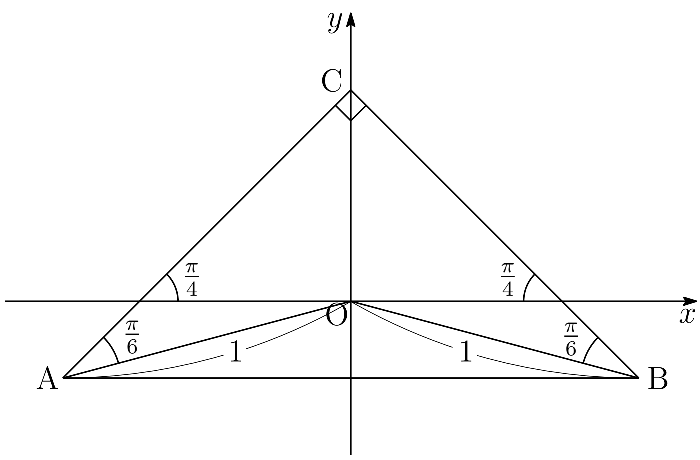


5 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 下図のように，複素数平面上の △ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を一つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお A，B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A，B の距離はともに 1 である。点 P_n が △ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



解答例

1 (1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = a\tan x$ と $y = \sin 2x$ から y を消去すると

$$a\tan x = \sin 2x \quad ゆえに \quad a = \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2\cos^2 x \quad \cdots ①$$

このとき，$0 < 2\cos^2 x < 2$ より $\quad \boldsymbol{0 < a < 2}$

(2) $f(x) = a\tan x$，$g(x) = \sin 2x$ とおいて，これらを微分すると

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 x}, \quad g'(x) = 2\cos 2x$$

交点 P の x 座標が p であるから，① より $\quad a = 2\cos^2 p \quad \cdots ②$

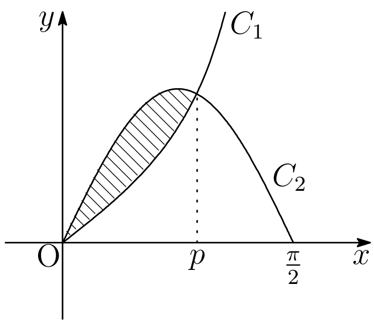
$f'(p)g'(p) = -1$ であるから $\quad \dfrac{a}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1$

② を上式に代入すると

$$\frac{2\cos^2 p}{\cos^2 p} \times 2\cos 2p = -1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{\cos 2p = -\frac{1}{4}}$$

したがって $\quad a = 2\cos^2 p = \cos 2p + 1 = -\dfrac{1}{4} + 1 = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(3) 求める面積は右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left(\sin 2x - \frac{3}{4}\tan x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{4}\log|\cos x| \right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2p + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log|\cos p| \end{aligned}$$

ここで，(2) の結果から $\quad \log|\cos p| = \dfrac{1}{2}\log\cos^2 p = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8}$

よって $\quad S = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{8} = \boldsymbol{\dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\log\dfrac{3}{8}}$ ■

2 (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(a,\ b,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a,\ 0, -1), \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (a,\ b,\ 0)$$

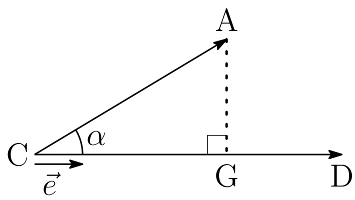
したがって $$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$$

ゆえに $$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CG}} = (0,\ 0,\ 1) + \frac{a^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0)$$
$$= \left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

よって $$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1}\right)$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を α とし，単位ベクトル $\vec{e}$ を

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} \quad \cdots ①$$



とすると，A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}} = (|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha)\vec{e} \quad \cdots ②$$

また，$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$ であるから $\quad |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}$

これと ① を ② に代入すると $$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$$

(2) B$(0,\ b,\ 0)$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0,\ b, -1)$ であるから，(1) と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$
$$= (0,\ 0,\ 1) + \frac{b^2}{a^2+b^2}(a,\ b,\ 0) = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

上式および (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right) - (a,\ 0,\ 0)$$
$$= \left(-\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right) - (0,\ b,\ 0)$$
$$= \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ -\frac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$$

$\vec{u} = (a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\vec{v} = (a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ とおくと

$$\vec{u} = (-ab^2,\ a^2b,\ a^2+b^2),\quad \vec{v} = (ab^2, -a^2b,\ a^2+b^2)$$

したがって
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -a^2b^4 - a^4b^2 + (a^2+b^2)^2$$
$$= (a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2),$$
$$|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 = a^2b^4 + a^4b^2 + (a^2+b^2)^2$$
$$= (a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)$$

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-a^2b^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2b^2)} = \boldsymbol{\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}}$$

■

3 (1) 初項 $a_1 = 1$，公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3 \cdots ①$$

a_n が 7 の倍数であるとき，$4n - 3 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8n \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv -1 \pmod 7$$

このとき，n は整数 m を用いて

$$n = 7m - 1 \quad \cdots ②$$

したがって，$1 \leqq 7m - 1 \leqq 600$ を満たす整数 m の個数は

$$\frac{2}{7} \leqq m \leqq \frac{601}{7} \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq m \leqq 85$$

よって，求める個数は　**85** (個)

(2) ② を ① に代入すると

$$a_n = 4(7m-1) - 3 = 7(4m-1)$$

a_n が 7^2 の倍数であるとき，$4m - 1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8m \equiv 2 \quad \text{ゆえに} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

このとき，m は整数 l を用いて

$$m = 7l + 2$$

これを ② に代入すると

$$n = 7(7l+2) - 1 = 49l + 13 \quad \cdots ③$$

したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) ③を①に代入すると

$$a_n = 4(49l+13) - 3 = 7^2(4l+1)$$

a_n が 7^3 の倍数であるとき，$4l+1 \equiv 0 \pmod 7$ であるから

$$8l \equiv -2 \quad ゆえに \quad l \equiv -2 \pmod 7$$

このとき，l は整数 k を用いて

$$l = 7k - 2$$

これを③に代入すると

$$n = 49(7k-2) + 13 = 343k - 85 \quad \cdots ④$$

$1 \leqq 343k - 85 \leqq 600$ を満たす整数 k は 1 で，このとき　$n = 258$

④を①に代入すると

$$a_n = 4(343k-85) - 3 = 7^3(4k-1)$$

これから，a_n が 7^4 の倍数となることはない．

以上の結果および②，③より，$1 \leqq n \leqq 600$ に対して

a_n が 7 の倍数であるとき　$n \equiv -1 \pmod 7$
a_n が 7^2 の倍数であるとき　$n \equiv 13 \pmod{49}$
a_n が 7^3 の倍数であるとき　$n = 258$

数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち，それ以外の列は 7 を因数にもつ．
ただし，第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ．
したがって，2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ)，2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$

別解 (2) $a_n = 4n - 3$ より，a_n が 7^2 の倍数であるとき

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 12(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 13 \pmod{7^2}$$

n は整数 l を用いて　$n = 49l + 13$
したがって，$1 \leqq 49l + 13 \leqq 600$ を満たす整数 l の個数は

$$-\frac{12}{49} \leqq l \leqq \frac{587}{49} \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq l \leqq 11$$

よって，求める個数は　**12** (個)

(3) $a_n = 4n - 3$ より，a_n が 7^3 の倍数であるとき

$$4n - 3 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad 86(4n-3) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad n \equiv 258 \pmod{7^3}$$

n は整数 m を用いて　$n = 343m + 258$

したがって，$1 \leqq 343m + 258 \leqq 600$ を満たす整数 m は $m = 0$ の 1 個で

$$a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 3 \cdot 7^3$$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち，7^4 で割り切れる項はない．
(1),(2) の結果から，数列 $\{a_n\}$ のうち，7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

これら 38 個の項をそれぞれ 7 で割ると，さらに 7 で割り切れる項が第 2 列に 6 個あり，これらをまた 7 で割ると，最後に残った a_{258} だけが 7 で 1 回割れる．
したがって，これら 38 個の積は 7 で $38 + 6 + 1$，すなわち，45 回割り切れる．
よって，求める n の最小値は　$\boldsymbol{n = 265}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が得られる．

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+c_n),\quad b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+b_n),\quad c_{n+1}=\frac{1}{4}(b_n+c_n)$$

$d_n=a_n+b_n+c_n\ (n=1,2,\cdots)$ とすると

$$d_1=a_1+b_1+c_1=1+0+0=1$$

$(*)$ の辺々を加えることにより

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n\quad \text{ゆえに}\quad d_n=\frac{1}{2^{n-1}}\qquad\cdots①$$

したがって，$(*)$ は

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-b_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}b_n\\
b_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-c_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}c_n\\
c_{n+1}&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-a_n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}a_n
\end{aligned}$$

上の 3 式から，$n\geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}c_{n-1}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}c_{n-1}\\
&=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4}a_{n-2}\right)=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}\qquad\cdots②
\end{aligned}$$

② に $n=3,\ 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned}
a_4&=\frac{3}{2^6}-\frac{1}{64}a_1=\frac{3}{64}-\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{32}\\
a_7&=\frac{3}{2^9}-\frac{1}{64}a_4=\frac{3}{512}-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{32}=\frac{11}{2048}
\end{aligned}$$

よって　A が 4 回目に勝つ確率は　$a_4\times\frac{2}{4}=\frac{1}{32}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{64}}$

A が 7 回目に勝つ確率は　$a_7\times\frac{2}{4}=\frac{11}{2048}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{11}{4096}}$

(2) ① より　$\boldsymbol{d_n=\frac{1}{2^{n-1}}}$

(3) ② より　$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{3}{2^{n+3}}-\frac{1}{64}a_{n-2}}$　■

5 (1)

$$\alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$z_n = \alpha w^n = \dfrac{10000\sqrt{2}}{2^n}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi\right\}$

よって　$\boldsymbol{|z_n| = \dfrac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}},\quad \arg z_n = \left(\dfrac{n}{6}+\dfrac{1}{4}\right)\pi}$

(2) (1) の結果から，$|z_n| \leqq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-\frac{1}{2}} \geqq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\log_{10} 2 \geqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

ここで　$\dfrac{4}{\log_{10} 2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 14}$

(3) (1),(2) の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{13}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{7}{12}\pi + 2\pi$$

$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4{\cdot}5^4}{2^{14}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}{\cdot}\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}{\cdot}\frac{125}{128}\sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$

$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi$$

したがって，P_{14} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外部にあり，P_{15} は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある．

よって，求める最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 15}$　■

1.10　2018 年 (理系)

1 座標空間において，xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geqq 1$ を満たす部分を C とする。また，z 軸上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき，直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし，d は正の定数とする。

2 原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し，線分 PQ を $2 : 1$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく，かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき，線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。

(2) 点 P を $(-3,\ 0)$ に固定する。Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。

(3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を 4 で割った余りが $0,\ 1,\ 2,\ 3$ である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

4 整数 $a,\ b$ は 3 の倍数ではないとし，

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。

(3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

5 α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\overline{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

解答例

1 C 上の点Pを $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,\ 0\right)$ とおく $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 直線APと平面 $x=d$ との交点をQとすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(0,\ 0,\ 1)+k\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta,-1\right)\\&=\left(\frac{k}{\cos\theta},\ k\tan\theta,\ 1-k\right)\quad\cdots①\end{aligned}$$

点Qの x 座標が d であるから

$$\frac{k}{\cos\theta}=d\quad ゆえに\quad k=d\cos\theta$$

これを①に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(d,\ d\sin\theta,\ 1-d\cos\theta)\\&=(d,\ 0,\ 1)+d(0,\ \sin\theta,-\cos\theta)\end{aligned}$$

ここで
$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-\cos\theta=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(d,\ 0,\ 1)+d\left(0,\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

このとき，$-\pi<\theta-\dfrac{\pi}{2}<0$ であるから，求める軌跡は，

平面 $\boldsymbol{x=d}$ 上の点 $\boldsymbol{(d,\ 0,\ 1)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{d}$ の円周上で $\boldsymbol{z<1}$.

別解　軌跡の方程式を，次のように表してもよい.

$$\begin{cases}x=d\\y^2+(z-1)^2=d^2\\z<1\end{cases}$$

双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$ により，

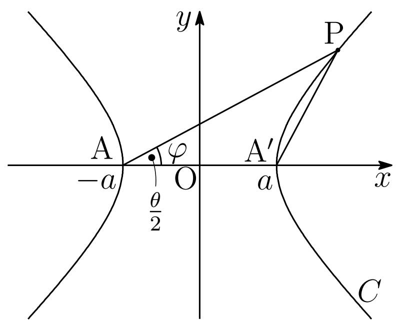
$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

とおくと，双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，次のように媒介変数表示ができる．

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

とくに，$a=b$ のとき，直角双曲線となる．

直角双曲線 $C: x^2-y^2=a^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，2 頂点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(a,0)$ とおく．



直線 AP の傾きを m，直線 A′P の傾きを m' とすると

$$m=\frac{y}{x+a},\quad m'=\frac{y}{x-a}\quad \text{ゆえに}\quad mm'=\frac{y^2}{x^2-a^2}=1$$

P は 2 直線 $\mathrm{AP}: y=m(x+a)$，$\mathrm{A'P}: y=\dfrac{1}{m}(x-a)$ の交点であるから

$$x=\frac{1+m^2}{1-m^2}a,\quad y=\frac{2m}{1-m^2}a$$

ここで，$m=\tan\varphi$ とおくと　$x=\dfrac{a}{\cos 2\varphi}$，$y=a\tan 2\varphi$

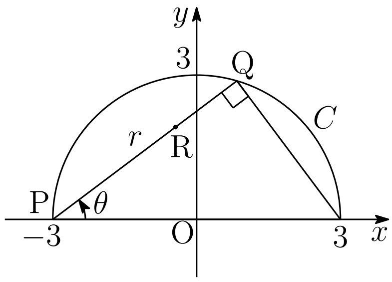
さらに，$\theta=2\varphi$ とおくことにより　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=a\tan\theta$

直角双曲線の漸近線が $y=x$ と $y=-x$ であるから，$0\leqq\theta<2\pi$，すなわち，$0\leqq\varphi<\pi$ において，$\varphi\neq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ である．$\varphi=\frac{\pi}{4}-0$ のとき P は第 1 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{\pi}{4}+0$ のとき P は第 3 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi-0$ のとき P は第 2 象限の無限遠点，$\varphi=\frac{3}{4}\pi+0$ のとき P は第 4 象限の無限遠点にある．■

2 (1) $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{1}{2}\pi\cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ であるから，$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}\mathrm{PQ}$ より

$$S = \int_0^3 \mathrm{PR}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3 \mathrm{PQ}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{3\pi}$$

(2) $\theta = \angle\mathrm{OPQ}$，$r = \mathrm{PQ}$ とおくと $(r = 6\cos\theta)$



$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{9}{2}\pi$$

$\mathrm{PR} = \dfrac{2}{3}r$ より

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r\right)^2 d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\pi = \boldsymbol{2\pi}$$

(3) $C : x^2 + y^2 = 9\ (y \geqq 0)$ の第１象限と y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに１回転させてできる回転体の体積は，半径３の半球の体積であるから

$$\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 18\pi$$

$\mathrm{P}(-x,\ y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ を $2:1$ に内分する点は $\left(\dfrac{x}{3},\ y\right)\quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

この点の軌跡は C の第１象限の部分を y 軸を元に x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ だけ縮小したものであるから，図形 S と第１象限の共通部分を y 軸のまわりに１回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 dy = \frac{1}{9}\pi\int_0^3 x^2\,dy = \frac{1}{9}\cdot 18\pi = 2\pi$$

$\mathrm{P}(-3,\ 0)$，$\mathrm{Q}(s,\ t)$ を $2:1$ に内分する点を $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると

$$x = \frac{2s-3}{3},\quad y = \frac{2t}{3}\quad \text{ゆえに}\quad s = \frac{3}{2}(x+1),\quad t = \frac{3}{2}y$$

Q は C 上の点であるから　$s^2 + t^2 = 9\ \ (t \geqq 0)$

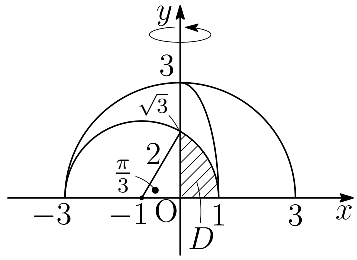
これに上の結果を代入することにより，R の軌跡の方程式は

$$\frac{9}{4}(x+1)^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9\quad \text{ゆえに}\quad (x+1)^2 + y^2 = 4\ \ (y \geqq 0)\quad \cdots(*)$$

$(*)$ の y 軸との交点の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$y=\sqrt{3}$$

右の図の領域 D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dy \\ &= \pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy \qquad \cdots(**) \end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy=\int_0^{\sqrt{3}}(3-y^2)\,dy$

$$=\left[\,3y-\frac{1}{3}y^3\,\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

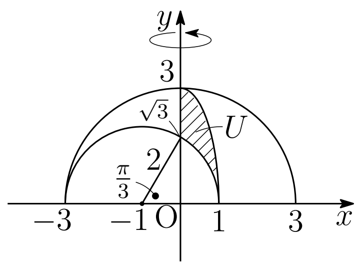
また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy$ は，D の面積であるから

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\,dy=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これらを $(**)$ に代入すると

$$V_2=2\sqrt{3}\pi-2\pi\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

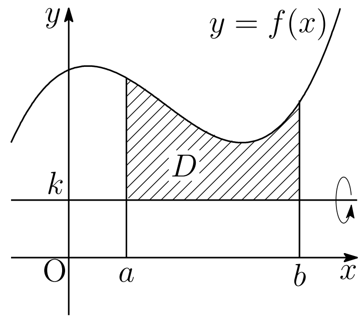
U の表す領域は右の図の斜線部分で，これを y 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積は



$$\begin{aligned} V_1-V_2 &= 2\pi-\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\pi \\ &= \boldsymbol{\left(2-3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\pi} \end{aligned}$$

注意　$(**)$ の $\displaystyle\pi\int_0^{\sqrt{3}}\{(x+1)^2-1\}\,dy$ は，D を直線 $x=-1$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を表す.

解説

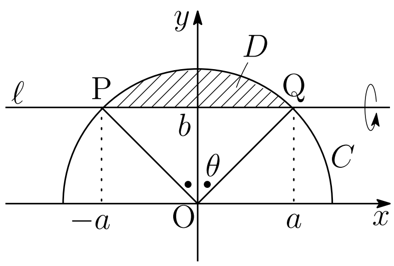


$k > 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq k$ であるとき，この区間において，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ で囲まれた領域 D を直線 $y = k$ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (y-k)^2\,dy \\ &= \pi \int_a^b (y^2-k^2)\,dx - 2\pi k \int_a^b (y-k)\,dx \end{aligned}$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$\boldsymbol{V = V_x - 2\pi k S}$$



半円 $C : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ $(y \geqq 0)$ と直線 $\ell : y = b$ $(b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とする．D を ℓ のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_x，D の面積を S とすると

$$V_x = \pi \int_{-a}^a (y^2-b^2)\,dx = \pi \int_{-a}^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi a^3$$

とくに，V_x は C の半径 r に関係なく a の値により決定する．
C と ℓ の 2 つの交点 P，Q に対し，$\angle\mathrm{POQ} = 2\theta$，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = r$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2{\cdot}2\theta - \frac{1}{2}{\cdot}2a{\cdot}b = r^2\theta - ab, \\ V &= V_x - 2\pi bS = \frac{4}{3}\pi a^3 - 2\pi b(r^2\theta - ab) \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{3}a^3 + ab^2 - br^2\theta\right) \end{aligned}$$

例えば，$C : x^2 + y^2 = 4$，$\ell : y = 1$ のとき，$a = \sqrt{3}$，$b = 1$，$r = 2$，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ より

$$V = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\pi$$

これは，前ページで求めた V_2 の 2 倍に等しい．

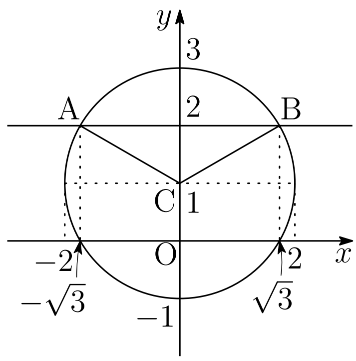
このように，領域 D を回転させた回転体の体積 V は，D の面積 S を利用すると，簡単に求めることができる．

例題 次の領域 D_1 および D_2 をそれぞれ x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

解答 D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．

右図において，$\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$y = 1 + \sqrt{4-x^2}\ (-2 \leqq x \leqq 2)\cdots(*)$ とすると

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx = S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする．$(*)$ より，$x^2+(y-1)^2 = 4$ であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y^2 - 2^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (y-2)\,dx + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2)\,dx \\ &= 2\pi S_1 + \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\,dx \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}(2\sqrt{3})^3 \\ &= 2\pi\left(\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 2 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4 - x^2} & (\sqrt{3} \leqq |x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| \leqq \sqrt{3}) \end{cases}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 2, \qquad \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\,dx = S_2$$

したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x)^2 - g(x)^2\}\,dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \pi \int_{-2}^{2} 2\{f(x) - g(x)\}\,dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= 2\pi S_2 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

補足　D_2 の重心は $(0,\ 1)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理[6] により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right)$$

九大理系 2012 年

円 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　求める体積は　　$V_1 + V_2 = 2\pi \left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right)$

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 参照)

九大理系 2013 年

原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

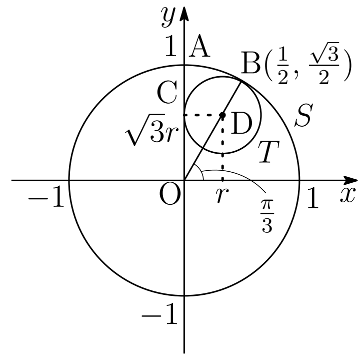
(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) OB の x 軸の正の方向となす角は $\frac{\pi}{3}$ であるから，T の半径を r とすると，D の座標は $(r,\ \sqrt{3}r)$，OD $= 2r$ である．
右の図より，OD + DB = 1 であるから

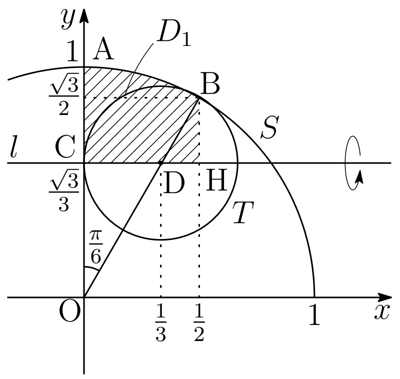
$$2r + r = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{1}{3}$$

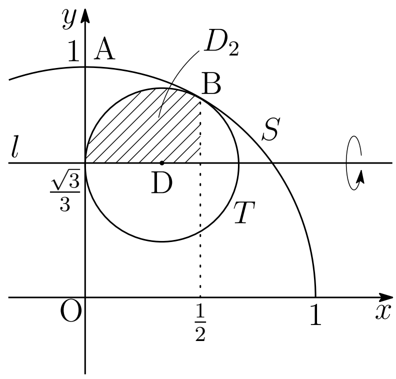
よって　　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$



(2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ とすると，S と y 軸，l，直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた領域 D_1 の面積は，左下の図から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \triangle\mathrm{OCD} + \triangle\mathrm{BDH} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{24} \qquad \cdots (*)\end{aligned}$$





D_1 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，$x^2+y^2=1$ および $(*)$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{1}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}-x^2\right) dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right)\end{aligned}$$

D_2 を l の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると，

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

に注意して

$$\frac{V_2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x-x^2\right) dx$$

求める体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi}-\frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,dx - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{2}{3}\Big[\,x-\frac{x^2}{2}\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right)}$$ ■

3 法 4 に関する 0, 1, 2, 3 の積は，右のようになる．
したがって，次の確率漸化式が成立する．

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ②$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ③$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \quad \cdots ④$$

$q_1 = s_1 = \dfrac{1}{4}$ および ②，④ より，$q_n = s_n$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{4},\quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \quad ゆえに \quad q_n = q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

したがって　$\boldsymbol{q_n = s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}}$　これを ③ に代入すると

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2^{n+2}} \quad ゆえに \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{2^n r_n\}$ は初項 $2r_1 = \dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$2^n r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} \quad ゆえに \quad \boldsymbol{r^n = \frac{n}{2^{n+1}}}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n - r_n - s_n \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \boldsymbol{1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) 整数 a, b は3の倍数ではないから

$$a \equiv \pm 1,\ b \equiv \pm 1 \quad ゆえに \quad a^2 \equiv 1,\ b^2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad \cdots (*)$$

$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ より，法3に関して

$$\begin{aligned} f(1) &= a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2\cdot 1 + 3 \equiv 0 & \pmod 3 \\ f(2) &= 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4\cdot 1 + 4\cdot 1 + 17 \equiv 1 & \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，$f(1)$ と $f(2)$ を3で割った余りはそれぞれ**0**と**1**

(2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x が m であるとき

$$2m^3 + a^2m^2 + 2b^2m + 1 = 0$$

したがって　$m(2m^2 + a^2m + 2b^2) = -1$

上式より，次の (i), (ii) の場合分けができる．

(i) $m = 1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = -1$ のとき，
第1式を第2式を代入すると

$$2 + a^2 + 2b^2 = -1 \quad ゆえに \quad a^2 + 2b^2 = -3$$

$a^2 + 2b^2 \geqq 0$ であるから，不適．

(ii) $m = -1,\ 2m^2 + a^2m + 2b^2 = 1$ のとき，
第1式を第2式を代入すると

$$2 - a^2 + 2b^2 = 1 \quad ゆえに \quad -a^2 + 2b^2 = -1$$

$(*)$ より，$-a^2 + 2b^2 \equiv 1 \pmod 3$ であるから，不適．

(i), (ii) より，$f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない．

補足 x を整数とするとき　$x + 3 \equiv x \pmod 3$
n を自然数とするとき　$(x+3)^n \equiv x^n \pmod 3$
ゆえに　$f(x+3) \equiv f(x) \pmod 3$
これと (1) の結果および $f(0) = 1$ から，$x \equiv 1$ (mod) が $f(x) = 0$ を満たす x であるための必要条件である．したがって，(2) は，(ii) の $m = 1$ の場合についてのみ調べればよい．

(3) $f(x)=0$ を満たす x は負である．(2) の結果に注意すると，$f(x)=0$ を満たす有理数 x は整数ではないから，x を $\dfrac{p}{q}$ とすると ($p,\ q$ は互いに素である整数，$p<0,\ q>1$)

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{p}{q}\right)^3+a^2\left(\frac{p}{q}\right)^2+2b^2\cdot\frac{p}{q}+1&=0 \\ 2p^3+a^2p^2q+2b^2pq^2+q^3&=0 \\ \frac{2p^3}{q}+a^2p^2+2b^2pq+q^2&=0 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

上式の $a^2p^2+2b^2pq+q^2$ が整数であるから，$\dfrac{2p^3}{q}$ は整数である．このとき，p と q は互いに素であるから ($q>1$)，$q=2$．これを ① に代入すると

$$p^3+a^2p^2+4b^2p+4=0 \quad ゆえに \quad p(p^2+a^2p+4b^2)=-4 \quad \cdots ②$$

負の整数 p は -4 の約数で，$q\ (=2)$ と互いに素であるから　$p=-1$

$p=-1$ を ② に代入すると

$$-(1-a^2+4b^2)=-4 \quad ゆえに \quad |a|^2-4|b|^2=-3$$

したがって　　$(|a|+2|b|)(|a|-2|b|)=-3$

$a,\ b$ は 3 の倍数でない整数であるから，$|a|+2|b|\geqq 3$ に注意すると

$$\begin{cases} |a|+2|b|=3 \\ |a|-2|b|=-1 \end{cases} \quad ゆえに \quad |a|=|b|=1$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,-1),\ (-1,\ 1),\ (-1,-1)}$　■

5 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ より

$$\frac{\alpha}{2|\alpha|^2+1}+\frac{\overline{z}i}{|z|^2+2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\overline{z}}{|z^2|+2}=\frac{\alpha i}{2|\alpha|^2+1}$$

上の第2式の共役複素数は $\quad \dfrac{z}{|z|^2+2}=\dfrac{-\overline{\alpha}i}{2|\alpha|^2+1} \quad \cdots(*)$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(*)$ より $\quad z=0$

(ii) $\alpha\neq 0$ のとき，$(*)$ より，$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと $(k>0)$

$|z|=k|\alpha|$ であるから，これを $\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ に代入すると

$$\frac{k^2|\alpha|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha|^2k^2-(2|\alpha|^2+1)k+2=0$$

したがって $\quad (k-2)(|\alpha|^2k-1)=0 \quad$ これを解いて $\quad k=2,\ \dfrac{1}{|\alpha|^2}$

$\dfrac{z}{-\overline{\alpha}i}=k$ であるから $\quad z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}$

(i), (ii) より $\quad$ **$\boldsymbol{\alpha=0}$ のとき $\boldsymbol{z=0}$**

$\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ のとき $\boldsymbol{z=-2\overline{\alpha}i,\ -\dfrac{\overline{\alpha}i}{|\alpha|^2}}$

■

1.11　2019 年 (理系)

$\boxed{1}$ n を自然数とする。x，y がすべての実数を動くとき，定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt$$

の最小値を I_n とおく。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2+2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a，b，c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1，z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ とする。また，複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を ℓ_1 とし，P_2 と O を通る直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 のなす鋭角が $60°$ である確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の 3 点 O(0, 0)，A(2, 0)，B(1, $\sqrt{3}$) を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2，P_3，$\cdots\cdots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき，点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし，点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし，点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

5 a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の3条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり，$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答例

$\boxed{1}$ まず，次の定積分を計算する．

$$\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 4n\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\,t - \frac{1}{4n\pi}\sin 4n\pi t\,\Big]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt = \Big[-\frac{t}{2n\pi}\cos 2n\pi t + \frac{1}{4n^2\pi^2}\sin 2n\pi t\,\Big]_0^1 = -\frac{1}{2n\pi},$$

$$\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt = -\frac{1}{2n\pi}\Big[\,\cos 2n\pi t\,\Big]_0^1 = 0,$$

$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\quad \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2},\quad \int_0^1 dt = 1$$

上の結果により

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt + x^2\int_0^1 t^2\,dt + y^2\int_0^1 dt \\
&\qquad\qquad - 2x\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt - 2y\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt + 2xy\int_0^1 t\,dt \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 - 2x\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) - 2y\cdot 0 + 2xy\cdot\frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \frac{x}{n\pi} + xy \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2} \\
&\qquad = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって　$x = -\dfrac{6}{n\pi}$，$y = \dfrac{3}{n\pi}$ のとき，$(*)$ は最小値 $I_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{n^2\pi^2}$ をとる．

よって　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}$

別解 $\displaystyle\int_0^1 dt=1$，$\displaystyle\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$ より，$f(t)=t-\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\int_0^1 f(t)\,dt=0,\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt=\frac{1}{3}\Big[\ \Big(t-\frac{1}{2}\Big)^3\ \Big]_0^1=\frac{1}{12}$$

$\displaystyle\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt=0$，$\displaystyle\int_0^1 t\sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}$ より

$$\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt=-\frac{1}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)^2\,dt$$

したがって $$\int_0^1 f(t)\left\{\sin 2n\pi t+\frac{6}{n\pi}f(t)\right\}dt=0$$

$g(t)=\sin 2n\pi t+\dfrac{6}{n\pi}f(t)$ とおくと $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt=0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,dt&=\int_0^1 \sin 2n\pi t\,dt+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 f(t)\,dt=0,\\ \int_0^1 g(t)^2\,dt&=\int_0^1 \sin^2 2n\pi t\,dt+\frac{12}{n\pi}\int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt+\frac{36}{n^2\pi^2}\int_0^1 f(t)^2\,dt\\ &=\frac{1}{2}+\frac{12}{n\pi}\left(-\frac{1}{2n\pi}\right)+\frac{36}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}\end{aligned}$$

$\sin 2n\pi t=-\dfrac{6}{n\pi}f(t)+g(t)$，$t=f(t)+\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 2n\pi t-xt-y&=-\frac{6}{n\pi}f(t)+g(t)-x\left(f(t)+\frac{1}{2}\right)-y\\ &=-\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)f(t)+g(t)-\left(\frac{x}{2}+y\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1(\sin 2n\pi t-xt-y)^2\,dt&=\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2\int_0^1 f(t)^2\,dt+\int_0^1 g(t)^2\,dt+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\\ &=\frac{1}{12}\left(x+\frac{6}{n\pi}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\\ &\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{n^2\pi^2}=I_n\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{1}{2}}$$ ■

2 (1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\begin{cases} f(x^2) = (x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3) = x^4f(x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\begin{cases} 2m = 2+n & \cdots ① \\ 3n = \max(4+m,\ 2+n) & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n = 4+m$　ゆえに　$m = 3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m = n = 2$

(ii) $4+m < 2+n$ のとき，② より　$3n = 2+n$　ゆえに　$n = 1$
これを ① に代入すると，$m = \dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2) = (x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x) = g(x)$　$\cdots ③$
また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(-x) - 6x^2 - 2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3) = x^4f(-x) - 3x^2g(x) - 6x^2 - 2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x) = f(x)$
また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0) = 2g(0)+7,\quad g(0) = -2 \quad ゆえに \quad f(0) = 3$$

以上の結果から，$f(x) = ax^2+3$，$g(x) = px^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^4+3 = (x^2+2)(px^2-2)+7 \\ px^6-2 = x^4(ax^2+3) - 3x^2(px^2-2) - 6x^2 - 2 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} ax^4 = px^4 + 2(p-1)x^2 \\ px^6 = ax^6 - 3(p-1)x^4 \end{cases}$$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = p,\quad p-1 = 0 \quad これを解いて \quad a = p = 1$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = x^2+3,\ \ g(x) = x^2-2}$ ■

3　(1) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots(*)$ の解 z_1，z_2 が $z_1=z_2$，すなわち，2次方程式 $(*)$ が重解をもつ確率である．係数について，$b^2-4ac=0$ であるから，$b^2=4ac$ より

$b=2$ のとき，$ac=1$ より　$(a,\ c)=(1,\ 1)$
$b=4$ のとき，$ac=4$ より　$(a,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b=6$ のとき，$ac=9$ より　$(a,\ c)=(3,\ 3)$

よって，求める確率は　$\dfrac{1+3+1}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{216}}$

(2)　(i) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に実数解をもつとき，その解は1ではないから，$(*)$ は -1 を重解にもち，その方程式は

$$a(x+1)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad b=2a,\quad c=a$$

これを満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の3組である．

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 2),\ (3,\ 6,\ 3)$$

(ii) 2次方程式 $(*)$ が単位円周上に虚数解をもつとき　$b^2-4ac<0$　$\cdots$①
$(*)$ の解と係数の関係および $z_2=\overline{z_1}$，$|z_1|=1$ に注意して

$$z_1z_2=\frac{c}{a} \quad \text{ゆえに} \quad |z_1|^2=\frac{c}{a} \quad \text{すなわち} \quad c=a \quad \cdots②$$

② を ① に代入して　$b^2-4a^2<0$　ゆえに　$\dfrac{b}{2}<a=c$

$b=1$ のとき　　$a=c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=2,\ 3$ のとき　$a=c=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=4,\ 5$ のとき　$a=c=3,\ 4,\ 5,\ 6$
$b=6$ のとき　　$a=c=4,\ 5,\ 6$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は　$6+2\cdot5+2\cdot4+3=27$ 組

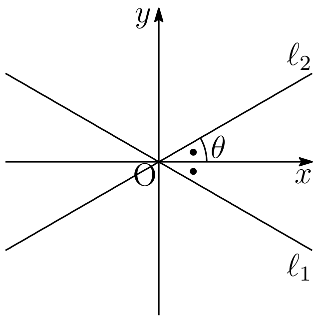
よって，求める確率は　$\dfrac{3+27}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{36}}$

(3) 条件を満たす z_1，z_2 は虚数であるから

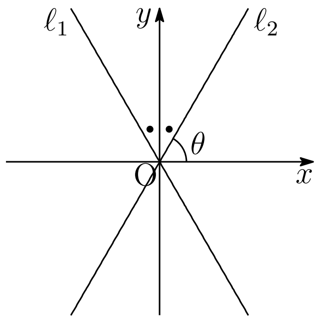
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$$

ℓ_2 の偏角を θ とすると $\quad \tan\theta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}$

(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$



(i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より

$$\sqrt{3(4ac - b^2)} = b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 3ac$$

$b = 3$ のとき，$ac = 3$ より $\quad (a,\ c) = (1,\ 3),\ (3, 1)$
$b = 6$ のとき，$ac = 12$ より $\quad (a,\ c) = (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は $\quad 2 + 4 = 6$ 組

(ii) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{b} = \sqrt{3}$ より

$$\sqrt{4ac - b^2} = \sqrt{3}b \quad \text{すなわち} \quad b^2 = ac$$

$b = 1$ のとき，$ac = 1$ より $\quad (a,\ c) = (1,\ 1)$
$b = 2$ のとき，$ac = 4$ より $\quad (a,\ c) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$b = 3$ のとき，$ac = 9$ より $\quad (a,\ c) = (3,\ 3)$
$b = 4$ のとき，$ac = 16$ より $\quad (a,\ c) = (4,\ 4)$
$b = 5$ のとき，$ac = 25$ より $\quad (a,\ c) = (5,\ 5)$
$b = 6$ のとき，$ac = 36$ より $\quad (a,\ c) = (6,\ 6)$

これらの $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は $\quad 5{\cdot}1 + 3 = 8$ 組

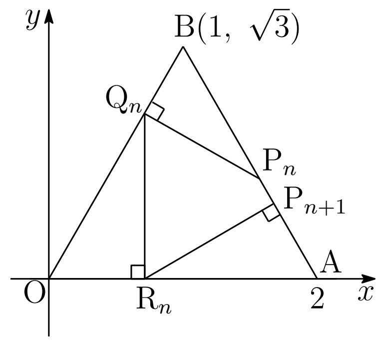
よって，求める確率は $\quad \dfrac{6 + 8}{6^3} = \mathbf{\dfrac{7}{108}}$ ■

4 点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を通り，直線 OB に垂直な直線は

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_n)+y_n$$

これと直線 OB : $y=\sqrt{3}x$ の交点の x 座標は

$$\sqrt{3}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_n)+y_n$$



これを解くことにより，点 Q_n の x 座標は　$x=\dfrac{x_n+\sqrt{3}y_n}{4}$

次に，点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を通り，直線 AB に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_{n+1})+y_{n+1}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$0=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_{n+1})+y_{n+1}$$

これを解くことにより，点 R_n の x 座標は　$x=x_{n+1}-\sqrt{3}y_{n+1}$

点 Q_n と点 R_n の x 座標は等しいから

$$x_{n+1}-\sqrt{3}y_{n+1}=\frac{x_n+\sqrt{3}y_n}{4}$$

2 点 P_n，P_{n+1} は直線 AB : $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 上の点であるから

$$x_{n+1}-\sqrt{3}(-\sqrt{3}x_{n+1}+2\sqrt{3})=\frac{x_n+\sqrt{3}(-\sqrt{3}x_n+2\sqrt{3})}{4}$$

整理すると　$x_{n+1}=-\dfrac{1}{8}x_n+\dfrac{15}{8}$　ゆえに　$x_{n+1}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{5}{3}\right)$

数列 $\left\{x_n-\dfrac{5}{3}\right\}$ は初項 $x_1-\dfrac{5}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$x_n-\frac{5}{3}=\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\quad \text{ゆえに}\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{5}{3}$$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{3}x_n+2\sqrt{3})=-\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3}+2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

よって，求める点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right)$ ■

5 $$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$

条件 (ア) により　$i = \dfrac{ai+b}{ci+1},\quad -i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに　$b+c+(a-1)i = 0,\quad b+c-(a-1)i = 0$

上の 2 式から　$a = 1,\quad b = -c$

これを $(*)$ に代入すると　$w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots$ ①　ゆえに　$z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z} = 0$ より　$-\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}-\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると　$(c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots$ ②

条件 (イ) に注意すると，① により　$c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから　$c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots$ ③ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により　$k^2+1 = 1$　ゆえに　$k = 0$　よって　$|w| = 1 \quad \cdots (**)$

また，③ により　$|c|^2 - 1 = 0$　ゆえに　$c = \pm 1$

(i) $c = 1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z = 0$ のとき，$w = -1$ となり，条件 (ウ) に反する．

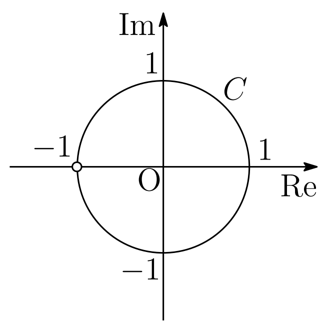
(ii) $c = -1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 1,\ c = -1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z = i\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w = \frac{i\tan\theta + 1}{-i\tan\theta + 1} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$-\pi < 2\theta < \pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は複素数},\ ad - bc \neq 0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z + \alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある [7]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

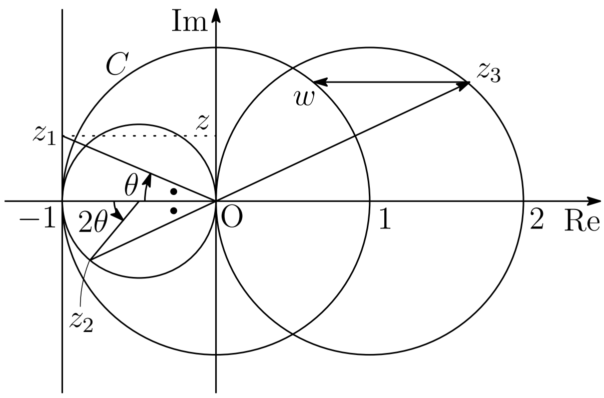
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z) = z - 1, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = -2z, \quad f_4(z) = z - 1$$

について，合成変換 $f(z) = f_4{\circ}f_3{\circ}f_2{\circ}f_1(z)$ は　$f(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

$z = i\tan\theta$，$z_1 = f_1(z)$，$z_2 = f_2(z_1)$，$z_3 = f_3(z_2)$，$w = f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned} z_2 = f_2{\circ}f_1(z) &= \frac{1}{i\tan\theta - 1} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= -\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$



■

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

1.12　2020 年 (理系)

1　点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

2　a，b，c，d を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) c，d を a，b を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り，11 で割ると 10 余るとする。また，$f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り，11 で割ると 10 余るとする。a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

3　四面体 OABC において，辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を ℓ，辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m，辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。$\ell \perp m$，$m \perp n$，$n \perp \ell$ であり，$\mathrm{AB} = \sqrt{5}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{3}$，$\mathrm{CA} = 2$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(2) 四面体 OABC の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。

4　4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

5　座標空間において，中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ $y = e^{-x} - e^{-2x}$ より　$y' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$

曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-t} - e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y - (e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(x - t)$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るから

$$-(e^{-t} - e^{-2t}) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})(a - t)$$

したがって　$(e^t - 2)(a - t) = (e^t - 1)$　$\cdots(*)$

$e^t - 2 = 0$，すなわち，$t = \log 2$ は，$(*)$ は満たさない．

$t \neq \log 2$ のとき，$(*)$ から

$$a - t = \frac{e^t - 1}{e^t - 2} \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1 + \frac{1}{e^t - 2}$$

$f(t) = t + 1 + \dfrac{1}{e^t - 2}$ とおくと

$$f'(t) = 1 - \frac{e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 2)^2 - e^t}{(e^t - 2)^2} = \frac{(e^t - 1)(e^t - 4)}{(e^t - 2)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$(\log 2)$	$\cdots$	$2\log 2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2} + 2\log 2$	$\nearrow$

このとき　$\displaystyle\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$

$\displaystyle\lim_{t \to \log 2 - 0} f(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to \log 2 + 0} f(t) = \infty,$

したがって，$f(t)$ のとり得る値の範囲は　$f(t) \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq f(t)$

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \dfrac{3}{2} + 2\log 2 \leqq a}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ が実数を係数とする整式 $f(x) = 0$ の解であるから，
$f(x)$ は，$(x-w)(x-\overline{w})$，すなわち，x^2-x+1 を因数にもつ．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + ax^2 + bx^2 + cx + d \\ &= (x^2-x+1)\{x^2+(a+1)x+a+b\} \\ &\qquad\qquad + (b+c-1)x - a - b + d \end{aligned}$$

したがって　$b+c-1=0, \quad -a-b+d=0$
よって　$\boldsymbol{c = 1-b, \ \ d = a+b}$

(2) (1) の結果から　$f(x) = x^4+ax^3+bx^2+(1-b)x+a+b$
ゆえに　$f(1) = 2a+b+2, \quad f(-1) = 3b$
$f(1)$，$f(-1)$ を 7 で割った余りが，それぞれ 1，3 であるから

$$2a+b+2 \equiv 1, \quad 3b \equiv 3 \pmod 7$$

上の第 2 式から　$b \equiv 1 \pmod 7$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+1+2 \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \equiv -1 \pmod 7$$

$f(1)$，$f(-1)$ を 11 で割った余りが，ともに 10 であるから

$$2a+b+2 \equiv 10, \quad 3b \equiv 10 \pmod{11}$$

上の第 2 式から　$b \equiv 7 \pmod{11}$　これを第 1 式に代入すると

$$2a+7+2 \equiv 10 \quad \text{ゆえに} \quad 2a \equiv 1 \pmod{11}$$

さらに　$6 \cdot 2a \equiv 6 \cdot 1$　ゆえに　$a \equiv 6 \pmod{11}$

ゆえに　$(*)\begin{cases} a \equiv -1 \pmod 7 \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b \equiv 1 \pmod 7 \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$

$(*)$ の第 1 式から，$a = -1+7k$ とおき (k は整数)，これを $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$-1+7k \equiv 6 \quad \text{ゆえに} \quad k \equiv 1 \pmod{11}$$

$k = 1+11\ell$ とおくと (ℓ は整数)

$$a = -1+7(1+11\ell) = 6+77\ell$$

a の絶対値が 40 以下であるから，$\ell = 0$ より　$a = 6$　$\cdots$①

(∗∗) の第 2 式から，$b = 7 + 11m$ とおき (m は整数)，これを (∗∗) の第 1 式に代入すると

$$7 + 11m \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 4m \equiv 1 \quad \text{したがって} \quad m \equiv 2 \pmod 7$$

$m = 2 + 7n$ とおくと (n は整数)

$$b = 7 + 11(2 + 7n) = 29 + 77n$$

b の絶対値が 40 以下であるから，$n = 0$ より　$b = 29$　$\cdots$②

(1) の結果から

$$f(x) = (x^2 - x + 1)\{x^2 + (a + 1)x + a + b\}$$

①，② をこれに代入して

$$f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 7x + 35)$$

$f(x) = 0$ の解は，$x^2 - x + 1 = 0$，$x^2 + 7x + 35 = 0$ を解いて

$$\boldsymbol{x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2},\ \frac{-7 \pm \sqrt{91}i}{2}}$$

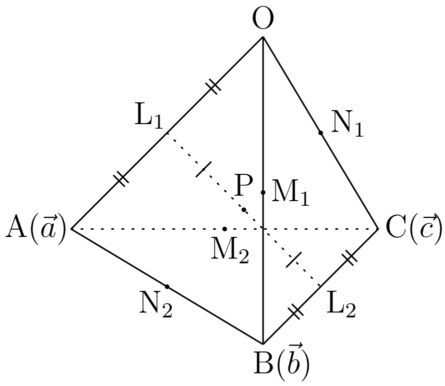
補足 $(*)\begin{cases} a \equiv -1 \pmod 7 \\ a \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$　　$(**)\begin{cases} b \equiv 1 \pmod 7 \\ b \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ より

$$\begin{cases} a - 6 \equiv 0 \pmod 7 \\ a - 6 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} b - 29 \equiv 0 \pmod 7 \\ b - 29 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$$

したがって　$a - 6 \equiv 0,\ \ b - 29 \equiv 0 \pmod{77}$

$a,\ b$ の絶対値がともに 40 以下であるから　$a = 6$，$b = 29$ ■

3 (1) 点Oを始点とし，3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とする．線分OA，OB，OCの中点をそれぞれ$\mathrm{L_1}$，$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{N_1}$とし，線分BC，CA，ABの中点をそれぞれ$\mathrm{L_2}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{N_2}$とすると



$$2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}} = \vec{b}+\vec{c}-\vec{a},$$
$$2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} = \vec{c}+\vec{a}-\vec{b},$$
$$2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$$

直線$\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{M_1M_2}$，$\mathrm{N_1N_2}$はそれぞれ直線ℓ，m，nであるから，$\ell\perp m$より，$\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$であるから

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}) &= (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\\ &= |\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2=0 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$m\perp n$，$n\perp\ell$であるから，同様にして

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}}) &= (\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\\ &= |\vec{a}|^2-|\vec{c}-\vec{b}|^2=0 \quad \cdots ②\\ (2\overrightarrow{\mathrm{N_1N_2}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\\ &= |\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{c}|^2=0 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

①〜③より
$$\begin{aligned}|\vec{c}| &= |\vec{b}-\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathrm{AB} = \sqrt{5}\\ |\vec{a}| &= |\vec{c}-\vec{b}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \mathrm{BC} = \sqrt{3}\\ |\vec{b}| &= |\vec{a}-\vec{c}| = |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \mathrm{CA} = 2\end{aligned}$$

①〜③をそれぞれ整理すると

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2 = 3+4-5=2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1$$
$$2\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2 = 4+5-3=6 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3$$
$$2\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 = 5+3-4=4 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{c}\cdot\vec{a}=2$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$と$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}-\vec{c}$のなす角を$\varphi$とすると$(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{a}-\vec{c}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1-3}{2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

よって，直線OBと直線CAのなす角θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$は

$$\theta = \pi-\varphi = \pi-\frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2 = 1+2-3=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{L_1L_2}}) &= (\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = |\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 5-4+1-2=0\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{L_1L_2}$，$\mathrm{BC}\perp\mathrm{L_1L_2}$

2点 $\mathrm{L_1}$，$\mathrm{L_2}$ の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

点 P は，四面体 OABC の4頂点を通る球面の中心である．したがって

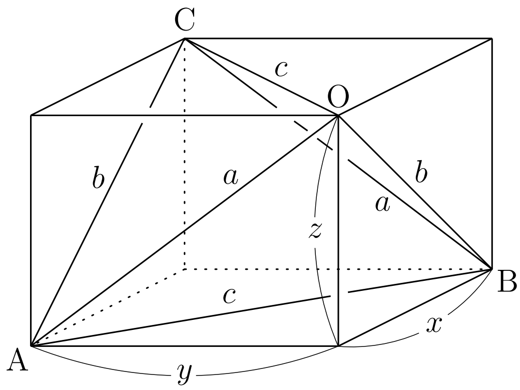
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OL_2}}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

このとき

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 3+4+5+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot2=24\end{aligned}$$

よって，求める半径は　$\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \dfrac{1}{4}\sqrt{24} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

補足　四面体 OABC のすべての面が合同である四面体を等面四面体という．$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x，y，z で



$$\begin{aligned}y^2+z^2&=a^2\\ z^2+x^2&=b^2\\ x^2+y^2&=c^2\end{aligned}$$

を満たすものが唯一存在する．

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれ，求める球面の半径はこの長方形に外接する球面の半径 R に等しい．

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

等面四面体の体積を V とすると[8](直方体から4つの直角四面体を除く)

$$\begin{aligned}V&=xyz-4\cdot\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz\\ &=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

■

[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)

$\boxed{4}$ (1) X が 5 で割り切れない，すなわち，4 回とも 5 以外の目が出る確率を p_0，X が 5 で割り切れるが 25 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 5 の目が丁度 1 回出る確率を p_1 とすると

$$p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \quad p_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - \left(\frac{626}{1296} + \frac{500}{1296}\right) = \mathbf{\frac{19}{144}}$$

(2) X が 2 で割り切れない，すなわち，4 回とも奇数の目が出る確率を q_0，X が 2 で割り切れるが 4 で割り切れない，すなわち，4 回のうち 2 または 6 の目が 1 回と奇数の目が 3 回出る確率を q_1 とすると

$$q_0 = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad q_1 = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$$

求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1 - (q_0 + q_1) = 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{37}{48}}$$

(3) X が 100 の倍数となるは，出る目の組合せが次の (i)〜(iv) の場合である．

(i) $\{\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ 5,\ 5\}$ のとき $(\mathrm{A} = 2,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{24}{1296}$$

(ii) $\{4,\ 5,\ 5,\ \mathrm{B}\}$ のとき $(\mathrm{B} = 1,\ 2,\ 3,\ 6)$

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{4}{6} = \frac{48}{1296}$$

(iii) $\{4,\ 4,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{1296}$$

(iv) $\{4,\ 5,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{4!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{4}{1296}$$

(i)〜(iv) より，求める確率は $\dfrac{24+48+6+4}{1296} = \dfrac{82}{1296} = \mathbf{\dfrac{41}{648}}$ ■

5　(1) T の表す領域は

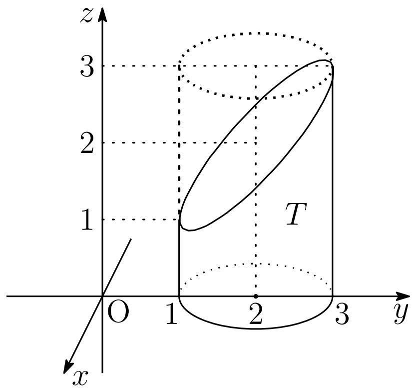
$$x^2+(y-2)^2 \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

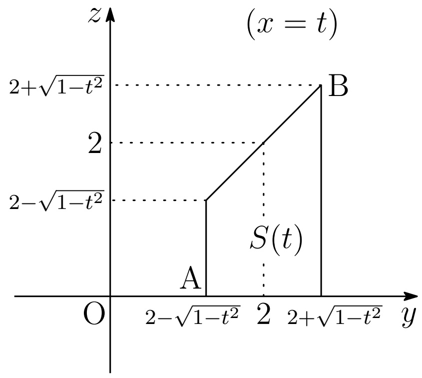
T を平面 $x=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面を表す領域は

$$x=t, \quad 2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leqq z \leqq y$$

右下の図で中央の z 座標が 2 であることに注意して

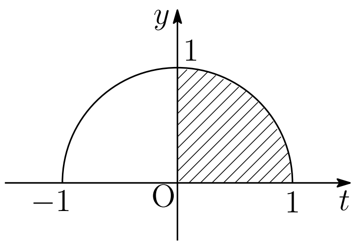
$$S(t)=2\{(2+\sqrt{1-t^2})-(2-\sqrt{1-t^2})\}=\boldsymbol{4\sqrt{1-t^2}}$$





右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$$



よって，求める T の体積を V_1 とすると

$$V_1=\int_{-1}^1 S(t)\,dt=\int_{-1}^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt=8\int_0^1 \sqrt{1-t^2}=8\cdot\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{2\pi}$$

(2) 2 点 A，B を (1) の図のようにとると

$$\mathrm{OA}=2-\sqrt{1-t^2}, \quad \mathrm{OB}=\sqrt{2}(2+\sqrt{1-t^2})$$

求める立体の体積を V_2 とすると，T が yz 平面に関して対称であるから

$$\frac{V_2}{2\pi}=\int_0^1(\mathrm{OB}^2-\mathrm{OA}^2)\,dt=\int_0^1\{2(2+\sqrt{1-t^2})^2-(2-\sqrt{1-t^2})^2\}\,dt$$

$$=\int_0^1(5-t^2)\,dt+12\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\,5t-\frac{t^3}{3}\,\right]_0^1+12\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{14}{3}+3\pi$$

よって　　$V_2=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{14}{3}+3\pi\right)}$　■

第 2 章　九州工業大学

出題分野　(工学部　情報工学部)

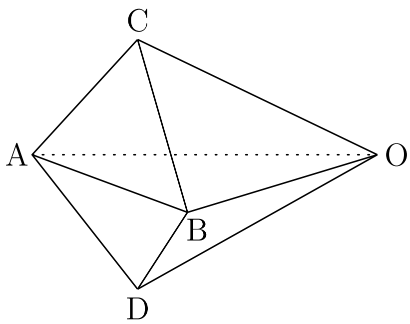
工学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	九工大 工学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式										
	三角関数		3								
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	3									
III	式と曲線						3				
	複素数平面									3	3
	関数										
	極限							1	2		
	微分法とその応用	4		3·4		3·4	3·4	1·2	2		
	積分法			3	4	3		1·3		2	
	積分法の応用	4	4	4	3·4	4	4	2	1	1	1·2
A	場合の数と確率		1					4	4	4	4
	整数の性質										
	図形の性質										
B	平面上のベクトル								3		
	空間のベクトル	1	2	1	1	1	1				
	数列					2	2	4			
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	2		2	2						

数字は問題番号 (2017 年以降は情報工学部と共通問題)

2.1 2015年 (工学部)

1 四面体 OABC において，三角形 ABC は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，OA = OB = OC = 2 とする．また，点 C を通り平面 OAB に垂直な直線上に点 D があり，線分 CD の中点 H は平面 OAB に含まれるとする．すなわち，点 D は平面 OAB に関して，点 C と対称な点である．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおいて，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) 直線 BH と直線 OA の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{a}$ を求めよ．さらに，OP および BP の長さを求めよ．

(4) (3) で定めた点 P に対して，四角形 BCPD の面積 S を求めよ．また，四角錐(すい)O-BCPD の体積 V を求めよ．

2 初項 1，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ と，一般項が $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある．ここで，実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．たとえば，$b_1 = \left[\dfrac{4}{3}\right] = 1$，$b_2 = [\,2\,] = 2$，$b_3 = \left[\dfrac{8}{3}\right] = 2$ である．数列 $\{a_n\}$ を次のように，b_1 個，b_2 個，b_3 個，$\cdots$ の群に分け，第 k 群には b_k 個の数が入るようにする．

$$\begin{array}{cccc} |\ \ a_1\ \ | & a_2,\ a_3\ \ | & a_4,\ a_5\ \ | & a_6,\ \cdots \\ \text{第 1 群} & \text{第 2 群} & \text{第 3 群} & \cdots \end{array}$$

第 k 群の最初の数を c_k とする．次に答えよ．

(1) 自然数 m に対して，b_{3m-2}，b_{3m-1}，b_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 S_{3m} を求めよ．

(2) 自然数 m に対して，c_{3m-2}，c_{3m-1}，c_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 T_{3m} を求めよ．

(3) 1000 は第何群の何番目の数か．

(4) $x \geqq 1$ のとき $\sqrt{x^2+1} < x + \dfrac{1}{2}$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，m は自然数とする．

$$\sum_{k=1}^{3m} (\sqrt{c_k} - k) < \frac{m}{2}$$

3 n を 2 以上の自然数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = x^n \log x$ $(x > 0)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x + \dfrac{1}{x} > 0$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^n \log x = 0$ を示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最小値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい．

(4) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を c_n とし

$$I_n = \int_{c_n}^{1} f(x)\,dx$$

とする．$\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 I_n$ を求めよ．

4 関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ $(x \geqq 1)$ と曲線 $C : y = f(x)$ について，次に答えよ．

(1) 区間 $x > 1$ で，$f(x)$ は増加し，曲線 C は上に凸であることを示せ．

(2) 曲線 C の点 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線 ℓ と曲線 C および x 軸で囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(4) (3) で定めた図形 D の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ とし，$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2\cdot2\cdot2} = \frac{7}{8}$$

よって $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cdot2\cdot\frac{7}{8} = \boldsymbol{\frac{7}{2}}$

$\triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{OBC} \equiv \mathrm{OCA}$ であるから $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{7}{2}$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{a} = (\vec{c} - \vec{b})\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} = \mathbf{0}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2\\ &= 2^2 + 2\cdot\frac{7}{2} + 2^2 = 15 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に平行な単位ベクトルの 1 つを $\vec{e} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e} = \left(\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|}\right)\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}\\ &= \frac{\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{a} + \vec{b}|^2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}}{15}(\vec{a} + \vec{b}) = \boldsymbol{\frac{7}{15}(\vec{a} + \vec{b})}\end{aligned}$$

2 点 C，D の中点が H であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= 2\cdot\frac{7}{15}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = \boldsymbol{\frac{14}{15}\vec{a} + \frac{14}{15}\vec{b} - \vec{c}}\end{aligned}$$

(3) H は直線 BP 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{7}{15}\vec{b}=\frac{8}{15}\left(\frac{7}{8}\vec{a}\right)+\frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad ゆえに\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{7}{8}\vec{a}$$

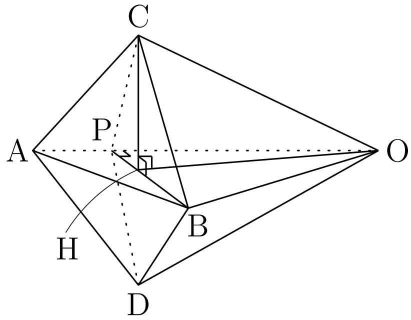
よって　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\frac{7}{8}\vec{a}-\vec{b}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{a}=\left(\frac{7}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\frac{7}{8}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{7}{8}\cdot2^2-\frac{7}{2}=\mathbf{0}$$

$$\mathrm{OP}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{7}{8}|\vec{a}|=\frac{7}{8}\cdot2=\boldsymbol{\frac{7}{4}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{a}=0$ より，$\angle\mathrm{OPB}=90^\circ$ であるから

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$



(4) ① より　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{15}$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{7}{15}|\vec{a}+\vec{b}|=\frac{7}{\sqrt{15}}$

したがって　$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{7}{\sqrt{15}}\right)^2}=\sqrt{\frac{11}{15}}$

$$\frac{S}{2}=\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times\sqrt{\frac{11}{15}}=\frac{\sqrt{11}}{8}$$

よって　$S=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=\frac{7}{15}(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{7}{15}\left(2^2+\frac{7}{2}\right)-\frac{7}{2}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}$ であるから

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OP}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{11}}{4}\times\frac{7}{4}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{11}}{48}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ より

$$b_{3m-2} = \left[\frac{2(3m-2)+2}{3}\right] = \left[2m-1+\frac{1}{3}\right] = \boldsymbol{2m-1}$$

$$b_{3m-1} = \left[\frac{2(3m-1)+2}{3}\right] = [\ 2m\ ] = \boldsymbol{2m}$$

$$b_{3m} = \left[\frac{2\cdot 3m+2}{3}\right] = \left[2m+\frac{2}{3}\right] = \boldsymbol{2m}$$

$$\begin{aligned} S_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}(b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k}) = \sum_{k=1}^{m}\{(2k-1)+2k+2k\} \\ &= \sum_{k=1}^{m}(6k-1) = 6\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-m = \boldsymbol{m(3m+2)} \end{aligned}$$

(2) $\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$$

$m \geqq 2$ のとき　$S_{3(m-1)} = (m-1)\{3(m-1)+2\} = (m-1)(3m-1)$

c_{3m-2} は $\{a_n\}$ の第 $S_{3(m-1)}+1$ 項であるから

$$\begin{aligned} c_{3m-2} &= 3\{(m-1)(3m-1)+1\}-2 \\ &= 9m^2-12m+4 = \boldsymbol{(3m-2)^2} \end{aligned}$$

c_{3m-1} は $\{a_n\}$ の第 $S_{3(m-1)}+b_{3m-2}+1$ 項であるから

$$\begin{aligned} c_{3m-1} &= 3\{(m-1)(3m-1)+(2m-1)+1\}-2 \\ &= 9m^2-6m+1 = \boldsymbol{(3m-1)^2} \end{aligned}$$

c_{3m} は $\{a_n\}$ の第 $S_{3(m-1)}+b_{3m-2}+b_{3m-1}+1$ 項であるから

$$\begin{aligned} c_{3m} &= 3\{(m-1)(3m-1)+(2m-1)+2m+1\}-2 \\ &= \boldsymbol{9m^2+1} \end{aligned}$$

上の c_{3m-2}，c_{3m-1}，c_{3m} は $m=1$ のときも成り立つことに注意して

$$\begin{aligned} T_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}(c_{3k-2}+c_{3k-1}+c_{3k}) = \sum_{k=1}^{m}\{(3k-2)^2+(3k-1)^2+(9k^2+1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{m}(27k^2-18k+6) = 27\times\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-18\times\frac{1}{2}m(m+1)+6m \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}m(6m^2+3m+1)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，$31^2 < 1000 < 32^2$ であるから

$$c_{31} = 31^2 = 961, \quad 1000 = 961 + 3 \times 13$$

よって，1000 は　**第 31 群の 14 番目**

(4) (2) の結果から，$\sqrt{c_{3k-2}} - (3k-2) = 0$，$\sqrt{c_{3k-1}} - (3k-1) = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m}(\sqrt{c_k} - k) &= \sum_{k=1}^{m}(\sqrt{c_{3k}} - 3k) \\ &= \sum_{k=1}^{m}(\sqrt{(3k)^2+1} - 3k) < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2} = \frac{m}{2}\end{aligned}$$

■

3 (1) $g(x) = \log x + \dfrac{1}{x}$ とおくと　$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$

したがって，$g(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

ゆえに　$g(x) \geqq 1 > 0$　よって　$\log x + \dfrac{1}{x} > 0$

(2) (1) の結果から　$-\dfrac{1}{x} < \log x$

また，$0 < x < 1$ のとき　$-\dfrac{1}{x} < \log x < 0$　ゆえに　$-x^{n-1} < x^n \log x < 0$

n は 2 以上の自然数であるから　$\displaystyle\lim_{x \to +0}(-x^{n-1}) = 0$

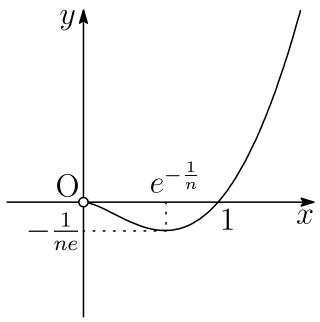
よって，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^n \log x = 0$

(3) $f(x) = x^n \log x$ を微分すると

$$f'(x) = x^{n-1}(n \log x + 1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$



よって，グラフの概形は右の図のようになる．最小値 $\boldsymbol{f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = -\dfrac{1}{ne}}$

(4) (3) の結果から，$c_n = e^{-\frac{1}{n}}$ であるから

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{c_n}^{1} x^n \log x\,dx = \frac{1}{n+1}\int_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1} (x^{n+1})' \log x\,dx \\ &= \left[\, \frac{x^{n+1}\log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \,\right]_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}e^{-\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{(n+1)^2}(1 - e^{-\frac{n+1}{n}}) \end{aligned}$$

ゆえに　$n^2 I_n = \dfrac{n}{n+1}e^{-\frac{n+1}{n}} - \dfrac{n^2}{(n+1)^2}(1 - e^{-\frac{n+1}{n}})$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n+1}{n}} = e^{-1}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n = e^{-1} - (1 - e^{-1}) = \boldsymbol{2e^{-1} - 1}$　■

4　(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $(x \geqq 1)$ より　$\{f(x)\}^2 = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

上の第 2 式の両辺を微分すると

$$2f(x)f'(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{ゆえに} \quad f(x)f'(x) = \frac{1}{x^3} \quad \cdots ①$$

$x > 1$ のとき，$f(x) > 0$ であるから，① より　$f'(x) > 0$

よって，区間 $x > 1$ で $f(x)$ は増加する．

① の両辺を微分すると　$\{f'(x)\}^2 + f(x)f''(x) = -\dfrac{3}{x^4}$

したがって　$f(x)f''(x) = -\{f'(x)\}^2 - \dfrac{3}{x^4}$

$x > 1$ のとき，$f(x) > 0$ であるから，上式から　$f''(x) < 0$

よって，区間 $x > 1$ で，曲線 C は上に凸である．

(2) ① より　$f(\sqrt{2})f'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^3}$

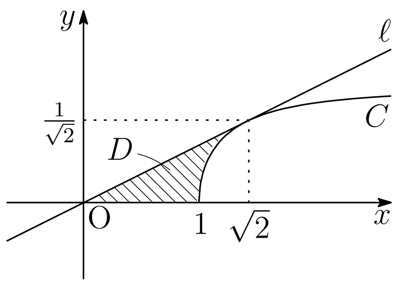
$f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$f'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}$

ℓ は点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$$

(3) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ より　$x^2 = \dfrac{1}{1-y^2}$，　$y = \dfrac{1}{2}x$ より　$x^2 = 4y^2$

よって，求める体積 V は



$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-y^2} - 4y^2\right) dy \\
&= \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| - \frac{4}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \pi\left\{\log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}}$

別解 (バウムクーヘン型求積法)

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \frac{1}{2}x\,dx - \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2-1})\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

よって　$V = \pi\left\{\log(\sqrt{2}+1) - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

(4) $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とすると　$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

曲線 C の方程式を x について解くと　$x = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$　$(y \geqq 0)$

また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$ について，$y = \sin\theta$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$$

y	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

したがって
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって
$$S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy - \triangle\mathrm{OAB} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

別解 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$，$\mathrm{Q}(\sqrt{2},\ 0)$ とすると　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

また，定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ について，$x = \dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \sin\theta, \qquad \frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

したがって
$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta = \Big[\ \tan\theta - \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

よって
$$S = \triangle\mathrm{OPQ} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} \quad ■$$

2.2 2016 年 (工学部)

1 四面体 OABC の面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=8$，$\mathrm{AB}=7$ である．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 3 点 O，A，B の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 CH と α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2) の点 H に対して，線分 CH の長さを求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積 V_1 を求めよ．また，辺 OC の中点を D とし，さらに辺 OB 上に点 E を $\mathrm{AE}+\mathrm{ED}$ が最小となるようにとる．このとき，四面体 OAED の体積 V_2 を求めよ．

2 $s>0$，$t>0$ とする．正の数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は初項と第 2 項が $a_1=b_1=s$，$a_2=b_2=t$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2},\quad b_{n+2}=\sqrt{b_{n+1}b_n}$$

をみたすとする．次に答えよ．

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を s，t を用いて表せ．

(2) 自然数 n に対して，$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおく．数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し，一般項を求めよ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$d_n=\log b_n$ とおく．数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項を s の累乗と t の累乗を用いて表せ．ただし，対数は自然対数とする．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．

(5) $t=s$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ であるための必要十分条件であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a<0$，b を実数とする．楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と直線 $l: y=ax+b$ が異なる 2 個の共有点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ を持つとし，l に平行な直線 m が第 1 象限の点 A において C と接しているとする．次に答えよ．

(1) b の値の範囲を a を用いて表せ．

(2) 直線 m の方程式を a を用いて表せ．

(3) x_2-x_1 を a，b を用いて表せ．

(4) 三角形 APQ の面積 S を a，b を用いて表せ．

(5) b が (1) で求めた範囲を動くとき，(4) で求めた S の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ および点 $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ がある．x 軸に関して点 P と対称な点を Q とし，2 点 P，A を通る直線を l，2 点 O，Q を通る直線を m とする．次に答えよ．ただし，O は原点を表す．

(1) $\sqrt{3}\cos\theta>1$ を示せ．

(2) 直線 l の方程式と直線 m の方程式を θ を用いて表せ．

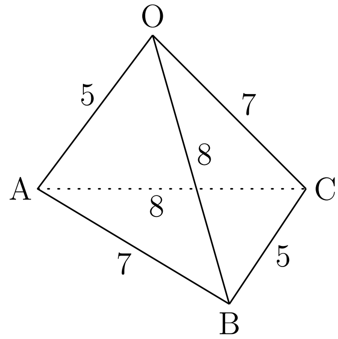
(3) 直線 l と直線 m の交点 R の座標を θ を用いて表せ．

(4) 三角形 PAQ の面積を S とする．θ が変化するとき，S の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) θ が (4) で求めた値をとるとき，2 直線 l，m および曲線 $x^2+y^2=3$ $(x \geqq \sqrt{3}\cos\theta)$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$　(1) 余弦定理により



$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$$
$$\cos\angle\mathrm{BOC} = \frac{\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}$$
$$\cos\angle\mathrm{COA} = \frac{\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}(\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2)\\
&= \frac{1}{2}(5^2+8^2-7^2) = \mathbf{20}\\
\vec{b}\cdot\vec{c} &= \mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\angle\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}(\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2)\\
&= \frac{1}{2}(8^2+7^2-5^2) = \mathbf{44}\\
\vec{c}\cdot\vec{a} &= \mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{COA} = \frac{1}{2}(\mathrm{OC}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{CA}^2)\\
&= \frac{1}{2}(7^2+5^2-8^2) = \mathbf{5}
\end{aligned}$$

(2) x，y を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$$

このとき，$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ より

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}) &= 0 \qquad & \vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}) &= 0\\
x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a} &= 0 \qquad & x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0
\end{aligned}$$

上の 2 式に $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=8$，および (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}
25x+20y-5 &= 0 \qquad & 20x+64y-44 &= 0\\
5x+4y &= 1 \qquad & 5x+16y &= 11
\end{aligned}$$

これを解いて　$x = -\dfrac{7}{15}$，$y = \dfrac{5}{6}$　よって　$\overrightarrow{\mathbf{OH}} = -\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}\vec{\boldsymbol{a}}+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{b}}$

(3) (1),(2) の結果から，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{CH}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} &= \left(-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} \\ &= -\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = -\vec{c}\cdot\left(-\frac{7}{15}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}\right) \\ &= \frac{7}{15}\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2 = \frac{7}{15}\cdot 5-\frac{5}{6}\cdot 44+7^2 = \frac{44}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{CH}=\sqrt{\dfrac{44}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{33}}{3}}$

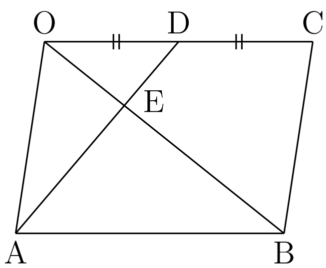
(4) $\triangle$OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot 8^2-(20)^2}=10\sqrt{3}$$

よって　　$V_1=\dfrac{1}{3}S\times\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{33}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{20\sqrt{11}}{3}}$

右の図の展開図において，OA = BC = 5，AB = OC = 7 であるから，四角形 OABC は平行四辺形である．D は OC の中点，$\triangle$EDO $\backsim$ $\triangle$EAB より

$$\mathrm{OE}=\frac{1}{3}\mathrm{OB}$$



ゆえに　　$\triangle\mathrm{OAE}=\dfrac{1}{3}S$

また，D から α までの距離は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{CH}$　　よって　$V_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}V_1=\boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{11}}{9}}$

補足 (1) の余弦定理により　　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$　■

$\boxed{2}$ (1) 与えられた漸化式から

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \boldsymbol{\frac{s+t}{2}}, \qquad a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{t + \frac{s+t}{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{s+3t}{4}}$$
$$b_3 = \sqrt{b_1 b_2} = \boldsymbol{\sqrt{st}}, \qquad b_4 = \sqrt{b_2 b_3} = \sqrt{t\sqrt{st}} = \boldsymbol{\sqrt[4]{st^3}}$$

(2) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$$

$\{c_n\}$ は初項が $c_1 = a_2 - a_1 = t - s$，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$c_n = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{(t-s)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$n \geqq 2$ のとき
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = s + (t-s)\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= s + (t-s) \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}t \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}s + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}t}$$

(3) $b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}b_n}$ の両辺の自然対数をとると

$$\log b_{n+2} = \frac{\log b_{n+1} + \log b_n}{2} \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{d_{n+1} + d_n}{2}$$

$d_1 = \log b_1 = \log s$，$d_2 = \log b_2 = \log t$ より，(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\log s + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log t \\ &= \log s^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} t^{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}} \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{b_n = s^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} t^{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}}$

(4) (2),(3) の結果から $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{s+2t}{3}}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \boldsymbol{\sqrt[3]{st^2}}$

(5) $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$，$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすると，$s > 0$，$t > 0$ より，$\alpha > 0$，$\beta > 0$

(4) の結果から　$\alpha^3 - \beta^3 = \dfrac{1}{27}(s-t)^2(s+8t)$

よって，$t = s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

別解 $s > 0$，$t > 0$ であるから，3 数 s，t，t の相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{s+t+t}{3} \geqq \sqrt[3]{stt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

上式において，等号が成立するのは，$s = t$ のときに限る．

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \implies s = t$

また，(4) の結果から，この逆は自明．

よって，$t = s$ は $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であるための必要十分条件である．

補足 $s > 0$，$t > 0$ に対して，$p > 0$，$q > 0$，$p + q = 1$ とすると

$$ps + qt \geqq s^p t^q$$

が成り立つ (等号が成立するのは $s = t$) ので，$p = \dfrac{1}{3}$，$q = \dfrac{2}{3}$ とおくと

$$\frac{1}{3}s + \frac{2}{3}t \geqq s^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{s+2t}{3} \geqq \sqrt[3]{st^2}$$

一般に，$a_k > 0$, $p_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ のとき

$$\boldsymbol{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \geqq {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき) [1]．

とくに，$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

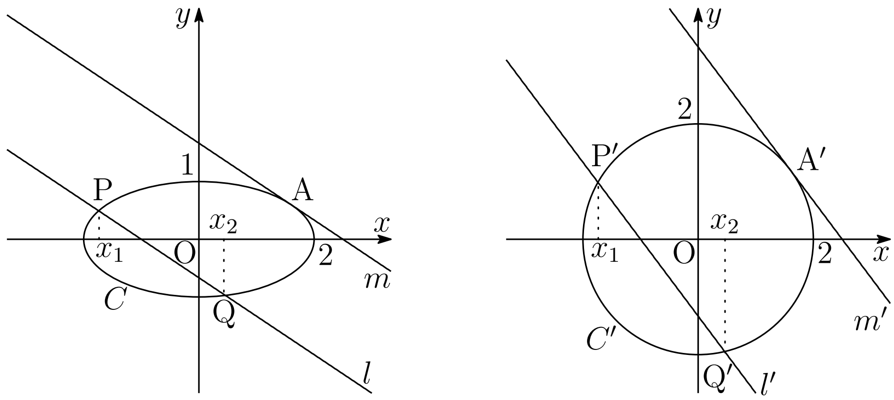
■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

3　(1) C，l を x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大した図形をそれぞれ

$$C' : x^2 + y^2 = 4, \quad l' : 2ax - y + 2b = 0$$

とする．また，これらの曲線上に 2 点 $\mathrm{P}'(x_1,\ 2y_1)$，$\mathrm{Q}'(x_2,\ 2y_2)$ をとる．



l' と C' が異なる 2 個の共有点を持てばよいので

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} < 2 \quad よって \quad \boldsymbol{-\sqrt{4a^2+1} < b < \sqrt{4a^2+1}}$$

(2) l' に平行な直線 m' が第 1 象限の点 A' において C' と接しているとする．このとき，(1) と同様にして

$$\frac{|2b|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 2 \qquad ゆえに \quad |b| = \sqrt{4a^2+1}$$

b の符号に注意して　$b = \sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$①　よって　$\boldsymbol{y = ax + \sqrt{4a^2+1}}$

(3) C' と l' の方程式から y を消去すると　$x^2 + (2ax + 2b)^2 = 4$

すなわち　$(4a^2+1)x^2 + 8abx + 4b^2 - 4 = 0 \quad \cdots(*)$

方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 = -\frac{8ab}{4a^2+1}, \quad x_1x_2 = \frac{4b^2-4}{4a^2+1} \quad \cdots(**)$$

したがって

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= \left(-\frac{8ab}{4a^2+1}\right)^2 - 4 \times \frac{4b^2-4}{4a^2+1} \\ &= \frac{16(4a^2 - b^2 + 1)}{(4a^2+1)^2}\end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ および (1) の結果に注意して　$\boldsymbol{x_2 - x_1 = \dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}}$

(4) (2) の結果から，m' の方程式は　$y = 2ax + 2\sqrt{4a^2+1}$　$\cdots$ ②

A$'$ の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 は $(*)$ の重解である．

このとき，① に注意して

$$x_0 = -\frac{8ab}{2(4a^2+1)} = -\frac{8a\sqrt{4a^2+1}}{2(4a^2+1)} = -\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

これを ② に代入することにより

$$y_0 = 2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right) + 2\sqrt{4a^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}}$$

よって，A$'\left(-\dfrac{4a}{\sqrt{4a^2+1}},\ \dfrac{2}{\sqrt{4a^2+1}}\right)$ から直線 $l' : 2ax - y + 2b = 0$ までの距離を d とすると，(1) の結果に注意して

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|2a\left(-\frac{4a}{\sqrt{4a^2+1}}\right) - \frac{2}{\sqrt{4a^2+1}} + 2b\right|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{2|\sqrt{4a^2+1} - b|}{\sqrt{4a^2+1}} = 2\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right) \end{aligned}$$

(3) の結果から

$$\begin{aligned} \mathrm{P'Q'} &= \sqrt{1+(2a)^2}\,|x_2 - x_1| = \sqrt{4a^2+1} \times \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1} \\ &= \frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}} = 4\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}} \end{aligned}$$

したがって

$$\triangle \mathrm{A'P'Q'} = \frac{1}{2}\mathrm{P'Q'}{\cdot}d = 4\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}}$$

$S = \dfrac{1}{2}\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ であるから

$$\boldsymbol{S = 2\left(1 - \frac{b}{\sqrt{4a^2+1}}\right)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2+1}}}$$

(5) (1) の結果から，$t = \dfrac{b}{\sqrt{4a^2+1}}$ とすると　$-1 < t < 1$

$f(t) = S^2$ とおくと　　$f(t) = 4(1-t)^2(1-t^2) = -4(t-1)^3(t+1)$

これを微分すると　　$f'(t) = -8(t-1)^2(2t+1)$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{27}{4}$	$\searrow$	

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

別解 (5) で求めた $f(t) = 4(1-t)^3(1+t)$ について，$-1 < t < 1$ であるから，$1-t > 0$，$1+t > 0$ より

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\left(\frac{1-t}{3}\right) + \frac{1}{4}(1+t) \geqq \left(\frac{1-t}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(1+t)^{\frac{1}{4}}$$

この両辺を4乗すると

$$\frac{1}{16} \geqq \frac{(1-t)^3(1+t)}{27} \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \leqq \frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき

$$\frac{1-t}{3} = 1+t \quad \text{すなわち} \quad t = -\frac{1}{2}$$

したがって，$f(t)$ は $t = -\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

よって，求める S の最大値は　$\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

補足 $1-t$，$1-t$，$1-t$，$3(1+t)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{3}{2} = \frac{3(1-t)+3(1+t)}{4} \geqq \sqrt[4]{(1-t)^3 \cdot 3(1+t)}$$

この両辺を4乗すると

$$\frac{81}{16} \geqq 3(1-t)^3(1+t) \quad \text{ゆえに} \quad f(t) \leqq \frac{27}{4}$$

上式において，等号が成立するとき　$1-t = 3(1+t)$　すなわち　$t = -\dfrac{1}{2}$

参考 S が最大となるとき，$\triangle \mathrm{A'P'Q'}$ は正三角形である．

一般に，円に内接する三角形の面積が最大となる三角形は正三角形である．実際，辺 BC に対し，直線 BC から最も遠くなるように A を取ると面積は最大になる。このとき，$\triangle \mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の鋭角二等辺三角形である．円の半径を R とし，$B = C = \theta$ とすると，$A = \pi - 2\theta$．このとき正弦定理により

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2R\sin\theta \quad \cdots ③$$

したがって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}(2R\sin\theta)^2\sin(\pi - 2\theta)$
$= 2R^2\sin^2\theta\sin 2\theta = 4R^2\sin^3\theta\cos\theta$

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\theta \geqq \left(\frac{\sin^2\theta}{3}\right)^{\frac{3}{4}}(\cos^2\theta)^{\frac{1}{4}}$$

両辺を平方して　$\dfrac{1}{16} \geqq \dfrac{\sin^3\theta\cos\theta}{3\sqrt{3}}$　ゆえに　$\sin^3\theta\cos\theta \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

上式において，等号が成立するのは

$$\frac{\sin^2\theta}{3} = \cos^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta = 3 \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

このとき $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ となる．したがって，円に内接する三角形は面積が最大となるとき正三角形である．このことに注意すると，二等辺三角形 $\mathrm{A'P'Q'}$ は面積が最大のとき正三角形であるから，$R = 2$ より

$$\mathrm{P'Q'} = 2\sqrt{3}$$

(4) で求めた $\mathrm{P'Q'} = 4\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4a^2+1}}$ と上式により

$$\frac{b^2}{4a^2+1} = \frac{1}{4}$$

$\mathrm{A'}$ は第 1 象限の点であるから，$b > 0$ のとき，二等辺三角形 $\mathrm{A'P'Q'}$ は鈍角三角形である．ゆえに $b < 0$ より

$$\frac{b}{\sqrt{4a^2+1}} = -\frac{1}{2}$$

■

4 (1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta < 1$ であるから

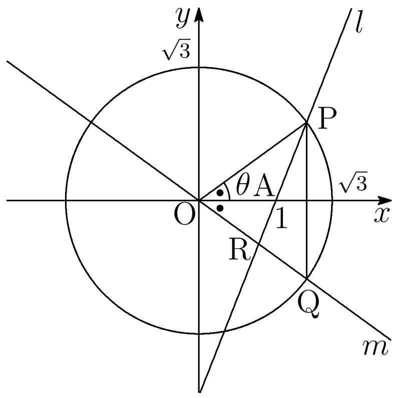
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{3}\cos\theta < \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad \sqrt{3}\cos\theta > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$$

(2) 2 点 P，A を通る直線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta - 1}(x-1)}$$

2 点 O，Q を通る直線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y = -(\tan\theta)x}$$



(3) (2) で求めた 2 直線 l，m の方程式から y を消去すると

$$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta - 1}(x-1) = -(\tan\theta)x \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{3}\cos\theta - 1} = -\frac{x}{\cos\theta}$$

(1) の結果に注意して　$x = \dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}$

これを m の方程式に代入して　$y = -\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{3}\cos\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}, -\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{3}\cos\theta - 1}\right)}$

(4) $\mathrm{PQ} = 2\sqrt{3}\sin\theta$ であり，A と直線 PQ との距離は　$\sqrt{3}\cos\theta - 1$

したがって　$S = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1) = \sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \sin\theta)$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{3}\{\sqrt{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \cos\theta\} \\ &= \sqrt{3}(2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\theta + 1)(2\cos\theta - \sqrt{3})\end{aligned}$$

S の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{4})$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

(5) (4) の結果から，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

また，このとき，(2),(3) の結果から

$$\mathrm{R}\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad l : y = \sqrt{3}(x-1), \quad m : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

2 つの領域 $x \geqq \dfrac{3}{2}$，$x^2 + y^2 \leqq 3$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{2\pi} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{(3-y^2) - \frac{9}{4}\right\} dy \\ &= \left[\,\frac{3}{4}y - \frac{1}{3}y^3\,\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$\triangle$PQR で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{2\pi} &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} x\left\{\sqrt{3}(x-1) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)\right\} dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} (4x^2 - 3x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\,\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\,\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

よって　　$V = V_1 + V_2 = 2\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{15\sqrt{3}}{32}\right) = \boldsymbol{\dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi}$

補足 以下の検算法がある (高校数学の範囲外のため答案には書かないこと).

$\angle$POQ を中心角とする扇形の半径を r，P の y 座標を a とすると，この扇形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_3 とすると [2]

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^2 a = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$\triangle$OPR の面積を T，重心の x 座標を h とし，これを y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_4 とすると

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad h = \frac{3}{4}, \quad V_4 = 2\pi Th = 2\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$

よって　　$V = V_3 - V_4 = 2\sqrt{3}\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{16}\pi = \dfrac{23\sqrt{3}}{16}\pi$　■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の $\boxed{1}$ を参照.

2.3　2017 年 (工学部・情報工学部)

1　関数 $f(x) = x(x^2+1)e^{-x^2}$ について，次に答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $g(t) = t^2 e^{-t}$ の増減を調べ，$t > 1$ のとき $g(t) < 1$ であることを示せ．

(2) $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対して，$x > 1$ のとき $x^k e^{-x^2} < \dfrac{1}{x^{4-k}}$ が成立することを示し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x^2} = 0$ を示せ．

(3) 関数 $y = f(x)$ について，増減および漸近線に注意して，そのグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(4) $s \geqq 0$ に対して，定積分 $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(x)\,dx$ を計算し，$\displaystyle\lim_{s\to\infty} F(s)$ を求めよ．

2　座標平面上で，曲線

$$x = \theta - \sin\theta,\quad y = 1 + \cos\theta \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

を C とする．次に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 $(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを示せ．

(3) $0 < \theta < \pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における曲線 C の接線と，点 $\mathrm{Q}(\theta + \pi - \sin(\theta + \pi),\ 1 + \cos(\theta + \pi))$ における曲線 C の接線が，垂直に交わることを示せ．

(4) (3) の 2 点を結んだ線分 PQ の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) (4) で求めた θ に対応する点 P，Q の x 座標を，それぞれ α，β とする．曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

3 a を実数とする．関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x) = \sin 2x + \left(\int_0^a g(t)\,dt\right)\sin x$$
$$g(x) = e^{-x}\left(-x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt\right)$$

をみたすとき，次に答えよ．

(1) $A = \displaystyle\int_0^a g(t)\,dt$，$B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくとき，B を A を用いて表せ．

(2) $f(x)$，$g(x)$ を a を用いて表せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = 0$ となるときの $\cos x$ の値を a を用いて表せ．

(4) $-2 \leqq a \leqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx$ を最小にする a の値を求めよ．

4 数 1 と数 2 の並びを考える．たとえば，1，2，1 の順の並びを (1, 2, 1) で表す．和が自然数 n となるような数 1 と数 2 の並びの集合を S_n と表し，S_n の要素の個数を a_n とする．たとえば，$n = 3$ のとき，$3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$ となるので，$S_3 = \{(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1)\}$，$a_3 = 3$ となる．次に答えよ．

(1) a_4 および a_5 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n で表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+2} - 2$ となることを示せ．

(4) S_{n+3} から並びを一つ選ぶとき，その並びの 1 番目の数が 1 となる確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ．

(5) S_{n+3} から並びを一つ選ぶとき，その並びの 2 番目の数が 2 となる確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ．

(6) S_{n+4} から並びを一つ選ぶ．選んだ並びの 2 番目の数が 2 であるとき，その並びの 1 番目の数が 1 である確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $g(t) = t^2e^{-t}$ を微分すると

$$g'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = t(2-t)e^{-t}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{2}{e}\right)^2$	$\searrow$

$g(2) < 1$ であるから，上の増減表より，$t > 1$ のとき，$g(t) < 1$

(2) $x > 1$ のとき，$t = x^2$ とおくと，$t > 1$ であるから，(1) の結果により

$$x > 1 \text{ のとき} \quad (x^2)^2e^{-x^2} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^ke^{-x^2} < \frac{1}{x^{4-k}}$$

$x > 1$ のとき，$0 < x^ke^{-x^2} < \dfrac{1}{x^{4-k}}$ であるから

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ に対して} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{4-k}} = 0$$

したがって，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^ke^{-x^2} = 0$

(3) $f(x) = x(x^2+1)e^{-x^2} = (x^3+x)e^{-x^2}$ より

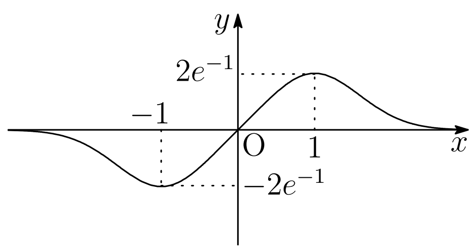
$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2+1)e^{-x^2} + (x^3+x)e^{-x^2}(-2x) \\ &= (-2x^4+x^2+1)e^{-x^2} \\ &= -(x+1)(x-1)(2x^2+1)e^{-x^2} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-2e^{-1}$	$\nearrow$	極大 $2e^{-1}$	$\searrow$

(2) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x) = \lim_{x\to\infty}\{-f(x)\} = 0$

漸近線は $y = 0$



(4) $t = x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

x	$0 \longrightarrow s$
t	$0 \longrightarrow s^2$

したがって

$$F(s) = \int_0^s f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^s (x^2+1)e^{-x^2}\cdot 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{s^2} (t+1)e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}\Big[\,(t+2)e^{-t}\,\Big]_0^{s^2}$$
$$= \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}(s^2+2)e^{-s^2}}$$

上式および (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{s\to\infty} \boldsymbol{F(s) = 1}$　■

2　(1) $x = \theta - \sin\theta$，$y = 1 + \cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$$

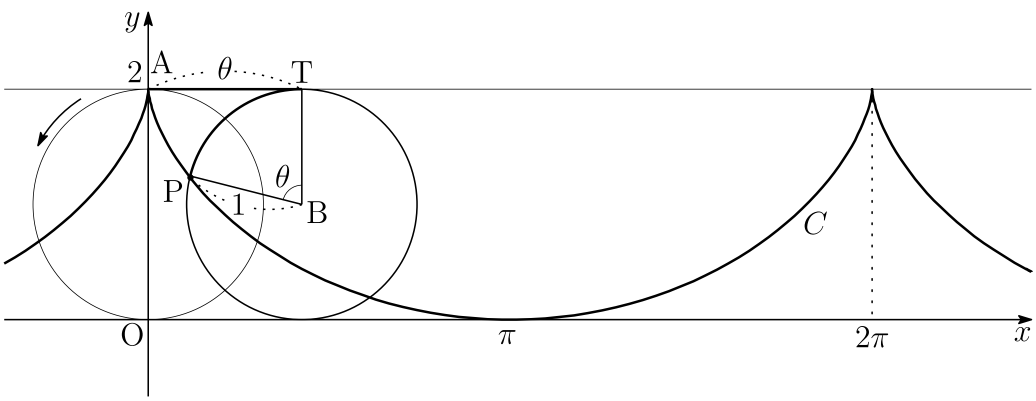
C 上の点 $(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における接線の方程式は

$$-\frac{dy}{d\theta}\{x - (\theta - \sin\theta)\} + \frac{dx}{d\theta}\{y - (1 + \cos\theta)\} = 0$$
$$\sin\theta\cdot(x - \theta + \sin\theta) + (1 - \cos\theta)(y - 1 - \cos\theta) = 0$$
$$\boldsymbol{(\sin\theta)x + (1 - \cos\theta)y - \theta\sin\theta = 0}$$

補足　下の図の半径1の円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 θ だけ回転したとき，円の中心を B，直線 $y = 2$ との接点を T とする．このとき，$\mathrm{AT} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}} = \theta$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ を θ だけ回転させたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}$



(2) $x = f(\theta) = \theta - \sin\theta$，$y = g(\theta) = 1 + \cos\theta$ とおくと $(0 < \theta < 2\pi)$

さらに，$\theta = f^{-1}(x) = h(x)$ とおくと　$y = g(h(x))$

したがって　$(*)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g'(h(x))h'(x), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = g''(h(x))\{h'(x)\}^2 + g'(h(x))h''(x) \end{cases}$

ここで，$x = f(h(x))$ であるから

$$\begin{cases} 1 = f'(h(x))h'(x) \\ 0 = f''(h(x))\{h'(x)\}^2 + f'(h(x))h''(x) \end{cases}$$

ゆえに　$(**)\begin{cases} 1 = f'(\theta)h'(x) \\ 0 = f''(\theta)\{h'(x)\}^2 + f'(\theta)h''(x) \end{cases}$

$(**)$ の第 1 式から　$h'(x) = \dfrac{1}{f'(\theta)}$　$\cdots$①

① を $(**)$ の第 2 式に代入することにより　$h''(x) = -\dfrac{f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$　$\cdots$②

$h(x) = \theta$ および ①，② を $(*)$ の第 2 式に代入して整理すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

このとき　$f'(\theta) = 1 - \cos\theta$　$g'(\theta) = -\sin\theta$

$f''(\theta) = \sin\theta$　$g''(\theta) = -\cos\theta$

$g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta) = 1 - \cos\theta$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{(1 - \cos\theta)^3} = \dfrac{1}{(1 - \cos\theta)^2} > 0$

よって，曲線 C は下に凸である．

別解　C 上の点 $(x,\ y) = (f(\theta),\ g(\theta))$ における接ベクトルは $(f'(\theta),\ g'(\theta))$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(\theta)}{f'(\theta)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right\}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{1}{f'(\theta)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(\theta)} = \frac{g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

(3) C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(\theta),\ g(\theta))$，$\mathrm{Q}(f(\theta+\pi),\ g(\theta+\pi))$ における接ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とすると

$$\vec{u} = (f'(\theta),\ g'(\theta)) = (1-\cos\theta, -\sin\theta)$$
$$\vec{v} = (f'(\theta+\pi),\ g'(\theta+\pi)) = (1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

このとき　$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta) + (-\sin\theta)\sin\theta = 0$

よって，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線は垂直に交わる．

(4) $\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$，$\mathrm{Q}(\theta+\pi+\sin\theta, 1-\cos\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\pi+2\sin\theta)^2 + (-2\cos\theta)^2 \\ &= 4\pi\sin\theta + \pi^2 + 4\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ において，PQ は $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最大値 $\sqrt{\pi^2+4\pi+4} = \boldsymbol{\pi+2}$

(5) (4) の結果から，$\alpha = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta = f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$．求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_\alpha^\beta y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2\theta\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

■

3 (1) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x) = \sin 2x + \left(\int_0^a g(t)\,dt\right)\sin x$$
$$g(x) = e^{-x}\left(-x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt\right)$$

をみたすとき，$A = \displaystyle\int_0^a g(t)\,dt$，$B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ より (a は実数)

$$f(x) = \sin 2x + A\sin x,\quad g(x) = e^{-x}(-x+B)$$

したがって　$B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t + A\sin t)\,dt$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2t - A\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{A+1}$$

(2) (1) と同様に　$A = \int_0^a g(t)\,dt = \int_0^a e^{-t}(-t+B)\,dt$

$$= \Big[\, e^{-t}(t-B+1) \,\Big]_0^a = e^{-a}(a-B+1)+B-1$$

上式に (1) の結果を代入すると

$$A = e^{-a}(a-A)+A \quad \text{ゆえに} \quad A = a,\ B = a+1$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \sin 2x + a\sin x,\quad g(x) = e^{-x}(-x+a+1)}$

(3) (2) の結果から

$$f(x) = 2\sin x\cos x + a\sin x = 2\sin x\left(\cos x + \frac{a}{2}\right)$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = 0$ となる $\cos x$ の値は

$$\boldsymbol{-2 < a < 0} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{\cos x = -\frac{a}{2}}$$
$$\boldsymbol{a \leqq -2,\ 0 \leqq a} \text{ のとき} \quad \boldsymbol{\cos x} \text{ はない}$$

(4) $-2 \leqq a \leqq 0$ に対して，$\cos\theta = -\dfrac{a}{2}\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$0 \leqq x \leqq \theta \text{のとき } f(x) \geqq 0, \qquad \theta \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \text{のとき } f(x) \leqq 0$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x - a\cos x$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_0^a |f(x)|\,dx &= \Big[\, F(x) \,\Big]_0^\theta - \Big[\, F(x) \,\Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2F(\theta) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta - a\cos\theta\right) - \left(-\frac{1}{2} - a\right) - \frac{1}{2} \\
&= -\cos 2\theta - 2a\cos\theta + a \\
&= -2\cos^2\theta - 2a\cos\theta + a + 1 \\
&= -2\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 2a\left(-\frac{a}{2}\right) + a + 1 \\
&= \frac{a^2}{2} + a + 1 = \frac{1}{2}(a+1)^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

よって，上式を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a = -1}$　■

4 (1) $S_1 = \{(1)\}$，$S_2 = \{(1,\ 1),\ (2)\}$ より　$a_1 = 1$，$a_2 = 2$

S_{n+2} は S_{n+1} の要素の並びの先頭に 1 を付け加えた集合と S_n の要素の先頭に 2 を付け加えた集合の和集合であるから

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \cdots (*)$$

したがって

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$
$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = \mathbf{5}$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = \mathbf{8}$$

(2) $(*)$ より　$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(3) (2) の結果より　$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$

よって

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}(a_{i+2} - a_{i+1}) = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 2$$

(4) S_{n+3} の要素のうち，その並びの 1 番目が 1，2 である個数はそれぞれ a_{n+2}，a_{n+1} であるから，求める確率は

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}} = \boldsymbol{\frac{a_{n+2}}{a_{n+2} + a_{n+1}}}$$

(5) S_{n+3} の並びの 2 番目が 2 である個数は S_{n+1} の要素の並びの 2 番目に 2 を付け加えた集合の個数に等しいから，求める確率は

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} = \boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + a_{n+1}}}$$

(6) S_{n+4} から並びを一つ選ぶとき，選んだ並びの 2 番目の数が 2 である事象を A とすると，その確率 $P(A)$ は，(5) の結果から

$$P(A) = \frac{a_{n+2}}{a_{n+4}}$$

S_{n+4} から並びを一つ選ぶとき，選んだ並びの 1 番目の数が 1 である事象を B とすると，事象 $A \cap B$ の個数は，S_{n+1} の要素の先頭に 1，2 を付け加えたものであるから，a_{n+1} に等しい．したがって

$$P(A \cap B) = \frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$$

よって，求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+4}} \cdot \frac{a_{n+4}}{a_{n+2}} = \boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}}$$ ■

2.4　2018年(工学部・情報工学部)

1 a を正の実数とする．円 $C: x^2+y^2=1$ と曲線 $D: y=ax^2-1$ について，次に答えよ．

(1) a の値によらず，円 C と曲線 D の両方がつねに通る点の座標を求めよ．

(2) 円 C と曲線 D が (1) で求めた点以外で交点をもつとき，a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，(1) で求めた点以外の円 C と曲線 D の交点の座標を a を用いて表せ．

(4) (3) で求めた交点を通り，x 軸と平行な直線を ℓ とする．直線 ℓ と曲線 D で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) (4) で求めた立体の体積 V の最大値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

2 L を正の定数とする．3 以上の整数 n に対して，辺の長さの和が L である正 n 角形を P_n とし，P_n の面積を $S(n)$ とする．次に答えよ．

(1) P_n の外接円の中心から各辺に下ろした垂線の長さを h とする．h を L と n を用いて表せ．

(2) $S(n)$ を L と n を用いて表せ．

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，関数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ が単調増加であることを示せ．

(4) $S(n)$ と $S(n+1)$ の大小を比較せよ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$ を L を用いて表せ．

3 平面 α 上の $\triangle\mathrm{OAB}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする．次に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\sqrt{3}S$ を t，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて表せ．

(2) t を固定したとき，(1) で求めた式を $f(\theta)$ とする．$f(\theta)$ の最小値を t を用いて表せ．また，その最小値をとるときの θ の値を求めよ．

設問 (3)，(4) では，点 P が平面 α 上を動くものとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{x}$ とする．

(3) t および θ を固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ の最小値を t，$\cos\theta$ を用いて表せ．また，その最小値をとるときの $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) t，θ および $\vec{x}$ によらず，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2\geqq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$ が成り立つことを示せ．また，この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ．

4 人工知能ベンチャータウンにあるA社とB社は,「はい」か「いいえ」で答えられる質問に回答する知能ロボットを開発した．質問に対して，A社製のロボットは，$\frac{4}{5}$の確率で正しい答えを返し，$\frac{1}{5}$の確率で間違った答えを返す．B社製のロボットは，$\frac{1}{10}$の確率で正しい答えを返し，$\frac{9}{10}$の確率で間違った答えを返す．A社製のロボットが3体，B社製のロボットが3体，計6体のロボットがある．これらのロボットは外見では区別することができない．

ベンチャータウンの入口に，二股の分かれ道があり，一方の道はA社へ，もう一方の道はB社へ続いている．この入口に，6体の中から無作為に選ばれた1体のロボットが案内役として立っている．次に答えよ．

(1) 案内役ロボットに「あなたはA社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」である確率を求めよ．

(2) 案内役ロボットに「あなたはA社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，このロボットがA社製のロボットである確率を求めよ．

(3) 案内役ロボットに，無作為に選んだ一方の道を指しながら「この道はあなたを作った会社へ続く道ですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，指した道がA社へ続く道である確率を求めよ．

(4) 案内役ロボットが，(2)，(3)のどちらの質問に対しても「はい」と答えたとき，指した道がA社へ続く道である確率を求めよ．

(5) 残りの5体のロボットの中から無作為に選ばれた1体のロボットが入口にやってきた．これら2体のロボットに「あなたたちは同じ会社製のロボットですか？」と質問したところ，案内役ロボットは「はい」と答え，あとから来たロボットは「いいえ」と答えた．このとき，2体ともA社製のロボットである確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $D: y=ax^2-1$ が a の値によらず通る点は　$(0,-1)$

$C: x^2+y^2=1$ もこの点を通るから，求める点は　$\mathbf{(0,-1)}$

(2) C と D の方程式から x を消去すると

$$y=a(1-y^2)-1 \quad \text{整理すると} \quad a(y^2-1)+y+1=0$$

ゆえに　$(y+1)(ay-a+1)$　これを解いて　$y=-1,\ \dfrac{a-1}{a}$　$\cdots$①

共有点の y 座標に注意して　$-1<\dfrac{a-1}{a}\leqq 1$　よって　$\boldsymbol{a>\dfrac{1}{2}}$

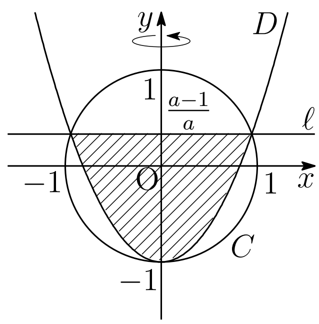
(3) 点 $(0,-1)$ 以外の C と D の共有点の y 座標は，① より　$y=\dfrac{a-1}{a}$

これを D の方程式に代入して

$$\frac{a-1}{a}=ax^2-1 \quad \text{ゆえに} \quad x=\pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{2a-1}}{a},\ \dfrac{a-1}{a}\right)}$

(4) D と ℓ で囲まれた部分は右の図の斜線部分で，y 軸に関して対称である．D の方程式から



$$x^2=\frac{y+1}{a}$$

よって，求める回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}}x^2\,dy=\frac{\pi}{a}\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}}(y+1)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{2a}\Big[\,(y+1)^2\,\Big]_{-1}^{\frac{a-1}{a}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2a^3}(2a-1)^2}$$

(5) (4) の結果から，$f(a) = \dfrac{\pi}{2}a^{-3}(2a-1)^2$ とおくと $\left(a > \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\pi}{2}\{-3a^{-4}(2a-1)^2 + a^{-3}\cdot 4(2a-1)\} \\ &= \frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)\{-3(2a-1)+4a\} = -\frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)(2a-3) \end{aligned}$$

したがって，$f(a)$ の増減表は次のようになる．

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，V は $\boldsymbol{a = \dfrac{3}{2}}$ のとき，最大値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{16}{27}\pi}$

解説 (1) で示したように，a の値によらず，点 $(0, -1)$ は C と D の共有点である．

$C : x^2 + y^2 = 1$ より $\quad (*) \begin{cases} 2x + 2yy' = 0, \\ 2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \end{cases}$

$D : y = ax^2 - 1$ より $\quad (**) \begin{cases} y' = 2ax, \\ y'' = 2a \end{cases}$

これらに共有点 $(0, -1)$ の座標を代入することにより

$$(*) \text{ から } y' = 0,\ y'' = 1, \qquad (**) \text{ から } y' = 0,\ y'' = 2a$$

したがって，共有点 $(0, -1)$ において，C と D の第 1 次導関数の値が等しいから，C と D は，$(0, -1)$ において **1 次の接触**をなす (共通接線をもつ)．

とくに，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，C と D の第 1 次・第 2 次導関数の値がともに等しいから，C と D は，$(0, -1)$ において **2 次の接触**をなす．このとき，C と D の点 $(0, -1)$ における接触円 (曲率円) が一致する [3]．

なお，y が x の関数であるとき，その曲率 κ は次式で与えられる [4]．また，曲率半径 R は曲率の逆数である

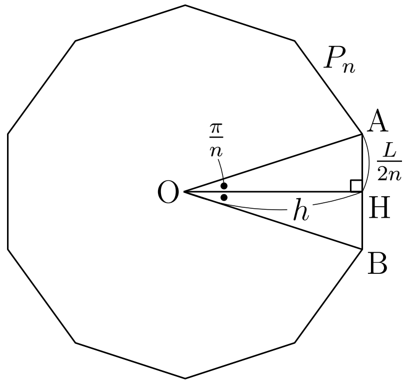
$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad R = \frac{1}{\kappa}$$

$y = ax^2 - 1$ の点 $(0, -1)$ における曲率および曲率半径は $\quad \kappa = 2a, \quad R = \dfrac{1}{2a}$

とくに，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，$R = 1$ となり，C の半径と一致する． ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2017.pdf (p.10 を参照)
[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf (p.8 を参照)

2 (1) 正 n 角形 P_n の 1 つの辺 AB に P_n の外心 O から垂線 OH を引くと



$$\angle\mathrm{AOH} = \frac{\pi}{n},\quad \mathrm{OH} = h,\quad \mathrm{AH} = \frac{L}{2n}$$

したがって　$h\tan\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{L}{2n}$

よって　$\boldsymbol{h = \dfrac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}}$

(2) △OAB の面積について，(1) の結果を利用すると

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}\qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{S(n) = \frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

(3) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ を微分すると $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$$

ここで，$g(x) = 2x - \sin 2x$ とおくと $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$g(0) = 0,\quad g'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(x) > 0$，すなわち，$f'(x) > 0$

よって，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加である．

(4) (2) の結果から　$S(n) = \dfrac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)}$　$\cdots(*)$

$\dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{n}$ であるから，(3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

よって，$(*)$ より　$\boldsymbol{S(n) < S(n+1)}$

(5) $x = \dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{x\to+0}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{f(x)}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\tan x}{x} = 1$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \boldsymbol{\frac{L^2}{4\pi}}$

補足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ は円 (半径 R) に収束するから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \pi R^2 = \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \frac{L^2}{4\pi}$ ■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=2\cdot1^2+2t^2-2\cdot1\cdot t\cos\theta=2+2t^2-2t\cos\theta,$$
$$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\sqrt{3}t\sin\theta$$

よって
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\sqrt{3}S$$
$$=2+2t^2-2t\cos\theta-2\sqrt{3}t\sin\theta$$
$$=\boldsymbol{2t^2+2-2t(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}$$

(2) (1) の結果から　$f(\theta)=2t^2+2-4t\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$ であるから，$f(\theta)$ は

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2(t-1)^2}$

(3)
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{x}-\vec{a}|^2+|\vec{x}-\vec{b}|^2$$
$$=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)\quad\cdots(*)$$

よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)}$

(4) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$ であるから，$(*)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}S$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(t^2-2t+1)+\frac{2}{3}t(2-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(t-1)^2+\frac{4}{3}t\left\{1-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\geqq0$$

よって
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2\geqq\frac{4\sqrt{3}}{3}S$$

等号が成立する場合は　$\boldsymbol{\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}),\ t=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{3}}$ ■

4 質問に対して A 社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ a, $\overline{a}$ とし，同様に B 社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ b, $\overline{b}$ とする ($a=\frac{8}{10}$, $\overline{a}=\frac{2}{10}$, $b=\frac{1}{10}$, $\overline{b}=\frac{9}{10}$).

(1) 案内役ロボットが A 社製，B 社製である確率は，ともに $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$
案内役ロボットが「はい」と答える確率は

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\overline{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{10}+\frac{9}{10}\right)=\boldsymbol{\frac{17}{20}}$$

(2) 案内役ロボットが「はい」と答えたとき，ロボットが A 社製である確率は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\overline{b}}=\frac{a}{a+\overline{b}}=\frac{\frac{8}{10}}{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}=\boldsymbol{\frac{8}{17}}$$

(3) 案内役ロボットがどちらか，指した道がどちらであるかにより，次の 4 つの場合がある．

(i) A 社製ロボットに A 社への道を指した
(ii) B 社製ロボットに A 社への道を指した
(iii) A 社製ロボットに B 社への道を指した
(iv) B 社製ロボットに B 社への道を指した

これらの確率は，すべて $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$
したがって，案内ロボットが「はい」と答える確率は

(i) のとき $\dfrac{1}{4}a$,　(ii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}$,　(iii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{a}$,　(iv) のとき $\dfrac{1}{4}b$

よって，指した道が A 社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\overline{b}}{\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\overline{b}+\frac{1}{4}\overline{a}+\frac{1}{4}b}=\frac{a+\overline{b}}{(a+\overline{a})+(b+\overline{b})}=\frac{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}{1+1}=\boldsymbol{\frac{17}{20}}$$

(4) 前問と同様に，(2)，(3) どちらの質問に対しても「はい」と答える確率は

(i) のとき $\dfrac{1}{4}a^2$,　(ii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}^2$,　(iii) のとき $\dfrac{1}{4}a\overline{a}$,　(iv) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}b$

よって，指した道が A 社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\overline{b}^2}{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}\overline{b}^2+\frac{1}{4}a\overline{a}+\frac{1}{4}\overline{b}b}=\frac{a^2+\overline{b}^2}{a(a+\overline{a})+\overline{b}(b+\overline{b})}=\frac{a^2+\overline{b}^2}{a+\overline{b}}$$

$$=\frac{\left(\frac{8}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{8}{10}+\frac{9}{10}}=\frac{8^2+9^2}{10(8+9)}=\boldsymbol{\frac{29}{34}}$$

(5) 案内役ロボットとあとから来たロボットの組合せとその確率は，次のようになる．

① 案内役が A 社製，後からきたのも A 社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

② 案内役が A 社製，後からきたのが B 社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

③ 案内役が B 社製，後からきたのが A 社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

④ 案内役が B 社製，後からきたのも B 社製のとき $\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

案内役ロボットは「はい」，あとから来たロボットが「いいえ」と答える確率は

①のとき $\frac{1}{5}a\overline{a}$,　②のとき $\frac{3}{10}\overline{a}b$,　③のとき $\frac{3}{10}\overline{b}a$,　④のとき $\frac{1}{5}b\overline{b}$

したがって，2 体とも A 社製のロボットである確率は

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{5}a\overline{a}}{\frac{1}{5}a\overline{a}+\frac{3}{10}\overline{a}b+\frac{3}{10}\overline{b}a+\frac{1}{5}b\overline{b}}&=\frac{2a\overline{a}}{2a\overline{a}+3\overline{a}b+3\overline{b}a+2b\overline{b}}\\&=\frac{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}}{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}\\&=\frac{2\cdot8\cdot2}{2\cdot8\cdot2+3\cdot2\cdot1+3\cdot9\cdot8+2\cdot1\cdot9}\\&=\frac{32}{272}=\boldsymbol{\frac{2}{17}}\end{aligned}$$

■

2.5　2019 年 (工学部・情報工学部)

1 k を正の実数とする．原点を O，曲線 $C: y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ と直線 $y = kx$ の交点を P，線分 OP の中点を Q とする．さらに，点 Q を通り y 軸と平行な直線と C の交点を R，点 Q を通り x 軸と平行な直線と C の交点を S とする．次に答えよ．

(1) 点 P の座標を k を用いて表せ．

(2) 点 P における曲線 C の接線と直線 RS は平行であることを示せ．

(3) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形の面積は k の値によらず一定になることを示せ．

(4) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を k を用いて表せ．

2 n を自然数とする．$f(x)$ と S_n を次のように定める．

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

次に答えよ．

(1) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ．

(3) 数列 $\{S_n\}$ は発散することを示せ．ただし，自然数 k に対して，$k \leqq x$ のとき，$\sqrt{k^2+1} \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを用いてよい．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n)$ を求めよ．ただし，自然数 k に対して，$k-1 \leqq x \leqq k$ のとき，$\sqrt{x^2+1} \leqq \sqrt{k^2+1} \leqq \sqrt{(x+1)^2+1}$ が成り立つことを用いてよい．

3 a を正の実数とし，複素数平面上の4点 O(0)，A$(6+4i)$，B$(8-2i)$，C$(-2ai)$ を4頂点とする四角形 OABC を考える．四角形 OABC の各辺を1辺とする4つの正方形を四角形 OABC の外側に作る．正方形において，2本の対角線の交点をその正方形の重心という．辺 OA を1辺とする正方形の重心を P，辺 AB を1辺とする正方形の重心を Q，辺 BC を1辺とする正方形の重心を R，辺 CO を1辺とする正方形の重心を S とする．次に答えよ．

(1) 原点を中心として，点 A を反時計回りに90度回転させて得られる点を表す複素数を求めよ．

(2) 点 P および点 Q を表す複素数をそれぞれ求めよ．また，点 R および点 S を表す複素数をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) 線分 QS の長さを a を用いて表せ．

(4) 線分 PR と線分 QS の長さの比を求めよ．

(5) どのような正の実数 a に対しても，2直線 PR，QS は垂直であることを示せ．

4 箱 A と箱 B がある．はじめに，どちらの箱にも白玉2個と黒玉1個が入っている．次に答えよ．

(1) 箱 A から無作為に1個の玉を取り出し，色を確認し，箱 A に戻す．この試行を3回行うとき，白玉を2回，黒玉を1回取り出す確率を求めよ．

(2) 箱 A と箱 B から無作為に1個ずつ玉を同時に取り出し，箱 A から取り出した玉を箱 B に，箱 B から取り出した玉を箱 A に入れる．このとき，箱 A の中身が白玉1個と黒玉2個である確率 P_1，箱 A の中身が白玉2個と黒玉1個である確率 P_2，箱 A の中身が白玉3個である確率 P_3 をそれぞれ求めよ．

(3) (2) の試行を2回続けて行う．すなわち，(2) の試行を行い，箱の中身をそのままにして，(2) の試行をもう1回行う．このとき，1回目で箱 A の中身が白玉3個になり，かつ2回目で箱 A の中身が白玉2個と黒玉1個になる確率を求めよ．

(4) (2) の試行を2回続けて行う．このとき，箱 A の中身が白玉2個と黒玉1個である確率を求めよ．

(5) (2) の試行を2回続けて行ったとき，箱 A の中身が白玉2個と黒玉1個であった．このとき，1回目の試行の後で，箱 A の中身が白玉2個と黒玉1個である条件付き確率を求めよ．

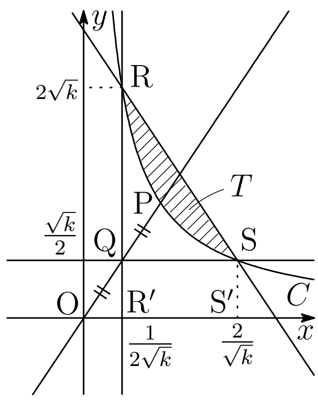
解答例

1 (1) $C: y=\dfrac{1}{x}$ と $y=kx$ から y を消去すると

$$\frac{1}{x}=kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2=\frac{1}{k} \quad x>0\ \text{に注意して} \quad x=\frac{1}{\sqrt{k}}$$

これを C の方程式に代入して　$y=\sqrt{k}$　よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k}}\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k}\right)$ における C の接線の傾きは

$$y'=-\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}=-k \quad \cdots ①$$

線分 OP の中点 Q は　$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ \dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)$

C 上の点 R の x 座標が $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$，点 S の y 座標が $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ であるから

$$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right), \quad \mathrm{S}\left(\frac{2}{\sqrt{k}},\ \frac{\sqrt{k}}{2}\right)$$

直線 RS の傾きは　$\dfrac{\dfrac{\sqrt{k}}{2}-2\sqrt{k}}{\dfrac{2}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{2\sqrt{k}}}=-k \quad \cdots ②$

①，② より，点 P における曲線 C の接線と直線 RS は平行である．

(3) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形の面積を T とする．2 点 R，S から x 軸にそれぞれ垂線 RR′，SS′ を下ろし，台形 RR′S′S の面積を利用すると

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{k}+\frac{\sqrt{k}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)-\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\frac{dx}{x}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{k}}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{k}}-\Big[\log x\Big]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{15}{8}-2\log 2\end{aligned}$$

したがって，T は，k の値によらず一定である．

(4) 直線 RS は点 $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right)$ を通り，傾き $-k$ の方程式であるから

$$y-2\sqrt{k}=-k\left(x-\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)\quad \text{すなわち}\quad y=-k\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)$$

台形 RR′S′S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=k^2\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)^2dx\\&=\frac{k^2}{3}\left[\ \left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)^3\ \right]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{21}{8}\sqrt{k}\end{aligned}$$

曲線 C，2 直線 RR′，SS′ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると

$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{3}{2}\sqrt{k}$$

したがって，求める立体の体積を V とすると

$$V=V_1-V_2=\left(\frac{21}{8}\sqrt{k}-\frac{3}{2}\sqrt{k}\right)\pi=\boldsymbol{\frac{9}{8}\sqrt{k}\pi}$$

補足 台形 RR′S′S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は円錐台である．円錐台の上底の半径 a，下底の半径 b，高さ h について，その体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^h\left(\frac{b-a}{h}x+a\right)^2dx=\int_0^h\left\{\left(\frac{b-a}{h}\right)^2x^2+\frac{2a(b-a)}{h}x+a^2\right\}dx\\&=\left[\ \left(\frac{b-a}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}+\frac{a(b-a)}{h}x^2+a^2x\ \right]_0^h\\&=h\left\{\frac{1}{3}(b-a)^2+a(b-a)+a^2\right\}=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

上の円錐台の体積の公式に

$$a=\mathrm{RR'}=2\sqrt{k},\ b=\frac{\sqrt{k}}{2},\ h=\mathrm{R'S'}=\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{3}{2\sqrt{k}}$$

を代入すると

$$\frac{V_1}{\pi}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{k}}\left\{(2\sqrt{k})^2+2\sqrt{k}\cdot\frac{\sqrt{k}}{2}+\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2\right\}=\frac{21}{8}\sqrt{k}$$

■

2　(1) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ を微分すると

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int_1^{n+1} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \Big[\ \log f(x)\ \Big]_1^{n+1} \\ &= \log f(n+1) - \log f(1) \\ &= \boldsymbol{\log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) - \log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

(3) $k \leqq x \leqq k+1$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\,dx \geqq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

上式および (2) の結果から

$$S_n \geqq \log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) - \log(1+\sqrt{2})$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) = \infty$　よって　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \infty}$

(4) $\displaystyle S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\geqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &= \Big[\ \log f(x)\ \Big]_{n+1}^{2n+1} = \log\frac{f(2n+1)}{f(n+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\leqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &= \Big[\ \log f(x)\ \Big]_{n}^{2n} = \log\frac{f(2n)}{f(n)}\end{aligned}$$

したがって $\quad \log \dfrac{f(2n+1)}{f(n+1)} \leqq S_{2n} - S_n \leqq \log \dfrac{f(2n)}{f(n)}$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2n+1)}{f(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1+\sqrt{4n^2+4n+2}}{n+1+\sqrt{n^2+2n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}+\sqrt{4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = 2$$

はさみうちの原理により $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \log 2$

別解 $\displaystyle S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

自然数 k について $\quad \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} < \dfrac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &< \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_n^{2n} = \log 2, \\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &> \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_{n+2}^{2n+2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{n+2}^{2n+2} = \log \frac{2n+2}{n+2} \end{aligned}$$

したがって $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \log \frac{2n+2}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{2+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = \log 2$

上の諸式から，はさみうちの原理により $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \log 2$ ■

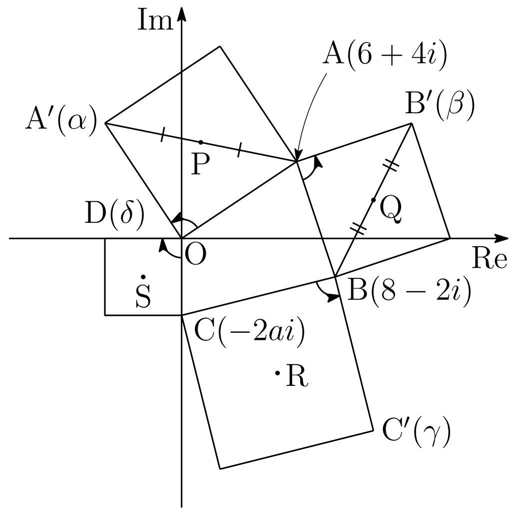
3 (1) 点 O を中心に点 A を $+90°$ 回転させた点を $\mathrm{A}'(\alpha)$ とすると

$$\alpha = (6+4i)i = \boldsymbol{-4+6i}$$

(2) 点 P は線分 AA' の中点であるから

$$\frac{(6+4i)+(-4+6i)}{2} = 1+5i$$

よって　　$\mathbf{P}(\boldsymbol{1+5i})$



点 A を中心に点 B を $+90°$ 回転させた点を $\mathrm{B}'(\beta)$ とすると

$$\frac{\beta-(6+4i)}{(8-2i)-(6+4i)} = i$$

これを解いて　$\beta = 12+6i$

点 Q は線分 BB' の中点であるから

$$\frac{(8-2i)+(12+6i)}{2} = 10+2i \quad \text{よって} \quad \mathbf{Q}(\boldsymbol{10+2i})$$

点 B を中心に点 C を $+90°$ 回転させた点を $\mathrm{C}'(\gamma)$ とすると

$$\frac{\gamma-(8-2i)}{-2ai-(8-2i)} = i \quad \text{これを解いて} \quad \gamma = 2a+6-10i$$

点 R は線分 CC' の中点であるから

$$\frac{-2ai+(2a+6-10i)}{2} = a+3-(a+5)i$$

よって　　$\mathbf{R}(\boldsymbol{a+3-(a+5)i})$

原点 O を中心に点 C を $-90°$ 回転させた点を $\mathrm{D}(\delta)$ とすると

$$\delta = (-2ai)(-i) = -2a$$

点 S は線分 CD の中点であるから

$$\frac{-2ai+(-2a)}{2} = -a-ai \quad \text{よって} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{-a-ai})$$

(3) 4 点 P，Q，R，S の座標をそれぞれ p, q, r, s とすると

$$s-q = (-a-ai)-(10+2i) = -(a+10)-(a+2)i$$

よって　$\mathrm{QS} = |s-q| = \sqrt{(a+10)^2+(a+2)^2} = \boldsymbol{\sqrt{2a^2+24a+104}}$

(4) (2) の結果から　$r-p = a+3-(a+5)i-(1+5i) = a+2-(a+10)i$

ゆえに　$\mathrm{PR} = |r-p| = \sqrt{(a+2)^2+(a+10)^2}$　　よって　$\mathbf{PR : QS = 1 : 1}$

(5) $\dfrac{s-q}{r-p}=\dfrac{-(a+10)-(a+2)i}{a+3-(a+5)i-(1+5i)}=\dfrac{-(a+10)-(a+2)i}{a+2-(a+10)i}=-i$

これが純虚数であるから，2 直線 PR，QS は垂直である． ■

4 (1) 箱 A から玉を 1 回取り出すとき，白玉である確率は $\dfrac{2}{3}$

よって，3 回取り出すとき，白玉をちょうど 2 回取り出す確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

(2) P_1 は箱 A から白玉，箱 B から黒玉を取り出す確率であるから

$$P_1=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

P_2 は箱 A，箱 B から同色の玉を取り出す確率であるから

$$P_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{5}{9}}$$

P_3 は箱 A から黒玉，箱 B から白玉を取り出す確率であるから

$$P_3=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

補足 $P_2=1-(P_1+P_3)=1-\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{5}{9}$

(3) 1 回目の試行後，箱 A の中身が白玉 3 個であるとき，箱 B の中身は白玉 1 個，黒玉 2 個である．さらに，2 回目の試行で箱 A から白玉，箱 B から黒玉を取り出す確率であるから

$$P_3\times 1\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{27}}$$

(4) 1 回目の試行後，箱 A の中身が白玉 1 個，黒玉 2 個であるとき，箱 B の中身は白玉 3 個である．さらに，2 回目の試行で箱 A から黒玉，箱 B から白玉を取り出す確率は

$$P_1\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{4}{27}$$

1 回目，2 回目の試行後，ともに箱 A の中身が白玉 2 個，黒玉 1 個である確率は

$${P_2}^2=\frac{25}{81}$$

これと (3) の結果から，求める確率を P とすると $P=\dfrac{4}{27}+\dfrac{4}{27}+\dfrac{25}{81}=\boldsymbol{\dfrac{49}{81}}$

(5) よって，求める条件つき確率は $\dfrac{{P_2}^2}{P}=\dfrac{25}{81}\cdot\dfrac{81}{49}=\boldsymbol{\dfrac{25}{49}}$ ■

2.6　2020 年 (工学部・情報工学部)

1 xy 平面上の曲線 $C: y = 2\log x$ と，実数 a によって定まる曲線 $D: y = x^2 + a$ を考える．曲線 C と曲線 D は点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通り，点 P における共通の接線 l をもつ．次に答えよ．

(1) 点 P の座標 $(p,\ q)$，実数 a の値，および接線 l の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C と曲線 D，および直線 $x = t\ (0 < t < p)$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{t \to +0} S(t)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ が成り立つことを用いてもよい．

(3) 曲線 C と曲線 D，および直線 $x = t\ (t > p)$ で囲まれた領域の面積 $T(t)$ を t を用いて表せ．また，関数 $f(t) = \dfrac{T(t)}{t^3}$ は区間 $t > p$ で増加することを示せ．

2 xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0, -\pi)$，点 $\mathrm{B}(0,\ \pi)$，および動点 P を考える．動点 P は時刻 0 では点 A にある．時刻 t における動点 P の座標を $(x(t),\ y(t))$ とすると，動点 P の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は，

$$y(t) \leqq 0 \text{ のとき} \quad \vec{v} = (a\cos b + \sin y(t),\ a\sin b)$$
$$y(t) > 0 \text{ のとき} \quad \vec{v} = \left(0,\ \frac{1}{2\pi b}\right)$$

で与えられる．ただし，実数 $a,\ b$ は $a > 0$，$0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす．次に答えよ．

(1) 動点 P が点 A から x 軸上の点に到達するまでの間の $y(t)$ を t，a，b を用いて表せ．

(2) 動点 P が点 A から x 軸上の点に到達するまでの間の $x(t)$ を t，a，b を用いて表せ．

(3) 動点 P が原点 O に到達するためにみたすべき条件を a と b を用いて表せ．

(4) 動点 P が時刻 T に点 B に到達した．時刻 T を b を用いて表せ．また，T の最小値とそのときの b を求めよ．

3 α，β は定めらた複素数とする．複素数平面上の点 z_1 に対して，z_n $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を以下の規則によって定める．

(規則)　$z_n = \alpha z_{n-1} + \beta$

点 z_1 として $z_1 = 3\sqrt{3} - 3i$ を選び，この規則を用いて z_2，z_3 を定めたところ，$z_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$，$z_3 = 3i$ となった．次に答えよ．

(1) z_1 と z_2 を通る直線と，z_2 と z_3 を通る直線を考える．この2直線のなす角 $\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

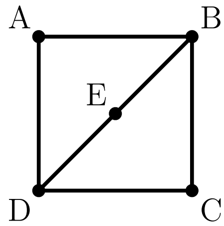
(2) α と β を求めよ．また，それぞれの絶対値，偏角も求めよ．

(3) 規則に示した z_n と z_{n-1} の関係を $z_n - \gamma = \alpha(z_{n-1} - \gamma)$ と表す．γ を求めよ．

(4) z_n を z_1，α および (3) の γ を用いて表せ．ただし，z_1，α および γ は記号のままで表せ．

(5) 複素数平面上の点 z_1 を選びなおし，規則を用いて z_5 を定めなおす．z_5 が $|z_5| < 1$ をみたすために z_1 がみたすべき条件を求めよ．また，その条件をみたす点 z_1 の全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{4}$ 右図のように，正方形 ABCD があり，対角線 BD の中点を E とする．時刻 $n=0$ において，点 P は頂点 A にあり，点 Q は頂点 C にある．時刻 $n=1,2,3,\cdots$ における点 P と点 Q の位置は，次の移動規則によって定まる．



- 点 P の移動規則
  時刻 $n-1$ における点 P の位置が頂点 A のときは，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で頂点 B か頂点 D に移動する．頂点 B または頂点 D のときは，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で頂点 A か頂点 C に移動する．頂点 C のときは，移動せずそのままとどまる．
- 点 Q の移動規則
  時刻 $n-1$ における点 Q の位置が頂点 C のときは，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 B に移動するか頂点 D に移動するか移動せずそのままとどまる．頂点 B または頂点 D のときは，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 A に移動するか点 E に移動するか移動せずそのままとどまる．頂点 A または点 E のときは，移動せずそのままとどまる．

次に答えよ．

(1) 時刻 $n=4$ における点 P の位置が頂点 C である確率を求めよ．

(2) 時刻 n における点 Q の位置が頂点 B である確率を求めよ．

(3) 時刻 n において，はじめて点 Q の位置が頂点 A となる確率を求めよ．

(4) 時刻 $n=4$ までに，少なくとも一度，同時刻に点 P と点 Q の位置が頂点 B となる確率を求めよ．

(5) 時刻 $n=4$ における点 P の位置が頂点 C であった．このとき，はじめて点 P の位置が頂点 C となった時刻より前に点 Q の位置が頂点 A となる条件付き確率を求めよ．

解答例

1 (1) $g(x)=2\log x$，$h(x)=x^2+a$ とおくと $g'(x)=\dfrac{2}{x}$，$h'(x)=2x$

2曲線 $C_1: y=g(x)$，$C_2: y=h(x)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で共通接線 l をもつから，l の傾きを m とすると，$q=g(p)=h(p)$，$m=g'(p)=h'(p)$ より

$$q=2\log p=p^2+a,\quad m=\frac{2}{p}=2p\quad\cdots(*)$$

$(*)$ の第2式から $(p>0)$ $\quad p=1,\ m=2$

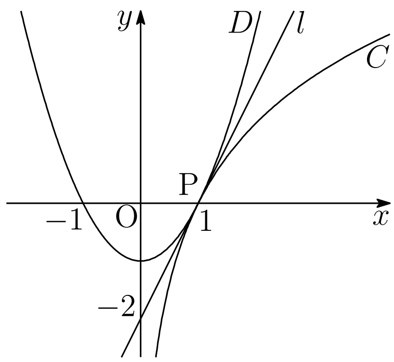
$p=1$ を $(*)$ の第1式に代入して

$$q=0=1+a \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=-1}$$

したがって $\quad$ **P(1，0)**

l は，P を通り，傾き2の直線であるから

$$y=2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x-2}$$



(2) $C: y=2\log x$，$D: y=x^2-1$ より，$0<t<1$ のとき

$$S(t)=\int_t^1 (x^2-1-2\log x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x-2x\log x\right]_t^1$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}-\frac{t^3}{3}-t+2t\log t}$$

ここで $\quad \displaystyle\lim_{t\to+0} t\log t=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\frac{1}{u}=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{\log u}{u}\right)=0$

よって $\quad \displaystyle\lim_{t\to+0} S(t)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{4}{3}-\frac{t^3}{3}-t+2t\log t\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(3) (2) と同様に，$t>1$ のとき

$$T(t)=\int_1^t (x^2-1-2\log x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x-2x\log x\right]_1^t$$
$$=\frac{t^3}{3}+t-2t\log t-\frac{4}{3},$$
$$f(t)=\frac{T(t)}{t^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{t^2}-\frac{2\log t}{t^2}-\frac{4}{3t^3}$$
$$f'(t)=-\frac{4}{t^3}+\frac{4\log t}{t^3}+\frac{4}{t^4}=\frac{4}{t^3}\left(-1+\log t+\frac{1}{t}\right)$$

$\varphi(t) = -1 + \log t + \dfrac{1}{t}$ とおくと $(t \geqq 1)$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} > 0 \quad (t > 1)$$

$\varphi(1) = 0$ であるから　$t \geqq 1$ において　$\varphi(t) \geqq 0$

したがって　$t > 1$ において　$f'(t) = \dfrac{4\varphi(t)}{t^3} > 0$

よって　$f(t)$ は区間 $t > 1$ で増加する　■

2 補足　与えられた条件より，$\dfrac{dy}{dt} > 0$ であるから，動点 P は y 軸の正の向きに運動する．$t = 0$ で $\mathrm{A}(0, -\pi)$ にあった点 P が $t = T_1$ 秒後に x 軸上の点に到達するものとすると，その後，P の x 軸方向の速度ベクトルが $\dfrac{dx}{dt} = 0$ であることから，y 軸と平行な向きに等速度 $\vec{v} = \left(0,\ \dfrac{1}{2\pi b}\right)$ で運動し，点 $\mathrm{B}(0,\ \pi)$ に到達する．すなわち，$t = T_1$ で P は原点 O を通過し，その後，P は y 軸上を等速度で点 B まで運動する．OB 間の移動に要する時間を T_2 とすると，P は $t = T$ $(T = T_1 + T_2)$ で B に到達する．

(1) 動点 P が点 A から x 軸上の点に到達するまで，y 軸方向の速度ベクトル

$$\frac{dy}{dt} = a \sin b$$

が一定であるから，これを t について積分すると

$$y(t) = at \sin b + C_1 \quad (C_1 \text{は積分定数})$$

$y(0) = -\pi$ であるから，これを上式に代入すると　$C_1 = -\pi$

よって　　$\boldsymbol{y(t) = at \sin b - \pi}$

(2) (1) の結果を $\dfrac{dx}{dt} = a \cos b + \sin y(t)$ に代入すると

$$\frac{dx}{dt} = a \cos b + \sin(at \sin b - \pi) = a \cos b - \sin(at \sin b)$$

これを t について積分すると

$$x(t) = at \cos b + \frac{\cos(at \sin b)}{a \sin b} + C_2 \quad (C_2 \text{は積分定数})$$

$x(0) = 0$ であるから，これを上式に代入すると　$C_2 = -\dfrac{1}{a \sin b}$

よって　$\boldsymbol{x(t) = at \cos b + \dfrac{\cos(at \sin b)}{a \sin b} - \dfrac{1}{a \sin b}}$

(3) $t=T_1$ で原点 O に到達するとき，(1)，(2) の結果から

$$aT_1\sin b-\pi=0,\quad aT_1\cos b-\frac{\cos(aT_1\sin b-\pi)}{a\sin b}-\frac{1}{a\sin b}=0$$

上の第 1 式から，$T_1=\dfrac{\pi}{a\sin b}\cdots$①．これを第 2 式に代入すると

$$\frac{\pi\cos b}{\sin b}-\frac{2}{a\sin b}=0\quad よって\quad \boldsymbol{a=\frac{2}{\pi\cos b}}$$

(4) $y(t)$ の符号に関係なく，$\dfrac{dy}{dt}>0$ であるから，$\mathrm{A}(0,-\pi)$ を出発した P が x 軸を通過し，その後の x 軸方向の速度ベクトルが $\dfrac{dx}{dt}=0$ であるから，y 軸と平行な向きに等速度 $\vec{v}=\left(0,\ \dfrac{1}{2\pi b}\right)$ で運動し，点 $\mathrm{B}(0,\ \pi)$ に到達する．すなわち，$t=T_1$ で P は原点 O を通過し，その後，P は y 軸上を等速度で点 B まで運動する．OB 間の移動に要する時間を T_2 とすると

$$\frac{1}{2\pi b}\cdot T_2=\pi\quad ゆえに\quad T_2=2\pi^2b$$

また，(3) の結果を ① に代入すると

$$T_1=\frac{\pi\cos b}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin b}=\frac{\pi^2}{2\tan b}$$

よって　$T=T_1+T_2=\dfrac{\pi^2}{2\tan b}+2\pi^2b=\boldsymbol{\pi^2\left(\dfrac{1}{2\tan b}+2b\right)}$

$f(b)=\dfrac{1}{2\tan b}+2b$ とおくと $\left(0<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(b)=-\frac{1}{2\sin^2 b}+2=\frac{4\sin^2 b-1}{2\sin^2 b}=\frac{(2\sin b+1)(2\sin b-1)}{2\sin^2 b}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$		↘	極小	↗	

よって，T は $\boldsymbol{b=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最小値 $\pi^2 f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\pi^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z_2 - z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i - (3\sqrt{3} - 3i) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$

$$= 3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_3 - z_2 = 3i - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \dfrac{3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって　$\theta = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

(2) 与えられた規則により　$z_2 = \alpha z_1 + \beta,\quad z_3 = \alpha z_2 + \beta$

$z_1 \neq z_2$ に注意してこれを解くと　$\alpha = \dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1},\quad \beta = \dfrac{{z_2}^2 - z_1 z_3}{z_2 - z_1}$

$${z_2}^2 - z_1 z_3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2 - (3\sqrt{3} - 3i)\cdot 3i$$

$$= -\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i = 9\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 9\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\frac{{z_2}^2 - z_1 z_3}{z_2 - z_1} = \frac{9\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

上の諸式および (1) の結果から

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \arg\alpha = \frac{\pi}{6}},$$

$$\boldsymbol{\beta = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ |\beta| = \sqrt{3},\ \arg\beta = \frac{2\pi}{3}}$$

(3) $\gamma = \alpha\gamma + \beta \cdots$ ① とおくと，(規則) と ① との辺々の差をとると，関係式

$$z_n - \gamma = \alpha(z_{n-1} - \gamma) \quad \cdots (*)$$

が得られるから，① を満たす γ を求めればよい．

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ より

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\beta}{1-\alpha} &= \frac{\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}} \\ &= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \boldsymbol{3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} \end{aligned}$$

(4) $(*)$ より，$\{z_n - \gamma\}$ は初項 $z_1 - \gamma$，公比 α の等比数列であるから

$$z_n - \gamma = \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{z_n = \gamma + \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma)}$$

(5) $w = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とおくと，(2)，(3) の結果から

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}w, \quad \beta = \sqrt{3}w^4, \quad \gamma = 3w^5$$

(4) の結果から

$$\begin{aligned} z_5 &= \gamma + \alpha^4(z_1 - \gamma) = 3w^5 + \frac{1}{9}w^4(z_1 - 3w^5) \\ &= \frac{1}{9}w^4(z_1 + 27w - 3w^5) \end{aligned}$$

ここで

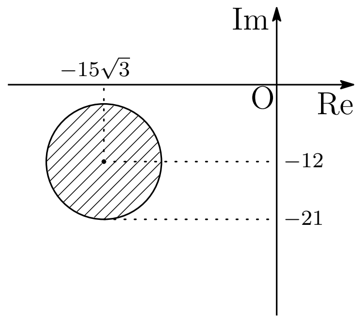
$$27w - 3w^5 = 27\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 15\sqrt{3} + 12i$$

$|z_5| < 1$ より

$$\frac{1}{9}|w^4||z_1 + 27w - 3w^5| < 1$$

ゆえに　$|z_1 + 15\sqrt{3} + 12i| < 9$

よって，点 z_1 は，$\boldsymbol{-15\sqrt{3} - 12i}$ を中心とする半径 **9** の円の内部にある．ただし，境界線は含まない．



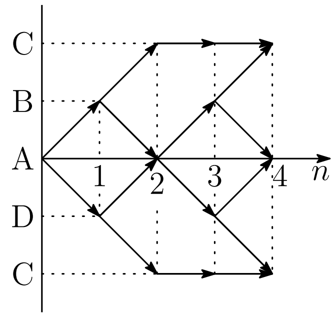
■

4 (1) 時刻 $n=4$ において，点 P は頂点 A または C にある．$n=4$ で点 P が頂点 A にある確率は

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$



(2) 点 Q が時刻 n で，頂点 B，C にある確率をそれぞれ b_n，c_n とすると，点 Q の移動規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$b_0=0,\quad c_0=1,\quad b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n,\quad c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから　$c_n=\frac{1}{3^n}$

これから　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n}$　したがって　$3^{n+1}b_{n+1}-3^nb_n=1$

$n\geqq 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(3^{k+1}b_{k+1}-3^kb_k)=n$　ゆえに　$b_n=\frac{n}{3^n}$

$n=0$ のときも成立するから　$b_n=\boldsymbol{\frac{n}{3^n}}$

(3) 時刻 n において，点 Q が頂点 D にある確率は，B と D の対称性により

$$b_n$$

時刻 n $(n\geqq 1)$ において，はじめて点 Q が頂点 A にある確率は，点 Q の移動規則により

$$b_{n-1}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{2(n-1)}{3^n}$$

$n=0$ のときは，その確率は 0 であるから，求める確率は

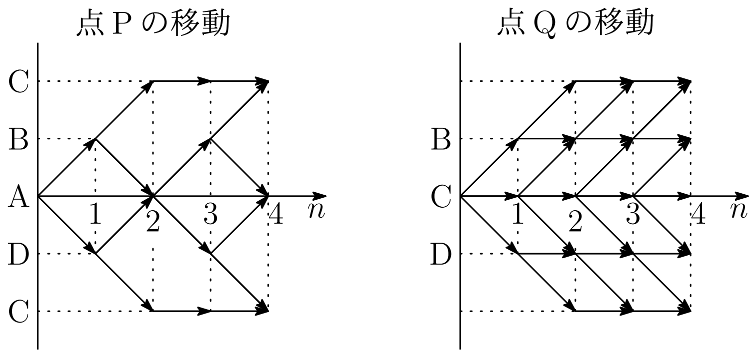
$$\boldsymbol{n=0\ \text{のとき}\ 0,\quad n\geqq 1\ \text{のとき}\ \frac{2(n-1)}{3^n}}$$

(4) 時刻 $n=4$ までに，同時刻に点 P と点 Q の位置が B であるのは，1 秒後と 3 秒後である．2 点 P，Q の位置が 1 秒後，3 秒後に B である事象を，それぞれ X，Y とすると，そのときの確率について

$$P(X) = \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P(Y) = \frac{1}{4}b_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{36}$$
$$P(X\cap Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

よって　$P(X\cup Y) = P(X)+P(Y)-P(X\cap B)$

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{36}-\frac{1}{216} = \mathbf{\frac{41}{216}}$$



(5) はじめて点 P の位置が頂点 C となるのは，2 秒後と 4 秒後であるが，2 秒後よりも前に点 Q の位置が頂点 A となることはない．4 秒後にはじめて点 P の位置が頂点 C にある確率は

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(3) で求めた確率を

$$q_n = \frac{2(n-1)}{3^n} \quad (n \geqq 1)$$

とおく．4 秒後に点 P の位置が頂点 C にある事象を S，はじめて点 P の位置が頂点 C となった時刻より前に点 Q の位置が頂点 A となる事象を T とすると，(1) の結果および上式における $n=2,\ 3$ の場合から

$$P(S) = \frac{3}{4},\quad P(S\cap T) = \frac{1}{4}(q_2+q_3) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{27}$$

よって，求める確率は　$P_S(T) = \dfrac{P(S\cap T)}{P(S)} = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{27}}{\frac{3}{4}} = \mathbf{\dfrac{10}{81}}$　■

情報工学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	九工大 情報工学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式					2					
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法				1						
III	式と曲線										
	複素数平面						3			3	3
	関数			2							
	極限		3					1	2		
	微分法とその応用	1	2·3	2	3	1·2	1	1·2	2		
	積分法					3		1·3		2	
	積分法の応用	3	1	1		1	2	2	1	1	1·2
A	場合の数と確率	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	整数の性質										
	図形の性質										
B	平面上のベクトル								3		
	空間のベクトル										
	数列		4		4	3		4			
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	2		3	2						

数字は問題番号 (2017 年以降は工学部と共通問題)

2.7　2015 年 (情報工学部)

1 関数 $f(x)=e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ について以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x)=0$ をみたす x の値をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x)$ の増減を調べよ．ただし，凹凸は調べなくてよい．

(3) 部分積分を 2 回用いて $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=e^{-x}$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

2 座標平面上に原点を中心とする半径 1 の円 $C : x^2+y^2=1$ と点 $\mathrm{A}(-1,-1)$，$\mathrm{B}(0,-1)$ があり，点 A を通る傾き k の直線 ℓ を考える．直線 ℓ は円 C と異なる 2 点で交わるものとし，点 A から遠い方の交点を P，近い方の交点を Q とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を k を用いて表せ．

(2) 点 P，Q の座標をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) 三角形 BPQ の面積を k を用いて表せ．

(4) 三角形 BPQ の面積を最大にする k を求めよ．

3 n を自然数とし，関数 $f_m(x)$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$f_m(x)=\begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$$

さらに，a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ を次のように定める．

$$a_k=\int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx$$

以下の問いに答えよ．

(1) a_0 と a_1 をそれぞれ n を用いて表せ．

(2) $k \geqq 1$ のとき，a_k を n，k，a_{k-1} を用いて表せ．

(3) a_k を n，k を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}$ を n を用いて表せ．

4 1から9までの数字が1つずつ書かれた9個の玉があり，これらのうち，1，2，3が書かれた玉をそれぞれ玉1，玉2，玉3と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) 9個の玉から3個を選んで1つの箱に入れる．この入れ方は何通りあるか．

(2) (1)の入れ方のうち，箱に，玉1と玉2がいっしょに含まれず，玉1と玉3もいっしょに含まれないものは何通りあるか．

(3) 9個の玉を区別できない3つの箱に分けて入れる．ただし，各箱にはそれぞれ3個ずつの玉を入れるものとする．この入れ方は何通りあるか．

(4) (3)の入れ方のうち，どの箱にも，玉1と玉2がいっしょに含まれず，玉1と玉3もいっしょに含まれないものは何通りあるか．

解答例

1 (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ より　$0 \leqq \sqrt{3}x \leqq 2\pi$

したがって，$f(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$$

(2) $f(x)=e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ を微分すると

$$f'(x) = -e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + \cos\sqrt{3}x) = -2e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$ であるから，$f'(x)=0$ をみたす x の値は

$$\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6} = \pi,\ 2\pi \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{5\pi}{6\sqrt{3}},\ \frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ における $f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{6\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

(3) $e^{-x} = -(e^{-x})'$ であることに注意して，部分積分を行うと

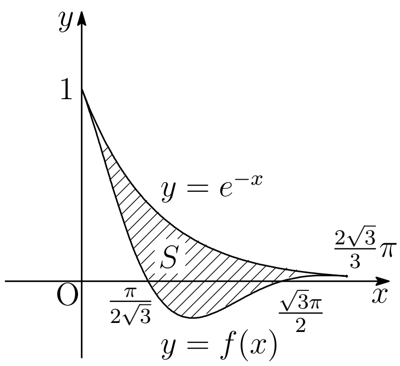
$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx &= -\int (e^{-x})'\cos\sqrt{3}x\,dx \\ &= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \int e^{-x}(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)\,dx \\ &= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\int (e^{-x})'\sin\sqrt{3}x\,dx \\ &= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x - 3\int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx \\ &= \frac{1}{4}e^{-x}(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x - \cos\sqrt{3}x) + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{6}\right) + C} \quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})\end{aligned}$$

(4) $e^{-x}-f(x)=e^{-x}-e^{-x}\cos\sqrt{3}x$

$$=e^{-x}(1-\cos\sqrt{3}x)\geqq 0$$



したがって，求める面積を S とすると，

(3) の結果を用いると

$$S=\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\{e^{-x}-f(x)\}\,dx$$

$$=\left[-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$

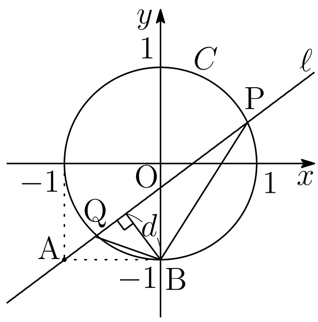
$$=\boldsymbol{\frac{3}{4}\left(1-e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}\right)}$$

■

2 (1) ℓ は，点 A$(-1,-1)$ を通り，傾き k の直線であるから

$$y+1=k(x+1)\quad すなわち\quad \boldsymbol{y=kx+k-1}$$

(2) (1) の結果から，P，Q は連立方程式



$$\begin{cases} kx-y=1-k & \cdots① \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

の解である．上の 2 式を等式

$$(kx-y)^2+(x+ky)^2=(k^2+1)(x^2+y^2)$$

に代入すると

$$(1-k)^2+(x+ky)^2=k^2+1\quad ゆえに\quad (x+ky)^2=2k$$

ℓ と C が異なる 2 点で交わるとき，右上の図より $k>0$ であるから

$$x+ky=\pm\sqrt{2k}\quad\cdots②$$

①，② を解いて　$x=\dfrac{k(1-k)\pm\sqrt{2k}}{k^2+1}$，$y=\dfrac{k-1\pm k\sqrt{2k}}{k^2+1}$　(複号同順)

P，Q の位置関係に注意して

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{k(1-k)+\sqrt{2k}}{k^2+1},\ \frac{k-1+k\sqrt{2k}}{k^2+1}}\right),$$

$$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{k(1-k)-\sqrt{2k}}{k^2+1},\ \frac{k-1-k\sqrt{2k}}{k^2+1}}\right)$$

(3) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \dfrac{2\sqrt{2k}}{k^2+1}(1,\ k)$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = \dfrac{2\sqrt{2k}}{k^2+1}\sqrt{1+k^2} = \dfrac{2\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2+1}}$

点 B$(0,-1)$ と直線 $\ell : kx - y + k - 1 = 0$ の距離 d は，$k > 0$ に注意して

$$d = \frac{|k\cdot 0 - 1 + k - 1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

△BPQ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2k}}{\sqrt{k^2+1}} \times \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}k^{\frac{3}{2}}}{k^2+1}}$$

(4) (3) の結果から　$\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{\sqrt{k}(k^2-3)}{\sqrt{2}(k^2+1)^2}$

したがって，$k > 0$ における S の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dk}$		$+$	0	$-$
S		↗	極大	↘

よって，求める k の値は　$\boldsymbol{k = \sqrt{3}}$　■

3 (1) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-1}^{1} f_0(1-x)f_n(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\cdot(1+x)^n\,dx \\
&= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n+1}} \\
a_1 &= \int_{-1}^{1} f_1(1-x)f_{n-1}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x)(1+x)^{n-1}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\{2-(1+x)\}(1+x)^{n-1}\,dx = \int_{-1}^{1}\{2(1+x)^{n-1}-(1+x)^n\}\,dx \\
&= \left[\frac{2}{n}(1+x)^n - \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^{n+1}}{n} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \boldsymbol{\frac{2^{n+1}}{n(n+1)}}
\end{aligned}$$

(2) $f_m(x) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ x^m & (m \geqq 1) \end{cases}$ より $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$

(i) $1 \leqq k < n$ のとき

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{-1}^{1} f_k(1-x)f_{n-k}(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x)^k(1+x)^{n-k} \\
&= \int_{-1}^{1}(1-x)^k\left\{\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right\}'dx \\
&= \left[(1-x)^k\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\{(1-x)^k\}'\frac{(1+x)^{n-k+1}}{n-k+1}dx \\
&= \frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{k-1}(1+x)^{n-(k-1)}dx \\
&= \frac{k}{n-k+1}\int_{-1}^{1} f_{k-1}(1-x)f_{n-(k-1)}(1+x)\,dx \\
&= \frac{k}{n-k+1}a_{k-1} \quad \cdots(*)
\end{aligned}$$

(ii) $k = n$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f_n(1-x)f_0(1+x) = \int_{-1}^{1}(1-x)^n\cdot 1\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)'\,dx \\
&= \Big[\ (1-x)^n(1+x)\ \Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\{(1-x)^n\}'(1+x)\,dx \\
&= n\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)\,dx \\
&= n\int_{-1}^{1} f_{n-1}(1-x)f_1(1+x)\,dx \\
&= na_{n-1}
\end{aligned}$$

上式より，$(*)$ は，$k = n$ のときも成り立つ.

よって，$k \geqq 1$ のとき

$$\boldsymbol{a_k = \frac{k}{n-k+1}a_{k-1}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，$k \geqq 0$ のとき $a_k > 0$ であるから

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k}{n-k+1}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{a_k}{a_{k-1}} &= \frac{k}{n-k+1}\\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} &= \frac{k-1}{n-k+2}\\ &\vdots\\ \frac{a_2}{a_1} &= \frac{2}{n-1}\\ \frac{a_1}{a_0} &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

上の諸式の辺々を掛け合わせると　$\dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{k!}{{}_n\mathrm{P}_k}$

ここで，${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_k}{k!}$ であるから　$\dfrac{a_k}{a_0} = \dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$

上式に (1) の結果を代入すると　$a_k = \dfrac{a_0}{{}_n\mathrm{C}_k} = \boldsymbol{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1){}_n\mathrm{C}_k}}$

(4) (3) の結果より，$\dfrac{1}{a_k} = \dfrac{(n+1){}_n\mathrm{C}_k}{2^{n+1}}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times 2^n = \boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) ${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{84}$ (通り)

(2) 玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれる場合の数は 7 (通り)
玉 1 と玉 3 がいっしょに含まれる場合の数は 7 (通り)
玉 1，玉 2，玉 3 の 3 個がいっしょに含まれる場合が 1 通りある．
よって，求める場合の数は

$$84 - (7 + 7 - 1) = \mathbf{71} \text{ (通り)}$$

(3) 9 個の玉を A，B，C の 3 つの箱に 3 個ずつ入れる場合の数は

$${}_9\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 84 \times 20 \text{ (通り)}$$

求める場合の数は，A，B，C の区別をなくせばよいので

$$\frac{84 \times 20}{3!} = \mathbf{280} \text{ (通り)}$$

(4) 玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \text{ (通り)}$$

玉 1 と玉 3 がいっしょに含まれる場合の数は

$$7 \times \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 70 \text{ (通り)}$$

玉 1，玉 2，玉 3 がいっしょに含まれる場合の数は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!} = 10 \text{ (通り)}$$

よって，求める場合の数は

$$280 - (70 + 70 - 10) = \mathbf{150} \text{ (通り)}$$

■

2.8 2016 年 (情報工学部)

1 座標平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s > 0,\ t > 0,\ st < 1)$ を考える．また，$u = st$ とする．点 P を通る曲線 C の 2 本の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，これらの接線と曲線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ とする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) a，b を s，t を用いて表せ．

(2) 2 点 $\mathrm{E}(a,\ 0)$，$\mathrm{F}(b,\ 0)$ を考える．台形 ABFE の面積を u を用いて表せ．

(3) △PAB の面積を u を用いて表せ．

(4) (3) で求めた △PAB の面積を $S(u)$ とする．$S(u)$ は区間 $0 < u < 1$ で減少することを示せ．

(5) 点 P が 2 点 $(3,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結ぶ線分上の端点以外にあるものとする．このとき，△PAB の面積が最小となる点 P の座標を求めよ．また，そのときの面積を求めよ．

2 原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする．円 C_1 に外接しながら，半径 1 の円 C_2 がすべることなく回転する．円 C_2 の中心を P とし，円 C_2 上の点 Q は最初，x 軸上の点 A(3, 0) にあるものとする．半直線 PQ 上で点 P からの距離が 2 の点を R とし，OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする．C_2 が回転して θ が 0 から 2π まで変化するとき，点 R が描く曲線を C とする．曲線 C の概形を図 1 に示す．以下の問いに答えよ．

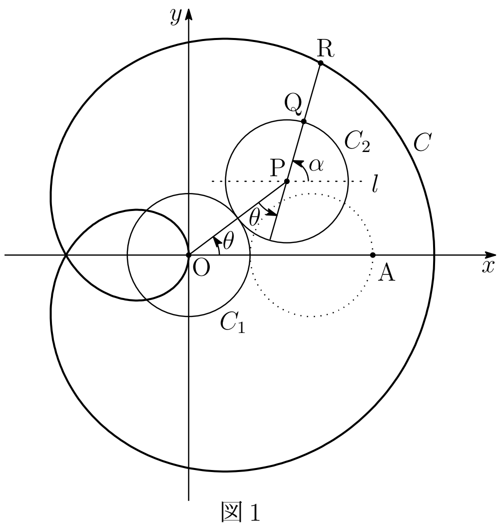


図 1

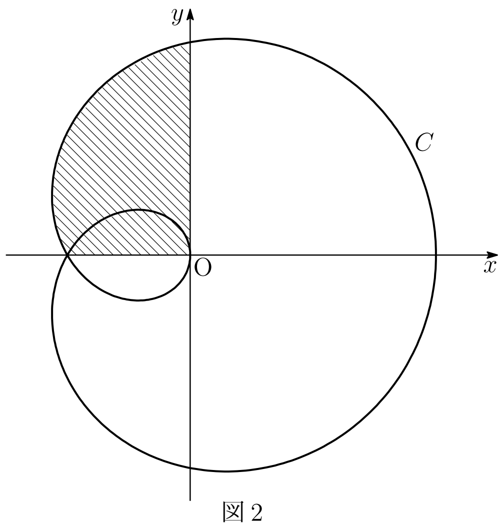


図 2

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 P を通り x 軸と平行な直線を l とする．直線 l と線分 PR のなす角 α を，θ を用いて表せ．また，R の座標を θ を用いて表せ．

(3) 曲線 C と x 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(4) 曲線 C と y 軸の共有点の座標をすべて求めよ．

(5) 点 R の x 座標が最小となるときの点 R の座標をすべて求めよ．

(6) 曲線 C と x 軸，y 軸に囲まれた図 2 の斜線部分の面積を求めよ．

3 複素数 z_n を

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_{n+2} = z_{n+1} + \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

により定める．ただし，i を虚数単位とし，$\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．また，複数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) z_2，z_3，z_4 を求めよ．

(2) 点 P_0，P_1，P_2，P_3，P_4 を図示せよ．また，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の長さ，および $\angle\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0$，$\angle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$，$\angle\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ の値も図中に示せ．

(3) $z_{n+1} - z_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を α と n を用いて表せ．

(4) z_n の実部，虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，x_n，y_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(5) (4) で求めた x_n，y_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ をそれぞれ求めよ．

4 はじめに，4 枚の硬貨 A，B，C，D が，表が上の状態で置かれている．これらの硬貨に対して以下の試行を繰り返すものとする．

試行：4 枚の硬貨のうち，裏が上の硬貨はそのままにし，
表が上の硬貨はすべて拾って同時に投げる．

ただし，すべての硬貨が，裏が上の場合も，0 枚の硬貨を拾って投げるとみなして，試行を繰り返すものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 硬貨 A が 3 回目の試行の後に表が上である確率を求めよ．

(2) 3 回目の試行の後，硬貨 A と B は表が上で，かつ，硬貨 C と D は裏が上である確率を求めよ．

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(4) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚であった．このとき，3 回目の試行に後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率を求めよ．

(6) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚であった．このとき，1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率を求めよ．

解答例

1 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

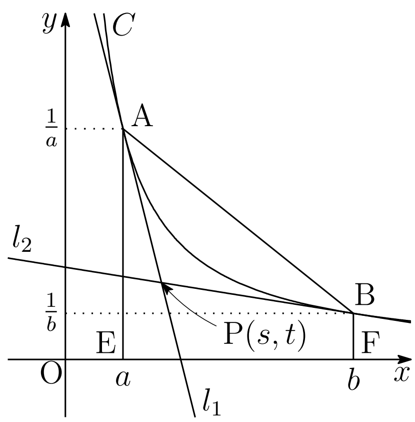
$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

ゆえに　$y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a}$

これが，$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るから

$$t=-\frac{1}{a^2}s+\frac{2}{a}$$



上式を a について，整理すると　$ta^2-2a+s=0$

$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ についても同様にして　$tb^2-2b+s=0$

上の2式から，a，b は λ に関する2次方程式

$$t\lambda^2-2\lambda+s=0 \quad \cdots(*)$$

の解であるから $(a<b)$，$t>0$，$st<1$ に注意して

$$\boldsymbol{a=\frac{1-\sqrt{1-st}}{t},\quad b=\frac{1+\sqrt{1-st}}{t}}$$

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係および (1) の結果から

$$a+b=\frac{2}{t},\quad ab=\frac{s}{t},\quad b-a=\frac{2\sqrt{1-st}}{t} \quad \cdots(**)$$

台形 ABFE の面積は，上式により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathrm{AE}+\mathrm{BF})\cdot\mathrm{EF}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}(b-a)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}\\&=\frac{2\sqrt{1-st}}{st}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{1-u}}{u}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \left(a-s,\ \dfrac{1}{a}-t\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \left(b-s,\ \dfrac{1}{b}-t\right)$ であるから $(a<b)$，
$(**)$ および $u=st<1$ により

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PAB} &= \frac{1}{2}\left|(a-s)\left(\frac{1}{b}-t\right)-(b-s)\left(\frac{1}{a}-t\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|s\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+t(b-a)-\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}(b-a)\left|\frac{s}{ab}+t-\frac{a+b}{ab}\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1-st}}{t}\left|s\cdot\frac{t}{s}+t-\frac{2}{t}\cdot\frac{t}{s}\right| \\
&= 2\sqrt{1-st}\left|1-\frac{1}{st}\right| = 2\sqrt{1-u}\left|1-\frac{1}{u}\right| \\
&= 2\sqrt{1-u}\cdot\frac{|u-1|}{u} = \boldsymbol{\frac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}}
\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$S(u) = \dfrac{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}{u}$
これを微分すると　$S'(u) = -\dfrac{(u+2)\sqrt{1-u}}{u^2}$
したがって，$0<u<1$ において　$S'(u)<0$
よって，$S(u)$ は区間 $0<u<1$ で減少する．

(5) 条件から，$\mathrm{P}(s,\ t)$ について　$\dfrac{s}{3}+t=1\ \ (0<t<1)$
すなわち　$s=3-3t\ (0<t<1)$
ゆえに　$u=st=(3-3t)t=-3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
したがって，u は，$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．
(3)，(4) の結果から，$\mathrm{P}\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)}$ で $\triangle\mathrm{PAB}$ は最小となり，最小値は

$$S\left(\frac{3}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

補足 $s>0$，$t>0$ であるから相加平均・相乗平均の関係により

$$1 = \frac{s}{3}+t \geqq 2\sqrt{\frac{s}{3}\cdot t} = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \quad よって \quad u \leqq \frac{3}{4}$$

等号が成立するのは　$\dfrac{s}{3}=t$　すなわち　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$　■

2 (1) $\mathrm{OP}=2$，OP と x 軸の正の向きとなす角が θ であるから

$$\mathbf{P(2\cos\boldsymbol{\theta},\ 2\sin\boldsymbol{\theta})}$$

(2) 線分 OP の P の延長と C_2 の交点を Q' とすると，直線 l と PQ' のなす角は θ であり，$\angle\mathrm{Q}'\mathrm{OQ}=\theta$ であるから

$$\alpha=\theta+\angle\mathrm{Q}'\mathrm{OQ}=\theta+\theta=\boldsymbol{2\theta}$$

$\mathrm{PR}=2$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}\\&=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)+(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)\\&=(2\cos\theta+2\cos 2\theta,\ 2\sin\theta+2\sin 2\theta)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{R(2\cos\boldsymbol{\theta}+2\cos 2\boldsymbol{\theta},\ 2\sin\boldsymbol{\theta}+2\sin 2\boldsymbol{\theta})}$

(3) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，(2) の結果から

$$y=2\sin\theta+2\sin 2\theta=4\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，$y=0$ を解くと　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$

これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (4,\ 0)$$

よって，求める x 軸との共有点の座標は

$$\mathbf{(4,\ 0),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 0)}$$

(4) (3) と同様に，(2) の結果から

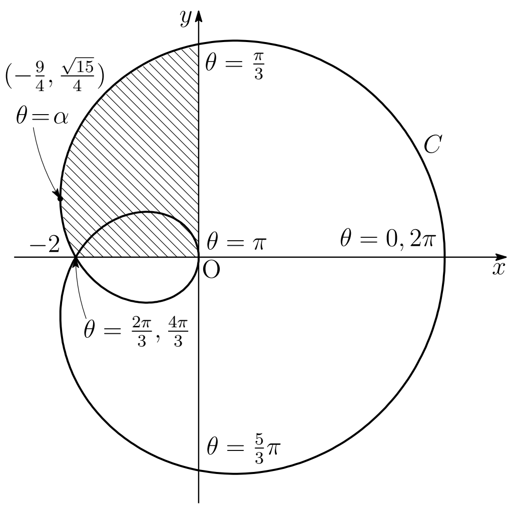
$$x=2\cos\theta+2\cos 2\theta=4\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，$y=0$ を解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの θ の値を順次，(2) の結果に代入すると

$$\mathbf{(0,\ 2\sqrt{3}),\ (0,\ 0),\ (0,-2\sqrt{3})}$$

(5) (2) の結果から



$$\begin{aligned}
x &= 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \\
&= 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\
&= 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 \\
&= 4\left(\cos\theta + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

点 R の x 座標が最小となるとき

$$\cos\theta = -\frac{1}{4}$$

このとき　$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos 2\theta = -\frac{7}{8}$，$\sin 2\theta = \mp\frac{\sqrt{15}}{8}$　(複号同順)

よって，求める座標は　$\boldsymbol{\left(-\frac{9}{4},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$

(6) よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{0} y\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta + 2\sin 2\theta)(2\cos\theta + 2\cos 2\theta)'\,d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\theta + \sin 2\theta)(\sin\theta + 2\sin 2\theta)\,d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2\theta + 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\sin^2 2\theta)\,d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\times\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + 2\times\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (6 + 6\cos\theta - 2\cos 2\theta - 6\cos 3\theta - 4\cos 4\theta)\,d\theta \\
&= \Big[\,6\theta + 6\sin\theta - \sin 2\theta - 2\sin 3\theta - \sin 4\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{2\pi}
\end{aligned}$$

補足 $S = \int_{-\frac{9}{4}}^{0} y\,dx - \int_{-\frac{9}{4}}^{-2} y\,dx = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

類題 長崎大学 (2009 年 $\boxed{7}$)[5] ■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2009.pdf

3 (1) 与えられた漸化式より

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\ (n=0,1,2,\cdots)\quad\cdots(*)$$

であるから

$$z_2-z_1=\alpha(z_1-z_0)=\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\quad\cdots①$$

$$z_3-z_2=\alpha(z_2-z_1)=\alpha^2=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$$

$$z_4-z_3=\alpha(z_3-z_2)=\alpha^3=\frac{1}{8}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{8}$$

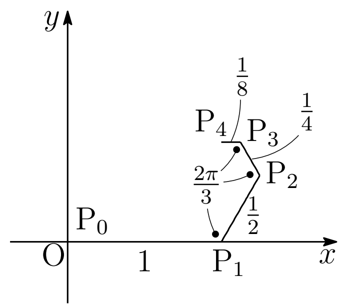
上の第 1 式と第 2 式，および上の 3 式の辺々を加えると

$$z_3-z_1=\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i,\quad z_4-z_1=\frac{3\sqrt{3}}{8}i$$

$z_1=1$ であるから，① および上の 2 式から

$$\boldsymbol{z_2=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i,\quad z_3=\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i,\quad z_4=1+\frac{3\sqrt{3}}{8}i}$$

(2) α は大きさが $\frac{1}{2}$，偏角が $\frac{\pi}{3}$ であるから，$(*)$ より，$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $\frac{1}{2}$ に縮小し，$\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたものである．$\mathrm{P}_0(0)$，$\mathrm{P}_1(1)$ であるから，P_2，P_3，P_4 を複素数平面上にとると，右の図のようになる．



(3) $z_0=0$，$z_1=1$，および $(*)$ より

$$z_{n+1}-z_n=\alpha^n(z_1-z_0)=\boldsymbol{\alpha^n}$$

(4) (3) の結果から，$n \geqq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k \quad \text{ゆえに} \quad z_n=\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ は $n=0$ についても成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}
\alpha^n &= \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\\
\alpha-1 &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-1=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
z_n &= \frac{\dfrac{1}{2^n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)-1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}i\right)\\
&\qquad\qquad -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\\
&= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2n-5}{6}\pi+i\sin\frac{2n-5}{6}i\right)+1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\\
&= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)i
\end{aligned}$$

$z_n=x_n+y_ni$ であるから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_n} &= \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\cos\frac{2n-5}{6}\pi+1}\\
\boldsymbol{y_n} &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2n-5}{6}\pi+1\right)}
\end{aligned}$$

(5) (4) の結果から　$|x_n-1| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$,　$\left|y_n-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

4 (1) 硬貨 A が 3 回続けて表が上の確率であるから　$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$

(2) それぞれの硬貨は 3 回目の試行の後，表が上である確率が $\frac{1}{8}$ であるから，それぞれの硬貨が 3 回目の試行の後，裏である確率は

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{49}{4096}}$

(3) 3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚の場合の総数は　${}_4C_2$ (通り)

よって，(2) の結果により　${}_4C_2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{147}{2048}}$

(4) 1 枚の硬貨が 2 回連続して表が上である確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

3 枚の硬貨について，2 枚が 2 回連続して表が上で，残りの 1 枚が裏が上の確率であるから

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{9}{64}}$$

(5) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 3 枚である確率は

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

これと (4) の結果により　$\frac{1}{4} \times \frac{9}{64} = \boldsymbol{\frac{9}{256}}$

(6) 1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$$

1 回目の試行の後に表が上の硬貨が 4 枚で，かつ，3 回目の試行の後に表が上の硬貨が 2 枚である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{2048}$$

(5) と以上の結果により，求める確率は　$\dfrac{\frac{9}{256}}{\frac{3}{128} + \frac{9}{256} + \frac{27}{2048}} = \boldsymbol{\frac{24}{49}}$

別解 (3)，(5) より　$\frac{9}{256} \div \frac{147}{2048} = \frac{24}{49}$ ■

第 3 章　福岡教育大学

中等教育 (数学専攻) 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	福岡教育大学	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式	1									
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明	1	1	1		1					
	複素数と方程式			1	1						1
	図形と方程式							2			
	三角関数			1	1		1				
	指数関数と対数関数	1				1·2		1	1	1	1
	微分法と積分法										
III	式と曲線		3	3							
	複素数平面						3		1		2
	関数										
	極限	4	4							3	
	微分法とその応用	4		4				3			
	積分法		1		4				4	1	
	積分法の応用	4		4		4	4	4		4	4
A	場合の数と確率	2	2*	2*	1		1	1	3	3	
	整数の性質						1	1	1	1	
	図形の性質										
B	平面上のベクトル				2	3			2	2	3
	空間のベクトル	3									
	数列	2			3	1	2				1
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		1								

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

3.1　2015 年

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ．

(2) a は正の定数で，$a \neq 1$ とする．不等式

$$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y$$

が表す領域を図示せよ．

(3) n は 3 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) x がすべての実数を動くとき，$2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする．次の (ア), (イ) に答えよ．

(ア) m の値を求め，$2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ．

(イ) $k > m$ のとき，$2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) a を定数とし，$a \leqq 2$ とする．方程式

$$4^x + 4^{-x} - 3a{\cdot}2^x - 3a{\cdot}2^{-x} + 2(a^2+1) = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

$\boxed{3}$ 平面上に $\triangle$ABC と点 O がある．$\triangle$ABC の内部に点 D があって，三角形の面積比が

$$\triangle\mathrm{DBC} : \triangle\mathrm{DCA} : \triangle\mathrm{DAB} = p : q : r$$

であるとする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 AD と辺 BC の交点を S，直線 BD と辺 AC の交点を T とするとき，BS : SC および CT : TA を p, q, r を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p+q+r}$ となることを示せ．

$\boxed{4}$ a を正の定数とし，曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3} - 1$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点を求めよ．

(3) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $\dfrac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2\cdot 2z = 1890x^4y^2z$ よって，求める係数は **1890**

(2) $$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \cdots (*)$$

$(*)$ において，真数は正であるから

$$a-x-y>0 \quad \text{かつ} \quad x>0 \quad \text{かつ} \quad y>0$$

すなわち $$x>0, \quad y>0, \quad x+y<a \quad \cdots ①$$

$(*)$ から $$\log_a(a-x-y) > \log_a xy \quad \cdots ②$$

i) $0<a<1$ のとき，② から

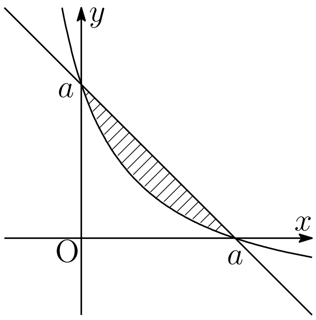
$$a-x-y<xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)>a+1$$

ii) $1<a$ のとき，② から

$$a-x-y>xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)<a+1$$

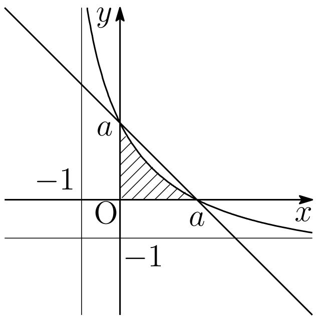
i)，ii) および ① から，求める領域は，次のようになる．

$0<a<1$ のとき



境界線を含まない

$1<a$ のとき



境界線を含まない

(3) $2^n > \dfrac{1}{2}n^2 + n \quad \cdots$ (A) とする．

［1］$n = 3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^3 = 8, \qquad (\text{右辺}) = \frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3 = \frac{15}{2}$$

よって，$n = 3$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$k \geqq 3$ として，$n = k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$2^k > \frac{1}{2}k^2 + k$$

が成り立つと仮定する．

$n = k + 1$ のとき，(A) の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \left\{\frac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)\right\} &= 2\cdot 2^k - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2}\right) \\ &> 2\left(\frac{1}{2}k^2 + k\right) - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 - 3) > 0 \end{aligned}$$

すなわち　　$2^{k+1} > \dfrac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)$

したがって，$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］,［2］から，3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ．■

$\boxed{2}$ (1) (ア)
$$2^x+2^{-x}=(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}})^2+2$$

$2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=0$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ のとき，最小値 m は **2**

(イ) $t=2^x$ とおくと，$2^x+2^{-x}=k\cdots$ ① より

$$t+\frac{1}{t}=k \quad \text{すなわち} \quad t^2-kt+1=0$$

$k>2$ に注意して，これを解くと　$t=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

ゆえに　$2^x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$　よって　$\boldsymbol{x=\log_2\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}}$

(2) 方程式 $4^x+4^{-x}-3a{\cdot}2^x-3a{\cdot}2^{-x}+2(a^2+1)=0\cdots(*)$ を変形すると

$$(2^x+2^{-x})^2-3a(2^x+2^{-x})+2a^2=0$$

① から　$k^2-3ak+2a^2=0$　ゆえに　$(k-a)(k-2a)=0$　$\cdots$②

(1) の結果より $k\geqq 2$ であるから，② の実数解は，$a\leqq 2$ に注意して

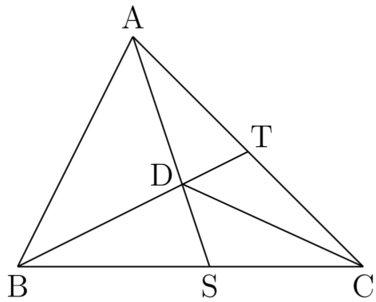
$2a<2$	すなわち	$a<1$ のとき	実数解はない
$2a=2$	すなわち	$a=1$ のとき	$k=2$
$a<2<2a$	すなわち	$1<a<2$ のとき	$k=2a$
		$a=2$ のとき	$k=2,\ 4$

① が実数解をもつのは，$k\geqq 2$ のときで，$k=2$ のとき実数解は1個，$k>2$ のとき実数解は2個であるから，方程式 $(*)$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a=1} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{1<a<2} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a=2} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

■

3 (1) 右の図から



$$\begin{aligned}\mathrm{BS}:\mathrm{SC} &= \triangle\mathrm{SAB}:\triangle\mathrm{SCA}\\ &= \triangle\mathrm{DAB}:\triangle\mathrm{DCA} = \boldsymbol{r}:\boldsymbol{q},\\ \mathrm{CT}:\mathrm{TA} &= \triangle\mathrm{TBC}:\triangle\mathrm{TAB}\\ &= \triangle\mathrm{DBC}:\triangle\mathrm{DAB} = \boldsymbol{p}:\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

(2) $\triangle$BCT および直線 AS について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AT}}\cdot\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r}{q}\times\frac{p+r}{r}\times\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}} = 1$$

したがって　　$\mathrm{TD}:\mathrm{DB} = q:p+r$

D は TB を $q:p+r$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(p+r)\overrightarrow{\mathrm{OT}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)} \qquad \cdots ①$$

T は CA を $p:r$ に内分する点であるから

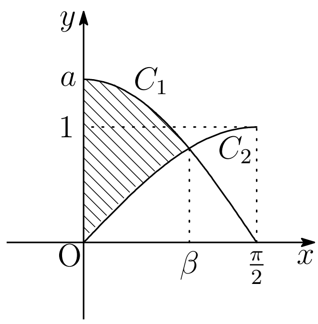
$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r} \qquad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(p+r)\cdot\dfrac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)} = \frac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p+q+r}$$

■

4 (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における2つの曲線を



$$C_1 : y = a\cos x,\quad C_2 : y = \sin x$$

とし，これらの交点の x 座標を β とすると

$$a\cos\beta = \sin\beta$$

ゆえに　$\sin\beta - a\cos\beta = 0$　$\cdots$①

右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^{\beta}(a\cos x - \sin x)\,dx = \Big[\ a\sin x + \cos x\ \Big]_0^{\beta}$$
$$= a\sin\beta + \cos\beta - 1$$

条件により，これが $\sqrt{3}-1$ に等しいから

$a\sin\beta + \cos\beta - 1 = \sqrt{3}-1$　ゆえに　$a\sin\beta + \cos\beta = \sqrt{3}$　$\cdots$②

次の等式

$$(\sin\beta - a\cos\beta)^2 + (a\sin\beta + \cos\beta)^2 = a^2+1$$

に①，②を代入すると

$$3 = a^2+1 \quad \text{このとき}, a>0 \text{により} \quad \boldsymbol{a = \sqrt{2}}$$

(2) $\begin{cases} y = \sqrt{2}\cos x & \cdots③ \\ y = \tan x & \cdots④ \end{cases}$ とおく．③，④から y を消去すると

$$\sqrt{2}\cos x = \tan x \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{2}\cos^2 x = \sin x$$

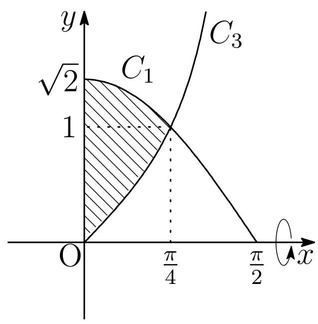
整理すると　$\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

したがって　$(\sin x + \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{\pi}{4}$

これを④に代入して　$y = 1$　よって，求める交点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)}$

(3) $C_3 : y = \tan x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．右の図から求める回転体の体積を V とすると



$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2 x - \tan^2 x)\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2\right)dx$$
$$= \pi\left[\ \frac{1}{2}\sin 2x - \tan x + 2x\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(\pi - 1)}$$

■

3.2　2016 年

1 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$\cos 2x + \cos x + 1 > 0$$

を満たす x の範囲を求めよ．

(2) $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(3) 正方形の各辺を n 等分した点から向かい合う辺に垂線を下ろす．このとき，正方形の 4 つの辺とこれらの垂線を利用してできる長方形のうち，正方形でないものの個数を n を用いて表せ．

2 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和をそれぞれ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

とおいたとき

$$s_n = \frac{3n^2+n}{2}, \quad \log_2(t_n+1) = 2n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

3 複素数 z は実部が $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，虚部は正で $|z|=1$ である．次の問いに答えよ．

(1) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ の値を求めよ．

(2) $1+z+z^2+z^3+z^4$ の値を求めよ．

(3) z の偏角 θ を求めよ．ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

4 a を正の定数とする．関数 $f(x)=ax-x\log x$ の最大値が1であるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および (2) で求めた接線によって囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ であるから，不等式 $\cos 2x + \cos x + 1 > 0$ は

$$(2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos x(2\cos x + 1) > 0$$

したがって　$\cos x < -\dfrac{1}{2},\quad 0 < \cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{\pi}{2},\quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < x \leqq 2\pi}$$

(2) $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ より　$(a^2+5)b = 3a^2 + 21$

したがって　$b = \dfrac{3a^2+21}{a^2+5} = 3 + \dfrac{6}{a^2+5} \quad \cdots (*)$

$a^2 + 5 \geqq 5$ は 6 の約数であるから　$a^2 + 5 = 6$

ゆえに　$a = \pm 1$　これを $(*)$ に代入して　$\boldsymbol{(a,\ b) = (\pm 1,\ 4)}$

(3) 正方形の一辺の長さを n とすると，一辺の長さが k の正方形の個数は

$$(n+1-k)^2 \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

であるから，その総数は

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

また，長方形の総数は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_2 \times {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

よって，求める個数は

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

■

2 (1) $a_1 = s_1$ であるから $a_1 = \dfrac{3\cdot1^2+1}{2} = 2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{3n^2+n}{2} - \frac{3(n-1)^2+(n-1)}{2} = 3n-1$$

これは，$n=1$ のときも成立するから $\boldsymbol{a_n = 3n-1}$

(2) $\log_2(t_n+1) = 2n$ より $t_n = 2^{2n}-1$

$b_1 = t_1$ であるから $b_1 = 2^2 - 1 = 3$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = t_n - t_{n-1} = (2^{2n}-1) - \{2^{2(n-1)}-1\} = 3\cdot2^{2n-2}$$

これは，$n=1$ のときも成立するから $\boldsymbol{b_n = 3\cdot2^{2n-2}}$

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ とおくと，(1),(2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 3\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot2^{2k-2} \qquad \cdots①$$

$$S_n = 3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot2^{2k} \qquad \cdots②$$

① × 4 − ② から

$$4S_n - S_n = 3\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot2^{2k} - 3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot2^{2k}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot2^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}(3k+2)\cdot2^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)\cdot2^{2k} + (3n-1)\cdot2^{2n} - \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)\cdot2^{2k} - 2 \\ &= (3n-1)\cdot2^{2n} - 2 - 3\sum_{k=1}^{n-1}2^{2k} \\ &= (3n-1)\cdot2^{2n} - 2 - 3\times\frac{4(2^{2n-2}-1)}{4-1} = (3n-2)\cdot2^{2n} + 2 \end{aligned}$$

$S_1 = a_1 b_1 = 2\cdot3 = 6$ であるから，上式は $n=1$ のときも成立する．

よって $\boldsymbol{S_n = (3n-2)\cdot2^{2n} + 2}$ ■

3 (1) z の実部が $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　$\cdots$①

$|z|=1$ より　$|z|^2=1$　ゆえに　$z\overline{z}=1$　すなわち　$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$　$\cdots$②

①，② から　$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって

$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\&=\mathbf{1}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を展開して整理すると

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2=0$$

両辺に z^2 を掛けると　$\boldsymbol{1+z+z^2+z^3+z^4=0}$

(3) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ であるから，(2) の結果から

$$z^5-1=0 \qquad ゆえに \qquad z^5=1$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1$$

したがって　$r^5=1$，$5\theta=2n\pi$　(n は整数)

すなわち　$r=1$，$\theta=\dfrac{2n\pi}{5}$　$\cdots$①

z の実部 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}>0$，条件から虚部は正であるから，$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

上式より，① を満たす整数 n は　$n=1$　よって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{2}{5}\pi}$　■

4 (1) $f(x)=ax-x\log x$ を微分すると $f'(x)=a-1-\log x$

$f'(x)=0$ とすると $x=e^{a-1}$

$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	e^{a-1}	$\searrow$

このとき，$f(x)$ の最大値が 1 であるから

$$e^{a-1}=1 \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{a=1}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)=x(1-\log x)$，$f'(x)=-\log x$

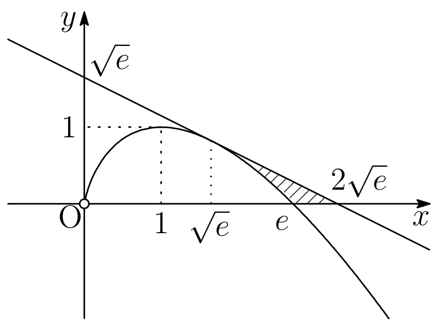
$f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ とすると

$$-\log x=-\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad x=\sqrt{e}$$

$f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$ より，求める接線は，点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{e}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{2}\sqrt{e}=-\frac{1}{2}(x-\sqrt{e}) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{e}}$$

(3) 曲線 $y=x(1-\log x)$ の x 軸との交点の x 座標は



$$1-\log=0 \quad \text{すなわち} \quad x=e$$

直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{e}$ の x 軸との交点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x+\sqrt{e}=0 \quad \text{すなわち} \quad x=2\sqrt{e}$$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(2\sqrt{e}-\sqrt{e})f(\sqrt{e})-\int_{\sqrt{e}}^{e}x(1-\log x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\sqrt{e}-\Bigl[\,x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right)\Bigr]_{\sqrt{e}}^{e}\\&=\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}e=\boldsymbol{\frac{1}{4}e(3-e)}\end{aligned}$$

■

3.3　2017 年

1 次の問いに答えよ．

(1) 実数 x，y は $\log_2 x + \log_2 y = 2$ を満たす．

(ア) $t = x + y$ とおく．$x^2 + y^2$ を t を用いて表せ．

(イ) $x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 11$ の最小値とそのときの x と y の値を求めよ．

(2) $23x + 13y = 5$ を満たす整数 x，y の組で $|x| + |y|$ が最小になるものを求めよ．

(3) 3 個のサイコロを同時に 1 回投げる．

(ア) 出る目の積が偶数である確率を求めよ．

(イ) 出る目の積が偶数であるとき，その出る目の和が 5 の倍数である確率を求めよ．

2 a を定数とし，曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ を C，直線 $y = a(x+1)$ を ℓ とする．C と ℓ が異なる 2 点で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) C と ℓ の 2 つの交点の x 座標を α，β とするとき $\alpha + \beta$，$\alpha\beta$ をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) C と ℓ の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ．

3 $P(x)$ を整式とし，整式 $Q(x)$ を $Q(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$ で定める．$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは 2 であった．次の問いに答えよ．

(1) $Q'(1)$ の値を求めよ．

(2) $Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 3 であった．$Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

4 a，b を正の定数とし，$f(x) = -xe^{-\frac{x}{a}}$ とする．$y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，さらに x 軸方向に $-a$ だけ平行移動して得られる曲線を $y = g(x)$ とし，$h(x) = bg(x)$ とする．また，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を P とし，点 P における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする．関数 $h(x)$ の最大値が 1 であるとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(2) 関数 $g(x)$ を a を用いて表せ．

(3) 定数 a，b の積 ab の値を求めよ．

(4) 直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標が 4 であるとき，曲線 $y = f(x)$，$y = h(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)(ア) $\log_2 x+\log_2 y=2$ より，$\log_2 xy=2$　ゆえに　$xy=4$

よって　　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\boldsymbol{t^2-8}$

(イ) $\log_2 x+\log_2 y=2$ の真数は正であるから　$x,\ y>0$

相加平均・相乗平均の関係により

$$t=x+y\geqq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{4}=4\quad (\text{等号は } x=y=2 \text{ のとき})$$

したがって

$$\begin{aligned}x^2+y^2+xy-6x-6y+11&=(t^2-8)+4-6(x+y)+11\\&=t^2-6t+7=(t-3)^2-2\end{aligned}$$

$t\geqq 4$ より，$t=4$，すなわち，$\boldsymbol{x=y=2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-1}$

(2) $23\equiv 10,\ 13\equiv 0 \pmod{13}$ であるから，$23x+13y=5$ より

$$10x\equiv 5\quad \text{ゆえに}\quad 2x\equiv 1\quad \text{すなわち}\quad x\equiv 7\pmod{13}$$

したがって　　$23(x-7)+13(y+12)=0$

整数 k を用いて　　$x=7+13k,\ y=-12-23k$

$k\geqq 0$ のとき，$|x|=x=7+13k,\ |y|=-y=12+23k$ であるから

$$|x|+|y|=19+36k$$

$k<0$ のとき，$|x|=-x=-7-13k,\ |y|=y=-12-23k$ であるから

$$|x|+|y|=-19-36k$$

$k=-1$ で，$|x|+|y|$ は最小となり，このとき　$\boldsymbol{x=-6,\ y=11}$

注意 $10x\equiv 5 \pmod{13}$ の両辺を5で割ることができるのは，5が13と互いに素であるから，$2x\equiv 1 \pmod{13}$ とすることができる．

$$10x\equiv 5\quad\Longleftrightarrow\quad 5(2x-1)\equiv 0\quad\Longleftrightarrow\quad 2x\equiv 1\pmod{13}$$

最後の式の両辺に7を掛けることにより (整数の掛け算には制約はない)

$$14x\equiv 7\quad \text{すなわち}\quad x\equiv 7\pmod{13}$$

なお，$10x\equiv 5 \pmod{13}$ の両辺に4を掛けても

$$40x\equiv 20\quad \text{すなわち}\quad x\equiv 7\pmod{13}$$

(3) (ア) 出る目の積が奇数である確率は，3個のサイコロの目がすべて奇数であるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

出る目の積が偶数である事象を A とすると，求める確率は，この余事象の確率であるから

$$P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

(イ) 目の和が5の倍数である事象を B とすると，$A \cap B$ は，次の (i)，(ii) の事象がある．

(i) すべての目が異なる

$$\{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},\ \{4,5,6\}$$

(ii) 同じ目が2つある

$$\{1,2,2\},\ \{2,2,6\},\ \{2,4,4\},\ \{3,3,4\},\ \{3,6,6\}$$

したがって　$P(A \cap B) = \dfrac{4{\cdot}3! + 5{\cdot}{}_3\mathrm{C}_2}{6^3} = \dfrac{13}{72}$

よって，求める確率は　$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{13}{72}{\cdot}\dfrac{8}{7} = \boldsymbol{\dfrac{13}{63}}$

■

2 (1) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ と $y = a(x+1)$ から y を消去して整理すると

$$x^2 - 2ax - 2a = 0 \quad \cdots (*)$$

上の方程式は異なる2つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 1{\cdot}(-2a) = a(a+2) > 0$$

よって　$\boldsymbol{a < -2,\ 0 < a}$

(2) 方程式 $(*)$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = -2a}$$

(3) C と ℓ の2つの交点 $(\alpha,\ a(\alpha+1))$，$(\beta,\ a(\beta+1))$ の中点は，(2) の結果により

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a(\alpha+\beta)}{2} + a\right) \quad \text{すなわち} \quad (a,\ a^2 + a)$$

a の値の範囲に注意して　$\boldsymbol{y = x^2 + x\ (x < -2,\ 0 < x)}$ ■

$\boxed{3}$ (1)
$$Q(x)=\int_1^x P(t)\,dt \quad \cdots(*)$$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 2 であるから，剰余の定理により　$P(1)=2$

$(*)$ を微分すると　$Q'(x)=P(x)$　よって　$Q'(1)=P(1)=\mathbf{2}$

(2) $(*)$ より　$Q(1)=0$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $R(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$Q(x)=(x-1)^2R(x)+ax+b$$

微分すると　$Q'(x)=2(x-1)R(x)+(x-1)^2R'(x)+a$

上の 2 式に $x=1$ を代入すると，$Q(1)=0$，$Q'(1)=2$ により

$$a+b=0,\quad a=2 \quad \text{これから} \quad b=-2$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{2x-2}$

(3) (2) の結果から　$Q(x)=(x-1)^2R(x)+2x-2$

$R(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを c とすると

$$R(x)=(x-2)S(x)+c$$

したがって
$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2\{(x-2)S(x)+c\}+2x-2\\&=(x-1)^2(x-2)S(x)+c(x-1)^2+2x-2\end{aligned}$$

$Q(x)$ を $x-2$ で割った余りが 3 であるから，剰余の定理により　$Q(2)=3$

したがって　$c+2=3$　すなわち　$c=1$

ゆえに
$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x-2)S(x)+(x-1)^2+2x-2\\&=(x-1)^2(x-2)S(x)+x^2-1\end{aligned}$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x^2-1}$

別解1 $Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$Q(x)=(x-1)^2(x-2)S(x)+px^2+qx+r$$

$Q(2)=3$ より　　$4p+2q+r=3 \quad \cdots ①$

$Q(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x-2)S(x)+p(x-1)^2+(2p+q)x-p+r\\&=(x-1)^2\{2(x-2)S(x)+p\}+(2p+q)x-p+r\end{aligned}$$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x-2$ であるから，係数を比較して

$$2p+q=2, \quad -p+r=-2 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$p=1$，$q=0$，$r=-1$　よって，求める余りは　x^2-1

別解2 $Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x-2)S(x)+px^2+qx+r,\\Q'(x)&=2(x-1)\{(x-2)S(x)\}+(x-1)^2\{(x-2)S(x)\}'+2px+q\end{aligned}$$

上の第1式に $x=1,\ 2$，第2式に $x=1$ を代入すると，$Q(1)=0$，$Q(2)=3$，$Q'(1)=2$ により

$$p+q+r=0, \quad 4p+2q+r=3, \quad 2p+q=2$$

これを解いて　$p=1$，$q=0$，$r=-1$　よって，求める余りは　x^2-1 ■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=-xe^{-\frac{x}{a}}$ より

$$f'(x)=\left(\frac{x}{a}-1\right)e^{-\frac{x}{a}}, \quad f''(x)=\left(\frac{2}{a}-\frac{x}{a^2}\right)e^{-\frac{x}{a}}$$

$x<2a$ のとき $f''(x)>0$，$2a<x$ のとき $f''(x)<0$ であるから，$y=f(x)$ の上の点 $(2a,\ f(2a))$ は，この曲線の変曲点である．ゆえに

$$f(2a)=-2ae^{-2}, \quad f'(2a)=e^{-2}$$

したがって，ℓ の方程式は

$$y+2ae^{-2}=e^{-2}(x-2a) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=e^{-2}(x-4a)}$$

注意　$f'(a)=0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるように，$f''(2a)=0$ は点 $(2a,\ f(2a))$ が変曲点であるための必要条件である．変曲点を示すには，$x=2a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化することを示さなければならない．増減表で示してもよい．

(2)　$g(x)=-f(x+a)=\boldsymbol{(x+a)e^{-\frac{x+a}{a}}}$

(3)　(1) の計算結果から

$$g'(x)=-f'(x+a)=-\left(\frac{x+a}{a}-1\right)e^{-\frac{x+a}{a}}=-\frac{x}{a}e^{-\frac{x+a}{a}}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	ae^{-1}	$\searrow$

$b>0$ より，$h(x)=bg(x)$ の最大値 abe^{-1} が 1 であるから　$\boldsymbol{ab=e}$

(4)　(1) の結果から，ℓ と x 軸との交点の x 座標 $4a$ が 4 であるから　$a=1$

これを (3) の結果に代入して　　$b=e$

ゆえに　$f(x)=-xe^{-x}$，$h(x)=e(x+1)e^{-x-1}=(x+1)e^{-x}$

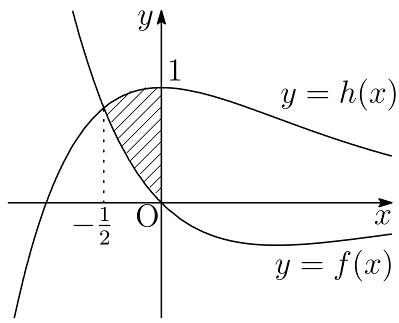
$$h(x)-f(x)=(2x+1)e^{-x}$$

したがって，$y=f(x)$ と $y=h(x)$ の交点の x 座標は

$$x=-\frac{1}{2}$$

$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ において

$$h(x)-f(x)\geqq 0$$



求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx=\Big[-(2x+3)e^{-x}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\boldsymbol{2\sqrt{e}-3}$$

■

3.4　2018 年

1 次の問いに答えよ．

(1) $\log_4(x-5)-1 \leqq \log_{16} x$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(2) $x^2-10x-10$ が整数の平方となるような整数 x をすべて求めよ．

(3) 複素数平面上の単位円に内接する正六角形がある．この 6 個の頂点に対応する複素数は反時計回りに 1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 であるとする．実数 t に対して，$z=1+tz_1$ とおくとき，$w=\dfrac{z-z_3}{z_4-z_3}$ が純虚数になるように t の値を定めよ．また，そのときの w の値を求めよ．

2 四面体 OABC がある．辺 OA の中点を M，辺 BC の中点を N とし，辺 OC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ に内分する点を P，辺 AB を $p:1-p$ に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $s\overrightarrow{\mathrm{PM}}+t\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ (s，t は実数) の形に表されることを示せ．

3 0 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．次の問いに答えよ．

(1) 書かれた整数の和が 3 の倍数になる 3 枚のカードの組合せの総数を求めよ．

(2) 10 枚から 4 枚を同時に選ぶとき，それら 4 枚に書かれた整数の和が偶数になる確率を求めよ．

(3) はじめ 10 枚あるカードの中から，1 回に 1 枚ずつ選び，0 が書かれたカードを選ぶまで繰り返す．選んだすべてのカードに書かれた整数の和が 10 以上になる確率を求めよ．ただし，1 回選んだカードは次回以降の選択肢から除くものとする．

4 a を定数とし，$f(x) = e^{ax}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とする．ただし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) $a = \sqrt{3}$ のとき，関数 $y = f(x)$ について第 2 次導関数まで求めて増減を調べ，そのグラフをかけ．

解答例

1 (1) $\log_4(x-5)-1 \leqq \log_{16} x \quad \cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-5>0 \quad \text{かつ} \quad x>0 \quad \text{すなわち} \quad x>5 \quad \cdots ①$$

$\log_4(x-5)=\log_{16}(x-5)^2$ より，$(*)$ は

$$\log_{16}(x-5)^2 \leqq \log_{16} 16x$$

底 16 は 1 より大きいから

$$(x-5)^2 \leqq 16x \quad \text{整理すると} \quad x^2-26x+25 \leqq 0$$

ゆえに　$(x-1)(x-25) \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq x \leqq 25$

求める実数 x の範囲は，① に注意して　$\boldsymbol{5 < x \leqq 25}$

(2) $x^2-10x-10=n^2$ (n は整数) とおくと

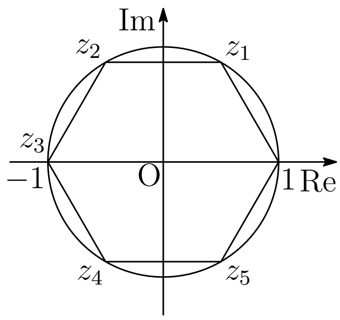
$$(x-5)^2-n^2=35 \quad \text{ゆえに} \quad (|x-5|+|n|)(|x-5|-|n|)=35$$

したがって　$\begin{cases} |x-5|+|n|=35 \\ |x-5|-|n|=1 \end{cases}$,　$\begin{cases} |x-5|+|n|=7 \\ |x-5|-|n|=5 \end{cases}$

ゆえに　$\begin{cases} |x-5|=18 \\ |n|=17 \end{cases}$,　$\begin{cases} |x-5|=6 \\ |n|=1 \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{x=23,\ -13,\ 11,\ -1}$

(3) $z_4-z_3=z_5$，$\dfrac{1}{z_5}=z_1$ であるから

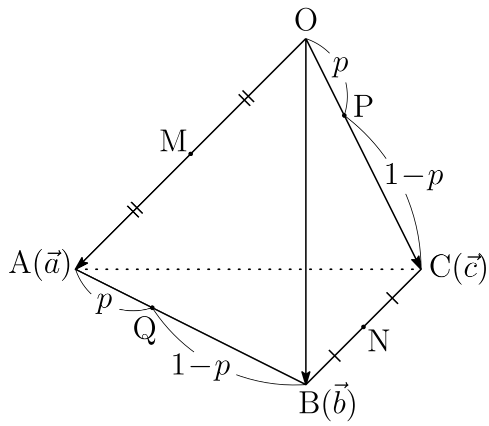


$$\begin{aligned} w &= \frac{z-z_3}{z_4-z_3} = \frac{1+tz_1-z_3}{z_5} \\ &= z_1(1+tz_1-z_3) \\ &= z_1+tz_2-z_4 = z_1+tz_2-(-z_1) \\ &= 2z_1+tz_2 \end{aligned}$$

ゆえに　$w=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+t\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\dfrac{t}{2}+(t+2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

w は，純虚数であるから　$1-\dfrac{t}{2}=0$　すなわち　$\boldsymbol{t=2,\ \ w=2\sqrt{3}i}$ ■

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}-p\vec{c}}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-p\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-p\right)\vec{c}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-p)\vec{a}+p\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{(1-p)\vec{a}+p\vec{b}-p\vec{c}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{PM}}+t\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ に (1)〜(3) の結果を代入すると

$$(1-p)\vec{a}+p\vec{b}-p\vec{c}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}-p\vec{c}\right)+t\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-p\right)\vec{c}\right\}$$
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\left(-sp+\frac{t}{2}-pt\right)\vec{c}$$

$\dfrac{s}{2}=1-p$，$\dfrac{t}{2}=p$，すなわち，$s=2-2p$，$t=2p$ とすると

$$-sp+\frac{t}{2}-pt=-(2-2p)p+\frac{2p}{2}-p\cdot 2p$$
$$=-2p+2p^2+p-2p^2=-p$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2-2p)\overrightarrow{\mathrm{PM}}+2p\overrightarrow{\mathrm{PN}}}$　■

3 (1) $A=\{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{1,\ 4,\ 7\}$，$C=\{2,\ 5,\ 8\}$ とする．
3 枚のカードの和が 3 の倍数になる組合せは，A から 3 枚，B から 3 枚，C から 3 枚，A, B, C からそれぞれ 1 枚ずつの場合であるから

$${}_4\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1=4+1+1+4\cdot3\cdot3=\mathbf{42}\ \textbf{(通り)}$$

(2) $X=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$Y=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする．
4 枚のカードの和が偶数になる組合せは，X から 4 枚，X, Y からそれぞれ 2 枚，Y から 4 枚の場合であるから，その総数は

$${}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_4=5+10\cdot10+5=110\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$\dfrac{110}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{110}{210}=\boldsymbol{\dfrac{11}{21}}$

(3) 0 が書かれたカードを選ぶまでに，選んだすべてのカードに書かれた整数の和が 10 未満である確率をまず求める．

(i) 1 回目に 0 が出るとき　その確率は $\dfrac{1}{10}$

(ii) 2 回目に 0 が出るとき　その確率は $\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10}$

(iii) 3 回目に 0 が出るとき
2 回目までに目の和が 10 未満である組合せは，次の 16 通り．

目の和が 3 である組合せは　$\{1,\ 2\}$
目の和が 4 である組合せは　$\{1,\ 3\}$
目の和が 5 である組合せは　$\{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\}$
目の和が 6 である組合せは　$\{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\}$
目の和が 7 である組合せは　$\{1,\ 6\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\}$
目の和が 8 である組合せは　$\{1,\ 7\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 5\}$
目の和が 9 である組合せは　$\{1,\ 8\},\ \{2,\ 7\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\}$

その確率は　$\dfrac{16\cdot 2!}{10\cdot 9}\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{2}{45}$

(iv) 4 回目に 0 が出るとき
3 回目までに目の和が 10 未満である組合せは，次の 7 通り．

目の和が 6 である組合せは　$\{1,\ 2,\ 3\}$
目の和が 7 である組合せは　$\{1,\ 2,\ 4\}$
目の和が 8 である組合せは　$\{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 4\}$
目の和が 9 である組合せは　$\{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3\ ,5\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$

その確率は　$\dfrac{7\cdot 3!}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{120}$

(v) 5 回目以降に 0 が出るとき，4 回目までの目は 10 以上である．

(i)〜(v) より，0 が書かれたカードが選ぶまでに，書かれた整数の和が 10 未満である確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{45}+\frac{1}{120}=\frac{91}{360}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{91}{360}=\mathbf{\frac{269}{360}}$$

■

4 (1)

$$(e^{ax}\sin x)' = e^{ax}(a\sin x + \cos x) \quad \cdots ①$$
$$(e^{ax}\cos x)' = e^{ax}(-\sin x + a\cos x) \quad \cdots ②$$

① $\times a -$ ② より

$$(ae^{ax}\sin x - e^{ax}\cos x)' = (a^2+1)e^{ax}\sin x$$

ゆえに $\displaystyle\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a^2+1}e^{ax}(a\sin x - \cos x) + C$ （C は積分定数）

よって $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{a^2+1}\Big[\,e^{ax}(a\sin x - \cos x)\,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{e^{a\pi}+1}{a^2+1}}$

(2) ① より，$a=\sqrt{3}$ のとき

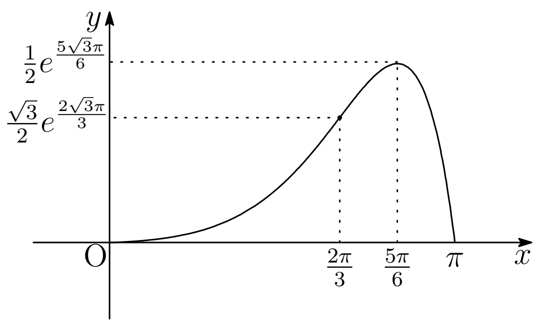
$$f'(x) = e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$
$$f''(x) = 2e^{\sqrt{3}x}\left\{\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$= 4e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

増減および凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	⤴	変曲点	⤵	極大	↘	0

よって 極大値 $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}}$ 変曲点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}}\right)$

グラフの概形は，次のようになる．



補足　$z = a + bi$，$r = |z|$，$\theta = \arg z$ とすると[1]

$$\frac{d}{dx}\{e^{ax}\cos bx\} = re^{ax}\cos(bx+\theta),$$
$$\frac{d}{dx}\{e^{ax}\sin bx\} = re^{ax}\sin(bx+\theta)$$

さらに，次式が成立する．

$$\frac{d^n}{dx^n}\{e^{ax}\cos bx\} = r^n e^{ax}\cos(bx+n\theta),$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\{e^{ax}\sin bx\} = r^n e^{ax}\sin(bx+n\theta)$$

逆に次の積分を得る．

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{r}e^{ax}\cos(bx-\theta)+C,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{r}e^{ax}\sin(bx-\theta)+C$$

本題では，$f(x) = e^{\sqrt{3}x}\sin x$ であるから，$z = \sqrt{3}+i$ とすると

$$r = |z| = 2,\quad \theta = \arg z = \frac{\pi}{6}$$

したがって

$$f'(x) = 2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$
$$f''(x) = 2^2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 4e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

また，$f(x) = e^{\sqrt{3}x}\sin x$ の不定積分は次のようになる．

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+C$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2018_kouki.pdf $\boxed{2}$ を参照．

3.5　2019 年

1 次の問いに答えよ．

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(1-x) - 2\log_4(y+6) = -2 \\ 3\cdot 2^x + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = 2 \end{cases}$$

を解け．

(2) m，n を自然数とする．m^2+1 と n^2+1 がともに 5 で割り切れるならば，$m^3n^3 - mn$ も 5 で割り切れることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$ の値を求めよ．

2 a を正の定数とする．座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(-a,\ 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，

$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)^2 + 4a^2y^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を表し，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ はそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の大きさを表す．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

を満たすとき，P はどのような図形上にあるか図示せよ．

3 1 から 5 までの番号を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを引いて番号を記録して元に戻す作業を n 回繰り返す．このとき，記録した番号の和が偶数である確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n と p_{n+1} の関係式を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

4 曲線 $y = \sqrt{1-x^2} + x - 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) 極値，凹凸を調べて曲線の概形を書け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)
$$(*)\begin{cases} \log_2(1-x)-2\log_4(y+6)=-2 \\ 3{\cdot}2^x+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y=2 \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式において，真数は正であるから

$$1-x>0,\quad y+6>0 \quad \text{ゆえに} \quad x<1,\quad y>-6 \quad \cdots ①$$

$(*)$ の第 1 式から

$$\log_2(1-x)-\log_2(y+6)=-2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2\frac{1-x}{y+6}=\log_2\frac{1}{4}$$

上の第 2 式から $\quad \dfrac{1-x}{y+6}=\dfrac{1}{4} \quad$ すなわち $\quad y=-4x-2 \quad \cdots ②$
これを $(*)$ 第 2 式に代入すると

$$3{\cdot}2^x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4x-2}=2 \quad \text{ゆえに} \quad 3{\cdot}2^x+2{\cdot}2^{2x}=2$$

ここで，$t=2^x$ とおくと $(t>0)$

$$3t+2t^2=3 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(2t-1)=0$$

$t>0$ に注意して $\quad t=\dfrac{1}{2} \quad$ ゆえに $\quad 2^x=2^{-1} \quad$ すなわち $\quad x=-1$
したがって，① に注意して，これを ② に代入すると $\quad y=2$
よって $\quad \boldsymbol{x=-1,\ y=2}$

(2)
$$\begin{aligned} m^3n^3-mn &= mn(m^2n^2-1)=mn(m^2n^2+n^2-n^2-1) \\ &= mn\{n^2(m^2+1)-(n^2+1)\} \end{aligned}$$

m^2+1 と n^2+1 がともに 5 で割り切れるから，次式は 5 で割り切れる．

$$m^3n^3-mn$$

別解 条件から

$$m^2+1\equiv 0,\quad n^2+1\equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad m^2\equiv -1,\quad n^2\equiv -1 \pmod 5$$

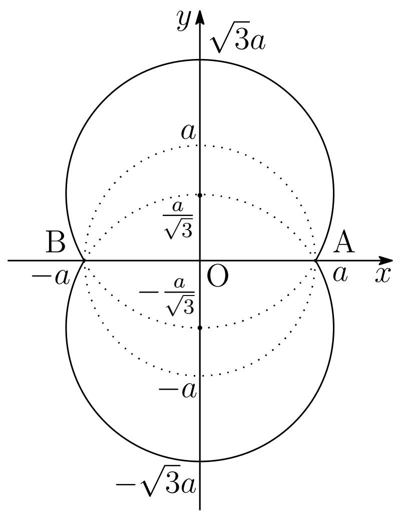
したがって $\quad m^2n^2\equiv(-1)^2 \quad$ ゆえに $\quad m^2n^2-1\equiv 0 \pmod 5$
よって $\quad m^3n^3-mn=mn(m^2n^2-1)\equiv 0 \pmod 5$

(3)
$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx=\frac{1}{2}\Big[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\log\frac{3+2\sqrt{3}}{3}} \end{aligned}$$

■

2 (1)
$$(p^2+q^2)(r^2+s^2)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2$$
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(p,\ q)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(r,\ s)$ とすると，上式から
$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)^2+(ps-qr)^2 \quad \cdots(*)$$
$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$ であるから
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(a-x,-y),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-a-x,-y) \quad \cdots①$$
ここでは，$p=a-x$，$q=-y$，$r=-a-x$，$s=-y$ より
$$ps-qr=(a-x)(-y)-(-y)(-a-x)=-2ay$$
これを $(*)$ に代入すると，次式を得る．
$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)^2+4a^2y^2$$

(2)
$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \cdots(**)$$
① より
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(a-x)(-a-x)+(-y)\cdot(-y)\\&=x^2+y^2-a^2 \quad \cdots②\end{aligned}$$
$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\geqq 0$ であるから，$(**)$，② より
$$x^2+y^2-a^2\geqq 0 \quad ゆえに \quad x^2+y^2\geqq a^2 \quad \cdots③$$
$(**)$ を (1) の結果に代入して整理すると
$$3(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2=4a^2y^2 \quad ゆえに \quad \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\pm\frac{2a}{\sqrt{3}}y$$
上の第 2 式に ② を代入すると
$$x^2+y^2-a^2=\pm\frac{2a}{\sqrt{3}}y$$
$$x^2+\left(y\mp\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4a^2}{3} \quad \cdots④$$
③，④ より，点 P の描く図形は，右の図の実線部分である．



3 (1) 1回の試行で偶数のカードを引く確率から

$$p_1 = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

2回とも偶数または奇数のカードを引く確率から

$$p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{13}{25}}$$

3回とも偶数または1回だけ偶数のカードを引く確率から

$$p_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{62}{125}}$$

(2) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_n}$$

(3) (2) の結果から $\quad p_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{2}\right)$

$\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

よって $\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}}$ ■

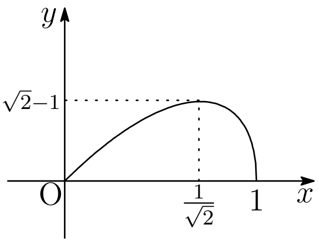
$\boxed{4}$ (1) $y=\sqrt{1-x^2}+x-1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ より

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1, \qquad y''=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$=-\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y'=0$ とすると $\quad -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1=0$

これを解いて $\quad x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	極大	↘	0



$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

(2) 領域 D の面積を S とすると

$$S=\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x-1)\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径1の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ であるから $\qquad S=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}$

(3) 求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx-2\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-2S$$
$$=\frac{2}{3}-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

よって $\qquad V=\boldsymbol{\pi\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ ■

3.6　2020 年

1 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $|3x^2 - 8x + 4| = 7x - 8$ を解け．

(2) xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を自然数とするとき，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - nx \\ y \leqq nx \end{cases}$$

の表す領域に含まれる格子点の個数を n を用いて表せ．

(3) $x > 1$ のとき

$$\log_8 \left(\frac{x^3}{16} \right) + \log_x \left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

の最小値と，最小値をとるときの x の値を求めよ．

2 n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 複素数 z が $z \neq 1$，$|z| = 1$ をみたしているとき，$\dfrac{z}{(1-z)^2}$ は実数であることを示せ．

(2) 複素数 z が $z \neq 1$ をみたしているとき，

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}\}$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ．

(3) 実数 θ が $\cos\theta \neq 1$ をみたしているとき，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta = \frac{1}{2(\cos\theta - 1)}\{1 - (n+1)\cos n\theta + n\cos(n+1)\theta\}$$

が成り立つことを示せ．

3 $\triangle$OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を $2:1$ の比に内分する点を D，直線 AD と直線 BC の交点を P とする．また，線分 OA と線分 OB を辺にもつ平行四辺形の辺と直線 OP の交点のうち，O 以外のものを Q とする．$\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{OD}=3$，$\mathrm{AD}=5$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の値を求めよ．また，$\sin\angle\mathrm{AOD}$ の値を求めよ．

(2) $s=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を s，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表し，s の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(4) $\triangle$OAD と四角形 OAQD の面積を求めよ．

4 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^3-2}{x}$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ について，原点を通る接線の方程式を求めよ．

(3) a を定数とするとき，方程式 $x^3-ax-2=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 方程式 $|3x^2-8x+4|=7x-8$ より　$|(x-2)(3x-2)|=7x-8$

(i) $\dfrac{8}{7} \leqq x \leqq 2$ のとき　$-(3x^2-8x+4)=7x-8$

ゆえに　$(x+1)(3x-4)=0$　したがって　$x=\dfrac{4}{3}$

(ii) $2 \leqq x$ のとき　$3x^2-8x+4=7x-8$

ゆえに　$(x-1)(x-4)=0$　したがって　$x=4$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3},\ 4}$

(2) $y=x^2-nx$ と $y=nx$ から，y を消去すると

$$x^2-nx=nx \quad \text{ゆえに } x=0,\ 2n$$

$y \geqq x^2-nx$，$y \leqq nx$ を同時に満たす x の範囲は　$0 \leqq x \leqq 2n$
この区間において，$x^2-nx \leqq nx$ であるから，求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}\{nk-(k^2-nk)+1\} &= \sum_{k=0}^{2n}(1+2nk-k^2)\\ &= (2n+1)+2n\cdot\frac{1}{2}2n(2n+1)\\ &\qquad -\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2-n+3)}\end{aligned}$$

(3) $t=\log_8 x$ とおくと $(x>1)$　$t>0$

$$\log_8\left(\frac{x^3}{16}\right)=\log_8 x^3-\log_8 16=3t-\frac{4}{3}$$
$$\log_x\left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\log_x 8-\log_x\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{t}-\frac{2}{3}$$

したがって　$\log_8\left(\dfrac{x^3}{16}\right)+\log_x\left(\dfrac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=3t+\dfrac{1}{t}-2$

相加平均・相乗平均の大小関係により　$3t+\dfrac{1}{t}-2 \geqq 2\sqrt{3}-2$

上式において，等号が成立するとき　$3t=\dfrac{1}{t}$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$x=2^{3t}=\boldsymbol{2^{\sqrt{3}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}-2}$ ■

2　(1)　$w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ とおくと，$|z| = 1$ より

$$\overline{w} = \frac{\overline{z}}{(1-\overline{z})^2} = \frac{z^2\overline{z}}{z^2(1-\overline{z})^2} = \frac{z(z\overline{z})}{(z-z\overline{z})^2} = \frac{z|z|^2}{(z-|z|^2)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$w = \overline{w}$ であるから，$w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ は実数である．

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}\} \quad \cdots (*)$$

［1］$n = 1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = z,$$
$$(*) \text{ の右辺} = \frac{z}{(1-z)^2}(1-2z+z^2) = \frac{z}{(1-z)^2}(1-z)^2 = z$$

このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = j$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\sum_{k=1}^{j} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+1)z^j + jz^{j+1}\}$$

上式の両辺に $(j+1)z^{j+1}$ を加えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1} kz^k &= \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+1)z^j + jz^{j+1}\} + (j+1)z^{j+1} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+1)z^j + jz^{j+1} + (j+1)(1-z)^2z^j\} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+2)z^{j+1} + (j+1)z^{j+2}\}\end{aligned}$$

したがって，$n = j+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(3) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$z+\overline{z}=2\cos\theta$ より，(1) で示した w について

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{1-2z+z^2} = \frac{z}{z\overline{z}-2z+z^2} \\ &= \frac{1}{z+\overline{z}-2} = \frac{1}{2\cos\theta-2} = \frac{1}{2(\cos\theta-1)} \end{aligned}$$

(2) の結果に $z=\cos\theta+i\sin\theta$ を代入すると，ド・モアブルの定理により

$$\sum_{k=1}^{n} k\{\cos k\theta + i\sin k\theta\} = w[1-(n+1)\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}$$
$$+ n\{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\}]$$

上式の両辺の実部を比較すると

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta = \frac{1}{2(\cos\theta-1)}\{1-(n+1)\cos n\theta + n\cos(n+1)\theta\}$$

補足 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z-z^{n+1}}{1-z}$ とおくと　$(1-z)f(z)=z-z^{n+1}$

これを z について微分すると　$-f(z)+(1-z)f'(z)=1-(n+1)z^n$

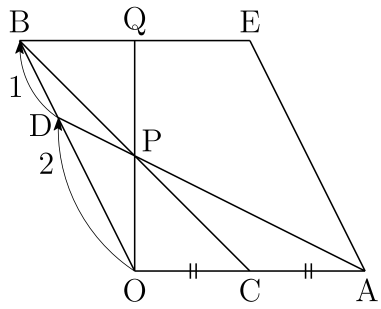
$$\begin{aligned} (1-z)f'(z) &= 1-(n+1)z^n+f(z) \\ &= 1-(n+1)z^n+\frac{z-z^n}{1-z} \\ &= \frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{1-z} \end{aligned}$$

ゆえに　　$zf'(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}\}$

$f'(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1}$ より　$zf'(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^k$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}\}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より



$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2}{2}=\frac{8+9-25}{2}=\mathbf{-4}$$

ゆえに $\cos\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\dfrac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 3}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

よって $\sin\angle\mathrm{AOD}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOD}}=\sqrt{1-\dfrac{2}{9}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

(2) P は線分 AD を $s:1-s$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

P は BC 上の点であるから $\dfrac{2s}{3}+2(1-s)=1$ これを解いて $\boldsymbol{s=\dfrac{3}{4}}$

(3) (2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $\cdots$ ①

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ $\cdots$ ②

② を ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$$

Q は直線 BE 上の点であるから

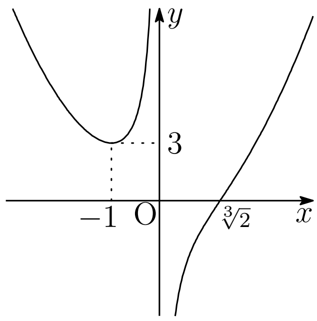
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{2}=\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}}$$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\triangle\mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OD}\sin\angle\mathrm{AOD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$
$$\triangle\mathrm{OAQ}=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{3}{2}\triangle\mathrm{OAD}=\frac{3}{2}\sqrt{14}$$
$$\triangle\mathrm{OQD}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{OQB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OBE}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{14}$$

四角形 $\mathrm{OAQD}=\triangle\mathrm{OAQ}+\triangle\mathrm{OQD}=\dfrac{3}{2}\sqrt{14}+\dfrac{1}{2}\sqrt{14}=\boldsymbol{2\sqrt{14}}$ ■

4　(1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x} = x^2 - \dfrac{2}{x}$ より



$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x+1)(x^2 - x + 1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x) = -\infty$

よって　　極小値 $f(-1) = \mathbf{3}$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - \frac{t^3 - 2}{t} = \left(2t + \frac{2}{t^2}\right)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2(t^3+1)}{t^2}x - t^2 - \frac{4}{t}$$

これが原点を通るから

$$-t^2 - \frac{4}{t} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\sqrt[3]{4}$$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y = -\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}x}$

(3) $x = 0$ は方程式 $x^3 - ax - 2 = 0$ の解ではないから

$$a = \frac{x^3 - 2}{x}$$

方程式の実数解の個数は，$y = f(x)$ と直線 $y = a$ の交点の個数に等しい．したがって，(1) で示したグラフの概形から，求める実数解の個数は

$a < 3$ のとき 1 個，　$a = 3$ のとき 2 個，　$3 < a$ のとき 3 個

(4) $f(x) = 0$ の解は　$x = \sqrt[3]{2}$，　$\sqrt[3]{2} \leqq x \leqq 2$ において　$f(x) \geqq 0$

求める面積を S とすると

$$S = \int_{\sqrt[3]{2}}^{2} \frac{x^3 - 2}{x}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\log x\right]_{\sqrt[3]{2}}^{2} = \mathbf{2 - \frac{4}{3}\log 2}$$

■

第 4 章　佐賀大学

出題分野

(理工学部　医学部　農学部　文化教育学部)

理工学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	佐賀大学 理工学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式	2									
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式										
	三角関数	1									
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1									
III	式と曲線				4						
	複素数平面						3	4		4	
	関数										
	極限			2·4			1				
	微分法とその応用	3	2·3	3·4		2		2	3·4		
	積分法	3	2								4
	積分法の応用		3	3	1	1·2	2	2·3	3	3	3
A	場合の数と確率				3	4	4			1	1
	整数の性質										
	図形の性質										
B	平面上のベクトル			1				1	1		2
	空間のベクトル		1			3				2	
	数列						1		2		
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	4	4		2	数字は問題番号					

医学部 出題分野 (2013-2020) 120 分

◀	佐賀大学 医学部	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式								
	2 次関数								
	図形と計量								
	データの分析								
II	式と証明								
	複素数と方程式								5
	図形と方程式								
	三角関数								
	指数関数と対数関数								
	微分法と積分法								
III	式と曲線	5					3		
	複素数平面				7	4		7	
	関数			5					
	極限	2·4	7		1				
	微分法とその応用	4·6	5			2			
	積分法		7	5	6	5	5		6
	積分法の応用	6	5		5	2·3		6	3
A	場合の数と確率		3	4			4	5	1
	整数の性質			6			6	8	
	図形の性質								
B	平面上のベクトル								
	空間のベクトル			3					
	数列			4	1				
	確率分布と統計								
C	行列 (旧課程)		6	数字は問題番号					

農学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	佐賀大学 農学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式	2		7	8						
	2 次関数										8
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式	5						8			
	三角関数	1		8		9				9	
	指数関数と対数関数		6		9						
	微分法と積分法	1·5	7	9	10	9	9	6	7·8	10	7
A	場合の数と確率				11	4	4	7	9	1	1
	整数の性質										
	図形の性質										
B	平面上のベクトル			1				1	1		2
	空間のベクトル		1			8	8			2	
	数列	6	5			7	1				
	確率分布と統計										

数字は問題番号

文化教育学部 出題分野 (2011-2020) 100 分

◀	佐賀大学 文化教育	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式	9		7							
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式	7									
	三角関数				9					9	
	指数関数と対数関数		6								
	微分法と積分法	10	9	9	10	9	9	6	7	10	7
A	場合の数と確率			10	11		4	7	9		1
	整数の性質										
	図形の性質	8									
B	平面上のベクトル							1	1		2
	空間のベクトル		1			8				2	
	数列		8	11		7	1				
	確率分布と統計										

数字は問題番号

4.1　2015 年

- 理工学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{3}$ ～ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{4}$, $\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部　$\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (100 分)

1

$$f(x) = \begin{cases} x(5-x) & (x \geqq 0) \\ x(x^2-1) & (x < 0) \end{cases}$$

とおき，関数 $y = f(x)$ のグラフを C とおく．直線 $y = ax$ と C は，原点 O およびそれ以外の 2 点 P，Q で交わっているものとする．ただし，点 P の x 座標は正，点 Q の x 座標は負であるとする．線分 OP と C によって囲まれる図形の面積を $S_1(a)$，線分 OQ と C によって囲まれる図形の面積を $S_2(a)$ とし，$S(a) = S_1(a) + S_2(a)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) $S_1(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $S_2(a)$ を a を用いて表せ．

(4) (1) で求めた範囲を a が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

2 直線 $\ell : y = ax + b$ と曲線 $C : y = \log x$ $(x > 0)$ は接するものとする．ただし，a，b は定数であり，$a > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

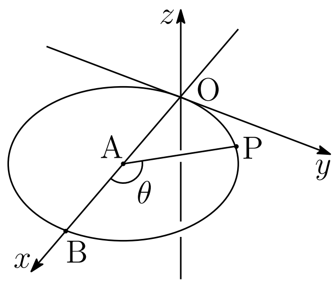
(2) ℓ と C および x 軸で囲まれた図形の面積を S とする．$0 < a < 1$ のとき，S を a を用いて表せ．

3 点 O を原点とし，x 軸，y 軸，z 軸を座標軸とする座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(2, 0, 0)，C(1, 0, 1) がある．点 A を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上に点 P をとり，図のように $\theta = \angle\text{BAP}$ とおく．ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ とする．また，直線 CP と yz 平面の交点を Q とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) θ の値が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化するとき，yz 平面における点 Q の軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ．



4 正方形の 4 個の頂点を，時計回りに順に A，B，C，D とする．頂点 A から出発して頂点上を時計回りに点 P を進めるゲームを行う．硬貨を 1 回投げるごとに，表が出たときには頂点 1 つ分だけ点 P を進め，裏が出たときには頂点 2 つ分だけ点 P を進めるものとする．ただし，点 P が頂点 D にとまった時点でゲームは終わるものとする．

硬貨を n 回投げ終えた時点で点 P が頂点 A に到達する確率を p_n とするとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_4，p_5 を求めよ．

(3) p_{12} を求めよ．

5 a，b は定数であり，$0 < a < b$ とする．定積分

$$I = \int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) I を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ．また，$I > \sqrt{ab}$ を示せ．

(3) $0 < t < 1$ とする．$x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3) の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ．

6 p を素数とするとき，次の問に答えよ．

(1) 2 つの自然数 m，n の最大公約数は 1 であるとし，$x = \dfrac{n}{m}$ とおく．p^x が有理数であるならば，$m = 1$ であることを示せ．

(2) 方程式

$$p^x = -x^2 + 9x - 5$$

が有理数の解 x をもつような組 $(p,\ x)$ をすべて求めよ．

7 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{6}, \qquad \sum_{k=11}^{40} a_k = 250$$

を満たすとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n \leqq 10$ となる n の最大値 N を求めよ．

(3) (2) で求めた N に対して，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$ を求めよ．

8 a，b，c を正の定数とし，3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ の定める平面を α とする．また，原点を O とし，平面 α に垂直な単位ベクトルを $\vec{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ とする．ただし，$n_1 > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{n}$ を求めよ．

(2) 平面 α 上に点 H があり，直線 OH は α に垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積を S_1 とする．四面体 OABC の体積を考えることにより，$S_1 = n_1 S$ であることを示せ．

9 a を定数とし，関数

$$f(\theta) = \sin^3\theta + a\cos 2\theta + \frac{21}{4}\sin\theta$$

は $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{13}{4}$ を満たすものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) $t = \sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ．

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 直線 $y = ax$ を ℓ とする．

$x > 0$ のとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

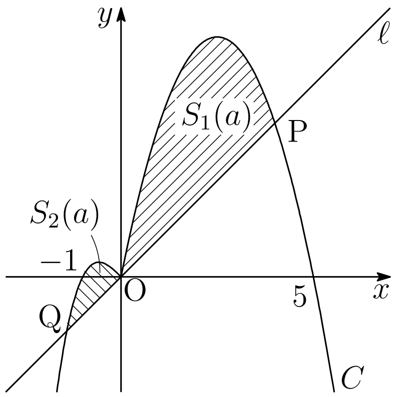
$$x(5-x) = ax \quad \text{ゆえに} \quad x(x-5+a) = 0$$

よって，点 P の x 座標は　$x = 5 - a$

$x < 0$ のとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x(x^2-1) = ax \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2-a-1) = 0$$

よって，点 Q の x 座標は　$x = -\sqrt{a+1}$



P，Q それぞれの x 座標の符号から　$5 - a > 0$，$-\sqrt{a+1} < 0$

これを解いて　$\boldsymbol{-1 < a < 5}$

(2) $$S_1(a) = \int_0^{5-a} \{x(5-x) - ax\}\,dx$$
$$= -\int_0^{5-a} x(x-5+a)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}(5-a)^3}$$

(3) $$S_2(a) = \int_{-\sqrt{a+1}}^{0} \{(x^3 - x) - ax\}\,dx = \int_{-\sqrt{a+1}}^{0} \{x^3 - (a+1)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(a+1)x^2\right]_{-\sqrt{a+1}}^{0} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(a+1)^2}$$

(4) $S(a) = S_1(a) + S_2(a)$ より，(2)，(3) の結果から

$$S(a) = \frac{1}{6}(5-a)^3 + \frac{1}{4}(a+1)^2$$
$$S'(a) = -\frac{1}{2}(5-a)^2 + \frac{1}{2}(a+1) = -\frac{1}{2}(a-3)(a-8)$$

$-1 < a < 5$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる．

a	(-1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(5)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ の最小値は　$S(3) = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$ ■

2　(1) $f(x)=ax+b$，$g(x)=\log x$ とおくと

$$f'(x)=a,\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

ℓ と C の接点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

$$at+b=\log t,\quad a=\frac{1}{t}$$

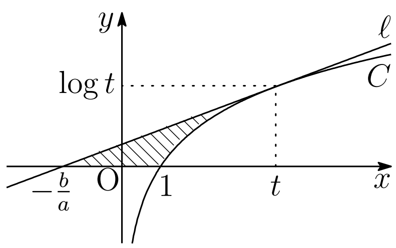
上の第 2 式より，$t=\dfrac{1}{a}$ であるから，これを第 1 式に代入すると

$$a\cdot\frac{1}{a}+b=\log\frac{1}{a}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b=-\log a-1}$$

(2) $0<a<1$ より　$t=\dfrac{1}{a}>1$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は

$$ax+b=0\quad \text{ゆえに}\quad x=-\frac{b}{a}$$



求める面積は，右の図の斜線部分であるから，(1) の結果により

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\left\{t-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}\log t-\int_1^t\log x\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\right)\log t-\Big[x(\log x-1)\Big]_1^t\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{\log a+1}{a}\right)\log t-t(\log t-1)-1\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{\log a}{a}\right)(-\log a)-\frac{1}{a}(-\log a-1)-1\\
&=\frac{(\log a)^2}{2a}+\frac{\log a+1}{a}-1\\
&=\boldsymbol{\frac{(\log a)^2+2\log a-2a+2}{2a}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{3}$ (1)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= (1,\ 0,\ 0) + (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\ &= (1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\end{aligned}$$

よって，点 P の座標は $\boldsymbol{(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)}$

(2) 直線 CP を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (1-t)(1,\ 0,\ 1) + t(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\ &= (1+t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t) \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

直線 CP と yz 平面との交点 Q の x 座標は 0 であるから

$$1+t\cos\theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{1}{\cos\theta}$$

これを $(*)$ に代入すると $\quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{0,\ -\tan\theta,\ 1+\frac{1}{\cos\theta}}\right)$

(3) (2) の結果から，点 $\mathrm{Q}(0,\ y,\ z)$ は

$$y = -\tan\theta, \quad z = 1 + \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cdots(**)$$

このとき，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より $\quad z \leqq 0 \quad \cdots①$

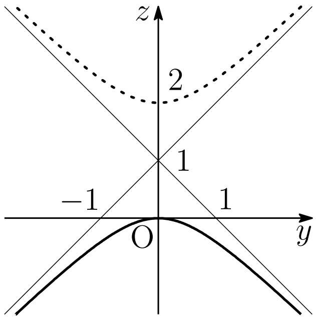
$(**)$ から $\quad \tan\theta = -y,\ \dfrac{1}{\cos\theta} = z-1$

これらを $1+\tan^2\theta = \left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ に代入すると $\quad 1+(-y)^2 = (z-1)^2$

点 Q の軌跡の方程式は，上式および ① から

$$\boldsymbol{x = 0, \quad y^2 - (z-1)^2 = -1, \quad z \leqq 0}$$

yz 平面における点 Q が描く軌跡は，双曲線 $y^2 - z^2 = -1$ を z 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，下の図の実線部分である．



4　(1) p_2 は，2 回連続して裏が出る確率であるから

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

p_3 は,「表表裏」の順に出る確率であるから

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

(2) (1) の結果から

$$p_4 = p_2 \times p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$$
$$p_5 = p_3 \times p_2 + p_2 \times p_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{16}}$$

(3) (2) の結果から

$$p_6 = p_4 \times p_2 + p_3 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
$$p_7 = p_5 \times p_2 + p_4 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$$
$$p_8 = p_6 \times p_2 + p_5 \times p_3 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$
$$p_9 = p_7 \times p_2 + p_6 \times p_3 = \frac{3}{128} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{512}$$
$$p_{10} = p_8 \times p_2 + p_7 \times p_3 = \frac{1}{64} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{128} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{1024}$$

よって

$$p_{12} = p_{10} \times p_2 + p_9 \times p_3 = \frac{7}{1024} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{512} \times \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{3}{1024}}$$

別解　p_2，p_3 に対する事象をそれぞれ X，Y とする．硬貨を 12 回投げ終えて P が A に到達するまでに X，Y が起きた回数をそれぞれ x，y とすると

$$2x + 3y = 12 \quad \text{これを解いて} \quad (x,\ y) = (6,\ 0),\ (3,\ 2),\ (0,\ 4)$$

よって，求める確率は

$$p_{12} = (p_2)^6 + {}_5\mathrm{C}_2 (p_2)^3 (p_3)^2 + (p_3)^4$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 10\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{3}{1024}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $I = \int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt = a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$

$$= \frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^t\right]_0^1 = \frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left(\frac{b}{a}-1\right) = \boldsymbol{\frac{b-a}{\log b - \log a}}$$

(2) $\left(a^{\frac{1-t}{2}}b^{\frac{t}{2}} - a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}\right)^2 \geqq 0 \cdots (*)$ であるから

$$a^{1-t}b^t - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + a^t b^{1-t} \geqq 0$$

すなわち　$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots (**)$

$0 < a < b$ より，$(*)$ において，等号が成立するとき

$$a^{\frac{1-t}{2}}b^{\frac{t}{2}} = a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}$$

したがって　$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}-t} = 1$　すなわち　$t = \frac{1}{2}$

$I = \int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt$ で $u = 1-t$ とおくと　$\frac{dt}{du} = -1$，

t	$0 \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 0$

したがって　$I = \int_1^0 a^u b^{1-u}\,(-du) = \int_0^1 a^u b^{1-u}\,du = \int_0^1 a^t b^{1-t}\,dt$

$(**)$ において，等号が成立するのは，$t = \frac{1}{2}$ のときに限るので

$$\int_0^1 (a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t})\,dt > \int_0^1 2\sqrt{ab}\,dt$$

したがって　$I + I > 2\sqrt{ab}\Big[\,t\,\Big]_0^1$　よって　$I > \sqrt{ab}$

(3) $f(u) = u^t$ とおくと，$f'(u) = tu^{t-1}$．平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c) \quad (1 < c < x)$$

を満たす c が存在する．$0 < t < 1$ より　$f'(c) = tc^{t-1} < t\cdot 1^{t-1} = t$

したがって　$\frac{x^t - 1}{x-1} < t$　よって　$x^t < 1 + t(x-1)$

(4) $0 < a < b$ より，$x = \frac{b}{a} > 1$ とおくと，$\left(\frac{b}{a}\right)^t < 1 + t\left(\frac{b}{a}-1\right)$ であるから

$$I = a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt < a\int_0^1 \left\{1 + t\left(\frac{b}{a}-1\right)\right\} dt = \frac{a+b}{2}$$

■

6 (1) p^x が有理数 $\dfrac{a}{b}$ に等しいとき (a，b は互いに素とする)

$$p^{\frac{n}{m}} = \frac{a}{b} \qquad \text{ゆえに} \qquad p^n = \frac{a^m}{b^m} \quad \cdots ①$$

① は整数であるから　$b^m = 1$　ゆえに　$b = 1$

これを ① に代入すると　　$p^n = a^m \quad \cdots ②$

② より，a は p を因数にもつから，$a = p^k$ とおく (k は整数).

これを ② に代入すると

$$p^n = (p^k)^m \qquad \text{ゆえに} \qquad p^n = p^{km}$$

上の第 2 式から　　$n = km$　　ゆえに　　$k = \dfrac{n}{m}$

m，n の最大公約数は 1 であるから　　$m = 1$

(2) (1) の結果から，x は整数であるから

$$p^x = -x^2 + 9x - 5 \quad \cdots (*)$$

は正の整数である．$f(x) = -x^2 + 9x - 5$ とおくと，$f(x) > 0$ となる x は

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	9	13	15	15	13	9	3

上の表から，$(*)$ を満たすのは，次の 2 つである．

$$3^1 = f(1), \quad 3^2 = f(2)$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ x) = (3,\ 1),\ (3,\ 2)}$　■

$\boxed{7}$ (1) $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_{11} = \frac{1}{6} + 10d, \quad a_{40} = \frac{1}{6} + 39d$$

$\displaystyle\sum_{k=11}^{40} a_k = 250$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 30\left\{\left(\frac{1}{6} + 10d\right) + \left(\frac{1}{6} + 39d\right)\right\} = 250 \quad \text{これを解いて} \quad d = \frac{1}{3}$$

よって，$\{a_n\}$ の一般項は $\quad a_n = \dfrac{1}{6} + (n-1)\cdot\dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}n - \dfrac{1}{6}}$

(2) (1) の結果から，$a_n \leqq 10$ のとき

$$\frac{1}{3}n - \frac{1}{6} \leqq 10 \quad \text{ゆえに} \quad n \leqq 30 + \frac{1}{2}$$

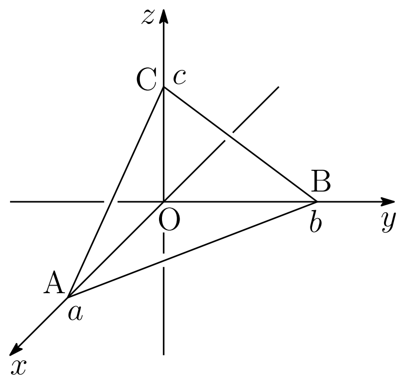
これを満たす n の最大値 N は **30**

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k &= \sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{3}k - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 30(30+1) - \frac{1}{6}\cdot 30 = \mathbf{150}\end{aligned}$$

■

8 (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ b,\ 0),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a,\ 0,\ c)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{r} = (bc,\ ca,\ ab)$$

とおくと，$\vec{n}$ の x 成分の符号に注意して

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}(bc,\ ca,\ ab)}$$

(2) $$\vec{r} = (bc,\ ca,\ ab) = \frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{r}$ に平行であるから (k は定数) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{r} \quad \cdots ②$

① を ② に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= k\left(\frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{bc}{a}k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

H は平面 α 上の点であるから $\dfrac{bc}{a}k + \dfrac{ca}{b}k + \dfrac{ab}{c}k = 1$

したがって $k = \dfrac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2} = \dfrac{abc}{|\vec{r}|^2} \quad \cdots ③$

②，③ および $k > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}\vec{r}\\ &= \boldsymbol{\frac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}(bc,\ ca,\ ab)}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = k|\vec{r}| = \frac{abc}{|\vec{r}|^2}|\vec{r}| = \frac{abc}{|\vec{r}|} = \boldsymbol{\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}}$$

(3) (1) の結果から $n_1 = \dfrac{bc}{|\vec{r}|}$

四面体 OABC の体積により，$\dfrac{1}{3}S_1a = \dfrac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ であるから

$$S_1a = S \times \frac{abc}{|\vec{r}|} \qquad \text{ゆえに} \qquad S_1 = \frac{bc}{|\vec{r}|}S = n_1S$$

■

$\boxed{9}$ (1) $f(\theta)=\sin^3\theta+a\cos 2\theta+\dfrac{21}{4}\sin\theta$ に $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-a+\frac{21}{4}=\frac{25}{4}-a$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{13}{4}$ であるから

$$\frac{25}{4}-a=\frac{13}{4}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=3}$$

(2) $a=3$，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より

$$\begin{aligned} f(\theta)&=t^3+3(1-2t^2)+\frac{21}{4}t \\ &=\boldsymbol{t^3-6t^2+\frac{21}{4}t+3} \end{aligned}$$

(3) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-1\leqq t\leqq 1$

$$g(t)=t^3-6t^2+\frac{21}{4}t+3 \qquad (-1\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} g'(t)&=3t^2-12t+\frac{21}{4} \\ &=\frac{3}{4}(4t^2-16t+7)=\frac{3}{4}(2t-1)(2t-7) \end{aligned}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{13}{4}$

よって $t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{17}{4}}$

$t=-1$ すなわち $\boldsymbol{\theta=-\dfrac{\pi}{2}}$ のとき **最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{37}{4}}$

■

4.2 2016 年

- 理工学部 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部 $\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部 $\boxed{1}$ (1)(2), $\boxed{4}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部 $\boxed{1}$ (1)(2), $\boxed{4}$, $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 < p < 1$ とする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ．

(1) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 0 でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1) $-\overline{z}$

(2) $\dfrac{1}{z^2}$

(3) $z - |z|$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 1 から 5 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつある．これらから 4 枚を選び，横 1 列に並べる．並べられたカードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) カードの並べ方の総数を求めよ．

(2) 次のルールのもとで，3 と 4 のカードを捨てる場合は何通りあるかを求めよ．

- $a < b < c < d$ ならば，b と c のカードを捨てる．
- $a < b < d < c$ ならば，b と d のカードを捨てる．
- $b < a < c < d$ ならば，a と c のカードを捨てる．
- $b < a < d < c$ ならば，a と d のカードを捨てる．
- その他は何も捨てない．

(3) (2) のルールのもとで，何も捨てない確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 つの曲線 $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 実数 a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$a^2 + b^2 = 1$ を満たしているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 定積分

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, a\sin x - b\cos x \,|\, dx$$

を a，b を用いて表せ．

(2) S の最大値，最小値とそのときの a，b の値をそれぞれ求めよ．

7 複素数平面上の点 z に対して

$$w = \frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}$$

で表される点 w をとる．このとき，次の問に答えよ．

(1) $w = z$ となるような点 z は 2 つある．これらを求めよ．

(2) (1) で求めた異なる 2 点を α，β とする．ただし，$0 \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 2\pi$ とする．z が α，β と異なる点であるとき，

$$\frac{w-\beta}{w-\alpha} = k\cdot\frac{z-\beta}{z-\alpha}$$

となるような定数 k の値を求めよ．

(3) 複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \frac{3(1-i)z_n-2i}{z_n+3(1-i)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また，z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．さらに，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の極限を求めよ．

8 空間に 3 点 A$(1,\ 2,\ 6)$，B$(7,\ 0,\ 9)$，C$(s,\ t,\ 0)$ がある．ただし，s，t は実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を s と t を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ となるとき，s と t の関係式を求めよ．

(3) $\triangle$ABC が $\angle$BAC $= 90^\circ$ の直角二等辺三角形となるとき，s と t の値を求めよ．

9 O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(4,\ 0)$，P$(t,\ 0)$ をとる．ただし，$0 < t < 4$ とする．さらに放物線 $C : y = -x^2 + 7x$ 上に 2 点 B$(4,\ 12)$，Q$(t, -t^2 + 7t)$ をとる．$\triangle$APB の面積を $f(t)$ とし，放物線 C，線分 PQ，線分 OP によって囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $g(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $h(t) = f(t) + g(t)$ とおく．$0 < t < 4$ における $h(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = -pb_n$$

$\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$，公比 $-p$ の等比数列であるから

$$b_n = 1\cdot(-p)^{n-1} = \boldsymbol{(-p)^{n-1}}$$

(2) (1) の結果から $\quad a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき $\qquad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k-1} = 1 + \dfrac{1-(-p)^{n-1}}{1+p}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_n = 1 + \dfrac{1-(-p)^{n-1}}{1+p}}$

(3) $0 < p < 1$ より $\quad -1 < -p < 0$ であるから $\quad \lim_{n\to\infty}(-p)^{n-1} = 0$

よって $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \dfrac{1}{1+p} = \boldsymbol{\dfrac{2+p}{1+p}}$

別解 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} + pa_{n+1} = a_{n+1} + pa_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + pa_n = a_2 + pa_1 = 2 + p$$

上式と $a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$ の差をとると

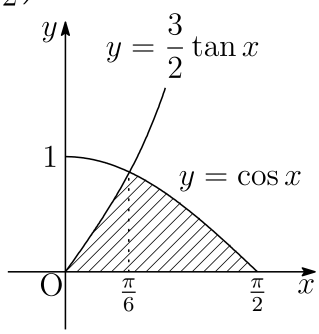
$$(1+p)a_n = 2 + p - (-p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{2+p-(-p)^{n-1}}{1+p}$$

■

2 (1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，$\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ であるから

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$
$$= \boldsymbol{\tan x - x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(2) $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の共有点の x 座標は



$$\frac{3}{2}\tan x = \cos x$$
$$3\sin x = 2\cos^2 x$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$
$$(\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　　$x = \dfrac{\pi}{6}$

したがって，求める立体の体積を V とすると

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{2}\tan x\right)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$
$$= \frac{9}{4}\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx$$
$$= \frac{9}{4}\pi \Big[\ \tan x - x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2}\Big[\ x + \frac{1}{2}\sin 2x\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{5}{24}\pi^2}$$

■

3 (1) $-\overline{z} = (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$
$$= \boldsymbol{r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}}$$

(2) $\dfrac{1}{z^2} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{-2}$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}}$$

(3) $z - |z| = r(\cos\theta + i\sin\theta) - r = r(\cos\theta - 1 + i\sin\theta)$
$$= r\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2r\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$2r\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ ■

4　(1) 異なる5枚のカードから4枚を1列に並べる順列の総数であるから

$${}_5\mathrm{P}_4 = 5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2 = \mathbf{120}\ (\text{通り})$$

(2) i) $a < b < c < d$ において，$(b,\ c) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

ii) $a < b < d < c$ において，$(b,\ d) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(a,\ b,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

iii) $b < a < c < d$ において，$(a,\ c) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(b,\ a,\ c,\ d) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

iv) $b < a < d < c$ において，$(a,\ d) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(b,\ a,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

i)〜iv) の総数であるから　$2+2+2+2 = \mathbf{8}$ (通り)

(3) 捨てられるカードは，3と4，2と3，2と4の3つの場合がある．
2と3の場合は，(2) で求めた3と4の場合と同様に8通り．
また，2と4の場合は，次の i)〜iv) の4通り．

i) $a < b < c < d$ において，$(b,\ c) = (2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

ii) $a < b < d < c$ において，$(b,\ d) = (2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ d,\ c) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

iii) $b < a < c < d$ において，$(a,\ c) = (2,\ 4)$ のとき

$$(b,\ a,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

iv) $b < a < d < c$ において，$(a,\ d) = (3,\ 4)$ のとき

$$(b,\ a,\ d,\ c) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

したがって，カードを捨てる確率は　$\dfrac{8+8+4}{120} = \dfrac{1}{6}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{6} = \boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$　■

5　**2** (2) と同じ　■

6 (1) a，b の条件から

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,a\sin x - b\cos x\,|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta\sin x - \sin\theta\cos x|\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x-\theta)|\,dx \\
&= -\int_0^{\theta} \sin(x-\theta) + \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-\theta)\,dx \\
&= \Big[\ \cos(x-\theta)\ \Big]_0^{\theta} - \Big[\ \cos(x-\theta)\ \Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 - \cos\theta - \sin\theta \quad \cdots ① \\
&= \boldsymbol{2 - a - b}
\end{aligned}$$

(2) ① から

$$S = 2 - \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{(a,\ b) = (1, 0), (0, 1)}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{1}$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2 - \sqrt{2}}$　■

$\boxed{7}$ (1) $w=z$ のとき　$z=\dfrac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}$　整理すると　$z^2=-2i$

$-2i=2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくと

$$r^2=2,\quad 2\theta=\frac{3}{2}\pi+2n\pi\ (n\text{ は整数})$$

したがって　$r=\sqrt{2},\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

すなわち　$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)=\boldsymbol{-1+i}$

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)=\boldsymbol{1-i}$

(2) (1) の結果から，$\alpha=-1+i$，$\beta=1-i$ であるから

$$\begin{aligned}w-\alpha&=\frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}-(-1+i)\\&=\frac{3(1-i)z-2i+(1-i)\{z+3(1-i)\}}{z+3(1-i)}=\frac{4(1-i)(z-\alpha)}{z+3(1-i)}\\w-\beta&=\frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}-(1-i)\\&=\frac{3(1-i)z-2i-(1-i)\{z+3(1-i)\}}{z+3(1-i)}=\frac{2(1-i)(z-\beta)}{z+3(1-i)}\end{aligned}$$

上の 2 式から　$\dfrac{w-\beta}{w-\alpha}=\dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}\cdot\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$　ゆえに　$k=\dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{z_{n+1}-\beta}{z_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}$　ゆえに　$\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{z_1-\beta}{z_1-\alpha}$

$z_1=0$，$-\alpha=\beta$ であるから

$$\frac{z_n-\beta}{z_n+\beta}=-\frac{1}{2^{n-1}}\quad\text{ゆえに}\quad z_n=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}\beta=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}(1-i)$$

よって　$\boldsymbol{x_n=\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}}$，　$\boldsymbol{y_n=-\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=\boldsymbol{1}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=\boldsymbol{-1}$

■

8 (1) A(1, 2, 6)，B(7, 0, 9)，C(s, t, 0) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6, -2,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s-1,\ t-2, -6)$$

したがって
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6(s-1) - 2(t-2) + 3\cdot(-6) = \boldsymbol{6s - 2t - 20}$$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ であるから

$$6^2 + (-2)^2 + 3^2 = (s-1)^2 + (t-2)^2 + (-6)^2$$

したがって $\boldsymbol{(s-1)^2 + (t-2)^2 = 13}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ を (1) の結果に代入すると

$$6s - 2t - 20 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 3s - 10 \quad \cdots ①$$

さらに，① を (2) の結果に代入すると

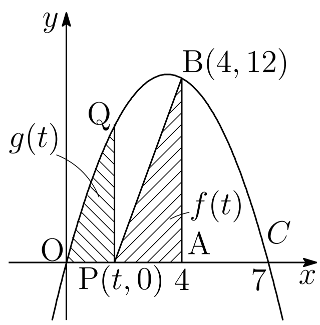
$$(s-1)^2 + (3s - 10 - 2)^2 = 13 \quad \text{整理すると} \quad 5s^2 - 37s + 66 = 0$$

ゆえに $(s-3)(5s-22) = 0$ これを解いて $s = 3,\ \dfrac{22}{5}$

よって，① から $\boldsymbol{(s,\ t) = (3, -1),\ \left(\dfrac{22}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)}$ ■

9 (1) 右の図から $f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}(4-t)\cdot 12 = \boldsymbol{-6t + 24}$

(2) 右の図から



$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t (-x^2 + 7x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^t \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から $h(t) = f(t) + g(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{7}{2}t^2 - 6t + 24$

これを微分すると $h'(t) = -t^2 + 7t - 6 = -(t-1)(t-6)$

$0 < t < 4$ であるから，その増減表は

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘	極小	↗	

よって，最小値は $\boldsymbol{h(1) = \dfrac{127}{6}}$ ■

4.3　2017 年

- 理工学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$, $\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{1}$ 平面上に三角形 OAB があり，点 A$'$，B$'$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしているとする．線分 A$'$B$'$ を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 OP と線分 AB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ および $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ を求めよ．

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ であり，さらに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交しているとき，三角形 OAB の面積および三角形 PAB の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ a を正の定数とする．関数 $f(x) = \dfrac{(\log ax)^3}{x}$ $(x > 0)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が $x = b$ で極大値 $\dfrac{54}{e^3}$ をとるとき，a および b を求めよ．

(2) (1) の a に対して，不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) (1) の a，b に対して，曲線 $y = f(x)$ $(0 < x \leqq b)$，直線 $x = b$ および x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{3}$ 曲線 $C : y = \dfrac{\sin x}{e^x}$ について，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$ の導関数および $\dfrac{\sin x}{e^x}$ の不定積分を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，曲線 C の $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を a_n とする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ と定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，曲線 C の $0 \leqq x \leqq n\pi$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

4 複素数 α，β が

$$|\alpha| = 1, \quad |\beta| = \sqrt{2}, \quad |\alpha - \beta| = 1$$

を満たし，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8$ を求めよ．

(2) $|\alpha + \beta|$ を求めよ．

(3) n が 8 で割ると 1 余る整数のとき，$|\alpha^n + \beta^n|$ を n を用いて表せ．

5 関数

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right) \quad (x \geqq 1)$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) $f'(x) = 0$ を満たすような x のうち，最小のものを求めよ．

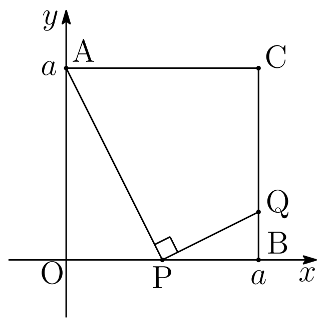
(2) $f(x) = \dfrac{1}{10}$ はただ 1 つの解をもつことを示せ．

(3) $t \geqq 1$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$ を t を用いて表せ．

6 正の定数 a に対して，3 点 A$(0,\ a)$，B$(a,\ 0)$，C$(a,\ a)$ をとる．線分 OB の上の点 P$(t,\ 0)$ と線分 BC 上の点 Q において，

$$\angle\mathrm{APQ} = 90^\circ$$

が成り立つとき，次の問に答えよ．ただし，$0 < t < a$ とする．



(1) 三角形 PBQ の面積 S を a と t を用いて表せ．

(2) S の最大値とそのときの t の値を a を用いて表せ．

7 数直線上で，点 P は原点 O を出発点とし，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ進み，裏が出れば負の向きに 1 だけ進むものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) コインを 7 回投げ終えたとき，点 P の位置が 1 となる確率を求めよ．

(2) コインを 6 回投げ終えたときまでに点 P がちょうど 2 回正の位置にあり，7 回投げ終えたときに点 P の位置が 1 となる確率を求めよ．

8 原点 O を中心とする半径 2 の円 C_1 に，点 P を中心とする半径 1 の円 C_2 が点 A$(a,\ b)$ で内接しているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C_2 の方程式を求めよ．

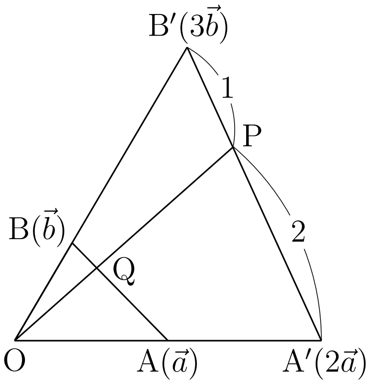
(2) 円 C_1 上に点 B$(c,\ d)$ をとる．ただし，$ac+bd \neq 0$ とする．直線 OB と円 C_2 との交点のうち，原点 O 以外のものを Q とする．点 Q の座標を求めよ．

(3) 点 B，点 Q を (2) のものとし，A $\neq$ B とする．$\angle$AOQ $= \theta$ とおくとき，$\angle$APQ および線分 OQ の長さを θ を用いて表せ．

正解

1 (1) P は線分 A′B′ を 2 : 1 に内分するので，
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{2+1} = \frac{2\vec{a} + 2\cdot 3\vec{b}}{3} = \boldsymbol{\frac{2\vec{a} + 6\vec{b}}{3}}$$



(2) Q は線分 AB 上の点であるから，(1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4} = \frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \qquad \text{よって} \qquad \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{3}(\vec{a} + 3\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交しているとき

$$(\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \quad \text{整理すると} \quad -|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 0$$

これに $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ を代入すると

$$-5 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\cdot 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2$$

したがって，三角形 OAB の面積は

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 3 - 2^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$$

(2) の結果から，$\triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{PAB} = \mathrm{OQ} : \mathrm{PQ} = 1 : \dfrac{5}{3}$ であるから

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{5}{3}\triangle\mathrm{OAB} = \frac{5}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{2} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{11}}{6}}$$

■

2 (1) $f(x) = \dfrac{(\log ax)^3}{x}$ を微分すると $(a > 0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(\log ax)^2(\log ax)'x - (\log ax)^3}{x^2} \\ &= \frac{(\log ax)^2(3 - \log ax)}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = \dfrac{1}{a},\ \dfrac{e^3}{a}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{27a}{e^3}$	$\searrow$

このとき，$x = b$ で極大値 $\dfrac{54}{e^3}$ をとるから

$$b = \frac{e^3}{a},\quad \frac{54}{e^3} = \frac{27a}{e^3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = 2,\ \ b = \frac{e^3}{2}}$$

(2) $a = 2$ に対して

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{(\log 2x)^3}{x}\,dx = \int (\log 2x)^3(\log 2x)'\,dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(\log 2x)^4 + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(3) (1) の増減表および (2) の結果から，求める図形の面積を S とすると

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} f(x)\,dx = \left[\,\frac{1}{4}(\log 2x)^4\,\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} = \boldsymbol{\frac{81}{4}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$\left(\frac{\sin x+\cos x}{e^x}\right)' = \{e^{-x}(\sin x+\cos x)\}'$$
$$= -e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$$
$$= -2e^{-x}\sin x = -\frac{\mathbf{2\sin} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e^x}}$$

上式より，$\left(-\dfrac{\sin x+\cos x}{2e^x}\right)' = \dfrac{\sin x}{e^x}$ であるから

$$\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx = -\frac{\boldsymbol{\sin x+\cos x}}{\boldsymbol{2e^x}} + \boldsymbol{C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(2) $C : y = \dfrac{\sin x}{e^x}$ は，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において，$y \geqq 0$ であるから

$$a_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{e^x}\,dx = \left[-\frac{\sin x+\cos x}{2e^x}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$
$$= \frac{1}{2e^{(2n+1)\pi}} + \frac{1}{2e^{2n\pi}} = \frac{1+e^\pi}{2e^{(2n+1)\pi}} = \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\cdot(e^{-2\pi})^n$$

$0 < e^{-2\pi} < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\sum_{k=0}^{n}(e^{-2\pi})^k$$
$$= \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\times\frac{1}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\times\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} = \frac{\boldsymbol{e^\pi}}{\boldsymbol{2(e^\pi-1)}}$$

(3) $$\frac{V_n}{\pi} = \int_0^{n\pi}\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2 dx$$
$$= \int_0^{n\pi} e^{-2x}\sin^2 x\,dx = \int_0^{n\pi}\frac{1}{2}e^{-2x}(1-\cos 2x)\,dx$$

ここで　$(e^{-2x}\sin 2x)' = 2e^{-2x}(-\sin 2x+\cos 2x)$

$(e^{-2x}\cos 2x)' = 2e^{-2x}(-\sin 2x-\cos 2x)$

上の 2 式から　$\{e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)\}' = 4e^{-2x}\cos 2x$

ゆえに　$\displaystyle\int e^{-2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+C$　(C は積分定数)

したがって　$\dfrac{V_n}{\pi} = \left[\dfrac{1}{8}e^{-2x}(-2-\sin 2x+\cos 2x)\right]_0^{n\pi} = \dfrac{1}{8}(1-e^{-2n\pi})$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}(1-e^{-2n\pi}) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$　■

$\boxed{4}$ (1) 複素数平面上の原点をOとし，α，β を表す点をそれぞれA，Bとすると，△ABCはOA $=1$，OB $=\sqrt{2}$，AB $=1$ の直角二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4}$$

このとき，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{2}$ で，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部が正であるから

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{1+i}$$

また　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8=(\sqrt{2})^8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\mathbf{16}$

別解 $w=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{2}$，$|\alpha-\beta|=1$ より

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{2},\quad \frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha|}=1 \quad \text{すなわち} \quad |w|=\sqrt{2},\quad |1-w|=1$$

$|1-w|^2=1$ より，$(1-w)(1-\overline{w})=1$ であるから

$$1-w-\overline{w}+|w|^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad w+\overline{w}=2$$

したがって　$\mathrm{Re}(w)=\dfrac{w+\overline{w}}{2}=1$

w の虚部は正であるから　$\mathrm{Im}(w)=\sqrt{|w|^2-1^2}=1$

よって　$w=1+i$

(2) (1)の結果から，$\beta=(1+i)\alpha$ であるから

$$|\alpha+\beta|=|\alpha+(1+i)\alpha|=|\alpha||2+i|=1\sqrt{2^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(3) (1) の結果から，$\beta = \alpha(1+i)$ であるから

$$\begin{aligned}|\alpha^n + \beta^n| &= |\alpha^n + \alpha^n(1+i)^n| \\ &= |\alpha|^n|1+(1+i)^n| = |1+(1+i)^n| \quad \cdots ①\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{n-1}{8}$ は整数であるから

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n \\ &= (\sqrt{2}\,)^n\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left\{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8\right\}^{\frac{n-1}{8}} \\ &= (\sqrt{2}\,)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^{\frac{n-1}{8}} \\ &= (\sqrt{2}\,)^{n-1}(1+i) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$\begin{aligned}|\alpha^n + \beta^n|^2 &= |1+(\sqrt{2}\,)^{n-1}(1+i)|^2 \\ &= |1+(\sqrt{2}\,)^{n-1} + (\sqrt{2}\,)^{n-1}i|^2 \\ &= \{1+(\sqrt{2}\,)^{n-1}\}^2 + \{(\sqrt{2}\,)^{n-1}\}^2 \\ &= 1 + 2(\sqrt{2}\,)^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &= 1 + 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^n\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{1 + 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^n}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos^2\left(\dfrac{\log x}{2}\right)\quad(x\geqq 1)$ より

$$f(x)=\frac{1}{2x}\{\cos(\log x)+1\}$$

$x\geqq 1$ より，$x=e^\theta$ $(\theta\geqq 0)$ とおくと

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\theta}(\cos\theta+1)\quad\cdots(*)$$

上式を θ について微分すると

$$f'(x)\frac{dx}{d\theta}=-\frac{1}{2}e^{-\theta}(\sin\theta+\cos\theta+1)\quad\cdots(**)$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=e^\theta$ であるから

$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-2\theta}(\sin\theta+\cos\theta+1)$$

$f'(x)=0$ を満たすとき　$\sin\theta+\cos\theta+1=0\quad(\theta\geqq 0)$

これを満たす最小の θ を求めればよいので

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1\quad\text{すなわち}\quad\theta=\pi$$

よって，求める x は　$\boldsymbol{x=e^\pi}$

(2) $g(\theta)=f(x)$ とおくと，$(*)$ より

$$g(\theta)=\frac{1}{2}e^{-\theta}(\cos\theta+1)$$

$g(\theta)=f(x)$ を θ について微分すると，$(**)$ より

$$\begin{aligned}g'(\theta)=f'(x)\frac{dx}{d\theta}&=-\frac{1}{2}e^{-\theta}(\sin\theta+\cos\theta+1)\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\end{aligned}$$

n を 0 以上の整数とすると，$g(\theta)$ は，次の極値をとる．

極小値 $g((2n+1)\pi)=0$,

極大値 $g((2n+\frac{3}{2}\pi))=\dfrac{1}{2}e^{-\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}$

連続関数 $g(\theta)$ の最大の極大値は $\quad g(\frac{3}{2}\pi) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\pi}$

ここで $\quad \dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\pi} < \dfrac{1}{2}e^{-3} < \dfrac{1}{2}\cdot 2^{-3} < \dfrac{1}{10} \quad$ ゆえに $\quad g(\frac{3}{2}\pi) < \dfrac{1}{10}$

したがって，$\theta \geqq \pi$ において，$g(\theta) = \dfrac{1}{10}$ を満たす θ は存在しない．

また，$g(\theta)$ は，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において単調減少で，$g(0) = 1$，$g(\pi) = 0$ であるから，この区間において，$g(\theta) = \dfrac{1}{10}$ を満たす θ がただ 1 つ存在する．

よって，$f(x) = \dfrac{1}{10}$ はただ 1 つの解をもつ．

(3) $f(x) = \dfrac{1}{2x}\cos(\log x) + \dfrac{1}{2x}$ であるから，$t \geqq 1$ のとき

$$\int_1^t f(x)\,dx = \left[\,\frac{1}{2}\sin(\log x) + \frac{1}{2}\log x\,\right]_1^t = \boldsymbol{\frac{\sin(\log t) + \log t}{2}}$$

■

$\boxed{6}$ (1) $\theta = \angle\mathrm{PAO} = \angle\mathrm{QPB}$ とおくと　$\tan\theta = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AO}} = \dfrac{t}{a}$ より

$$\mathrm{BQ} = \mathrm{PB}\tan\theta = (a-t)\cdot\frac{t}{a} = \frac{t}{a}(a-t)$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BQ} = \dfrac{1}{2}(a-t)\cdot\dfrac{t}{a}(a-t) = \boldsymbol{\dfrac{t}{2a}(a-t)^2}$

(2) $f(t) = \dfrac{t}{2a}(a-t)^2 \quad (0 < t < a)$ とおくと

$$f(t) = \frac{1}{2a}(t^3 - 2at^2 + a^2t)$$

これを微分すると

$$f'(t) = \frac{1}{2a}(3t^2 - 4at + a^2) = \frac{1}{2a}(t-a)(3t-a)$$

$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	(a)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{2}{27}a^2$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{t = \dfrac{a}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{27}a^2}$ をとる．

別解 3 つの正数 $2t$，$a-t$，$a-t$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2t+(a-t)+(a-t)}{3} \geqq \sqrt[3]{2t(a-t)(a-t)}$$

したがって　$2t(a-t)^2 \leqq \dfrac{8}{27}a^3$　ゆえに　$\dfrac{t}{2a}(a-t)^2 \leqq \dfrac{2}{27}a^2$

上式において，等号が成立するのは

$$2t = a-t \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{3}{a}$$

よって，$t = \dfrac{3}{a}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{2}{27}a^2$ をとる．　■

7 (1) 求める確率は，コインを 7 回投げ終えたとき，表が 4 回，裏が 3 回出る確率であるから

$$ {}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \boldsymbol{\frac{35}{128}} $$

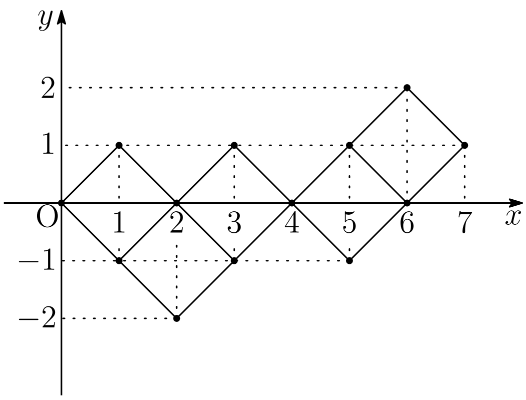
(2) x 回投げ終えたときの座標が y であるとすると，P は下のグラフの実線上にある格子点を $(0,0)$ から $(7,1)$ を移動する．

(i) $(6,0)$ を通るとき，1，3，5 回目のどこで 2 回 y 座標が 1(正) になるかであるから，その過程は

$$ (0,0) \to (1,1) \to (2,0) \to (3,1) \to (4,0) \to (5,-1) \to (6,0) $$
$$ (0,0) \to (1,1) \to (2,0) \to (3,-1) \to (4,0) \to (5,1) \to (6,0) $$
$$ (0,0) \to (1,-1) \to (2,0) \to (3,1) \to (4,0) \to (5,1) \to (6,0) $$

(ii) $(6,2)$ を通るとき，$(5,1)$ を通るから，y 座標が正になるのは $0 \leqq x \leqq 4$ ではないから，その過程は

$$ (0,0) \to (1,-1) \to (2,0) \to (3,-1) \to (4,0) \to (5,1) \to (6,2) $$
$$ (0,0) \to (1,-1) \to (2,-2) \to (3,-1) \to (4,0) \to (5,1) \to (6,2) $$



(i)，(ii) より，求める確率は

$$ 5\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \boldsymbol{\frac{5}{128}} $$

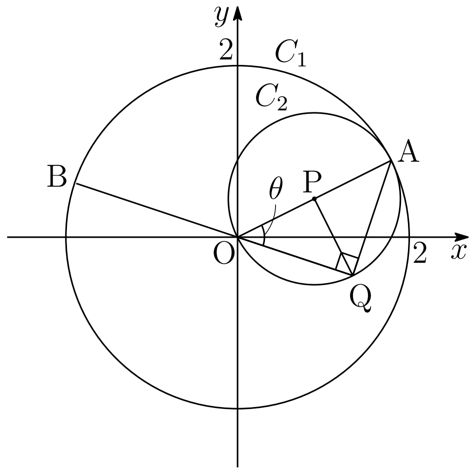
■

8 (1) P は線分 OA の中点であるから

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$$

C_2 は P を中心とする半径 1 の円であるから

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1}$$



(2) B$(c,\ d)$ より，直線 OB の方程式は $\qquad dx-cy=0 \quad \cdots①$

$\angle$AQO は，C_2 の直径に対する円周角であるから $\qquad \angle\mathrm{AQO}=90^\circ$

直線 AQ は点 A$(a,\ b)$ を通り，直線 ① に垂直であるから

$$c(x-a)+d(y-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad cx+dy=ac+bd \quad \cdots②$$

B は $C_2 : x^2+y^2=4$ 上の点であるから $\qquad c^2+d^2=4$

Q は ①，② の交点で，上式に注意してこれを解くと

$$x=\frac{c(ac+bd)}{4},\quad y=\frac{d(ac+bd)}{4}$$

よって $\qquad \boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{c(ac+bd)}{4},\ \frac{d(ac+bd)}{4}\right)}$

(3) PO = PQ であるから $\qquad \angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{PQO}=\theta$

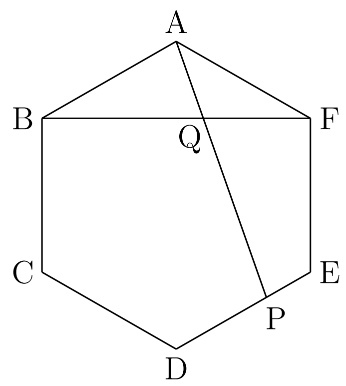
よって $\qquad \angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{POQ}+\angle\mathrm{PQO}=\theta+\theta=\boldsymbol{2\theta}$

(1) の図から $\qquad \mathrm{OQ}=\mathrm{AO}\cos\theta=\boldsymbol{2\cos\theta}$ ■

4.4　2018 年

- 理工学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$, $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 下の図のような 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において，線分 DE を $2:1$ に内分する点を P とし，直線 AP と直線 BF の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ.



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ の値を求めよ.

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で定められているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 4 つの有理数 p，q，r，s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする．このとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい．

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと，$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数) と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ．

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して，p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ．

3 $f(x) = xe^{-x}$ とする．O$(0,\ 0)$，P$(t,\ 0)$，Q$(t,\ f(t))$，R$(4,\ 0)$ とする．ただし，$0 < t < 4$ とする．△PQR の面積を $S_1(t)$ とし，線分 OQ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ は用いてよい．

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(4) $S(t)$ の極値を求めよ．

4 曲線 $C: y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ をとる．ただし，点 P および原点を通る直線と点 P における曲線 C の接線が垂直に交わっているものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\log t$ を t についての整式で表せ．

(2) $0<x<1$ の範囲で不等式

$$2\log x < -x^2+4x-3$$

が成立することを示せ．

(3) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}$ とおく．$S=\dfrac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式 $f(t)$，$g(t)$ を一組求めよ．また，$S>1.1$ となることを示せ．

5 次の問に答えよ．

(1) 1，4，9，16 のように，自然数の 2 乗で表せる数を平方数という．n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数であることを示せ．

(2) a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ．

6 関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であり，すべての実数 x，y について等式

$$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x$$

が成り立つとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(0)$ を求めよ．

(2) a を実数とする．$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であることを示せ．

(3) $f'(0)=3$ であるとする．$f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ．

7 $f(x)=2x(3-x)$，$g(x)=x(x-4)$ とおき，$0<t<3$ とする．$0 \leqq x \leqq t$ の範囲での曲線 $y=f(x)$，x 軸，直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$ とする．$t \leqq x \leqq 4$ の範囲での曲線 $y=g(x)$，x 軸，直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(3) t が $0<t<3$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ．

8 a を正の数とする．放物線 $C_1 : y = x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に $2a$ だけ平行移動した放物線を C_2 とする．C_1 と C_2 の交点を P とするとき，次の問に答えよ．

(1) 点 P の座標を a を用いて表せ．

(2) 放物線 C_2 の点 P における接線の方程式を a を用いて表せ．

(3) (2) で求めた接線の傾きと y 切片がともに正となるような正数 a の値の範囲を求めよ．

9 座標平面上で，点 P は原点 O を出発点とし，サイコロを投げて奇数の目が出ればその目の分だけ x 軸と平行に正の方向に進み，偶数の目が出ればその目の分だけ y 軸と平行に正の方向に進むものとする．n を 2 以上の自然数とするとき，次の問に答えよ．

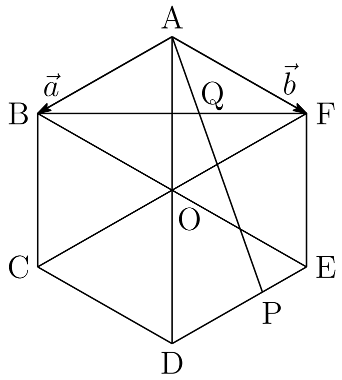
(1) サイコロを 3 回投げ終えたとき，点 P の x 座標と y 座標が等しくなる確率を求めよ．

(2) サイコロを n 回投げ終えたとき，点 P の y 座標が 2 となる確率を n を用いて表せ．

(3) サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときには点 P の y 座標が 2 以下であり，かつ n 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 4 以上である確率を n を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 正六角形の対角線 AD，BE，CF の交点を O とする．



$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 2(\vec{a}+\vec{b}) = \boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{b} = \vec{a}+2\vec{b}$

点 P は線分 DE を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2+1} = \frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2(\vec{a}+2\vec{b})}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a}+2\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\left(\frac{4}{3}\vec{a}+2\vec{b}\right) = \frac{4}{3}k\vec{a}+2k\vec{b}$$

このとき，Q は線分 BF 上の点であるから

$$\frac{4}{3}k+2k=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{3}{10}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{10}\vec{a}+2\cdot\frac{3}{10}\vec{b} = \boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}}$

(4) (3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{5}(2\vec{a}+3\vec{b})$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 120° であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 1\cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+3\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2 \\ &= 4\cdot 1^2+12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\cdot 1^2 = 7\end{aligned}$$

$|2\vec{a}+3\vec{b}| = \sqrt{7}$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \frac{1}{5}|2\vec{a}+3\vec{b}| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{5}}$ ■

2

$$(*)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

(1) $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ より　$(q - s)\sqrt{2} = r - p \quad \cdots (*)$

$q - s \neq 0$ と仮定すると　　$\sqrt{2} = \dfrac{r - p}{q - s}$　($p,\ q,\ r,\ s$ は有理数)

上式について，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾．
したがって，$q - s = 0$　これを $(*)$ に代入して　$r - p = 0$

よって　$p = r$ かつ $q = s$

(2)
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n = 1$ のとき，$a_1 = 1$ であるから

$$\left(1 - \frac{1}{1}\right)\sqrt{2} < a_1 < \sqrt{2}$$

このとき，(A) は成立する．
［2］$n = k$ のとき，(A) が成立する，すなわち

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sqrt{2} < a_k < \sqrt{2}$$

であると仮定すると，$(*)$ より

$$\sqrt{2} - a_{k+1} = \sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1}\right) = \frac{a_k}{k+1} > 0,$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\sqrt{2} &= \sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - a_k}{k+1} > 0 \end{aligned}$$

したがって　　$\left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right)\sqrt{2} < a_{k+1} < \sqrt{2}$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) は成立する．
［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

$$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}\ (p_n \text{ および } q_n \text{ は有理数}) \quad \cdots \text{(B)}$$

［1］ $n=1$ のとき，$a_1 = 1$ であるから

$$1 = 1 + 0\cdot\sqrt{2} \quad (p_1 = 1,\ q_1 = 0) \quad \cdots ①$$

と表されるから，(B) は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，(B) が成立する，すなわち

$$a_k = p_k + q_k\sqrt{2} \quad (p_k \text{ および } q_k \text{ は有理数})$$

と表されると仮定すると，(∗) より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{2} - \frac{p_k + q_k\sqrt{2}}{k+1} \\ &= -\frac{p_k}{k+1} + \left(1 - \frac{q_k}{k+1}\right)\sqrt{2} \end{aligned}$$

このとき

$$p_{k+1} = -\frac{p_k}{k+1}, \quad q_{k+1} = 1 - \frac{q_k}{k+1} \quad \cdots (**)$$

とおくと，p_k，q_k が有理数であるから，p_{k+1}，q_{k+1} も有理数である．
よって，$n = k+1$ のときも (B) は成立する．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，(B) は成立する．

(3) ① および (∗∗) の第 1 式より　$p_1 = 1$，$p_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}p_n$

したがって　　$(n+1)!p_{n+1} = -n!p_n$

数列 $\{n!p_n\}$ は，初項 $1!p_1 = 1$，公比 -1 の等比数列であるから

$$n!p_n = (-1)^{n-1}\cdot 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}}$$

■

3　(1)　$f(x) = xe^{-x}$ より

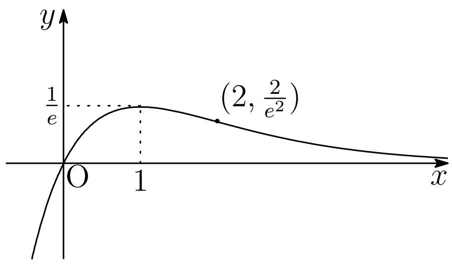
$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$	変曲点 $\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

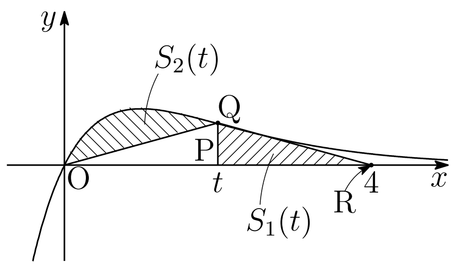
また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

よって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



(2)　P$(t,\ 0)$，Q$(t,\ te^{-t})$，R$(4,\ 0)$ より，△PQR の面積 $S_1(t)$ は

$$S_1(t) = \frac{1}{2}(4-t)\cdot te^{-t}$$
$$= \boldsymbol{\frac{t}{2}(4-t)e^{-t}}$$



(3)　右上の図から

$$S_2(t) = \int_0^t xe^{-x}\,dx - \triangle\text{OPQ}$$
$$= \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_0^t - \frac{1}{2}t\cdot te^{-t}$$
$$= -e^{-t}(t+1) + 1 - \frac{t^2}{2}e^{-t} = \boldsymbol{1 - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}}$$

(4) (2),(3) の結果から

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \frac{t}{2}(4-t)e^{-t} + 1 - \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$$
$$= (-t^2 + t - 1)e^{-t} + 1$$

したがって
$$S'(t) = (-2t+1)e^{-t} + (-t^2+t-1)(-e^{-t})$$
$$= (t^2 - 3t + 2)e^{-t} = (t-1)(t-2)e^{-t}$$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(4)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$S(t)$		↗	極大	↘	極小	↗	

よって　極大値 $S(1) = \boldsymbol{1 - \frac{1}{e}}$

極小値 $S(2) = \boldsymbol{1 - \frac{3}{e^2}}$ ■

4 (1) 点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ および原点を通る直線の傾きは $\dfrac{\log t}{t}$

$y = \log x$ より　$y' = \dfrac{1}{x}$　ゆえに点 P における接線の傾きは $\dfrac{1}{t}$

直線 OP と C 上の点 P における接線が垂直であるから

$$\frac{\log t}{t}\cdot\frac{1}{t} = -1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\log t = -t^2}$$

(2) $h(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\log x$ とおくと

$$h'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} = -\frac{2x^2 - 4x + 2}{x} = -\frac{2(x-1)^2}{x}$$

$0 < x < 1$ において $h'(x) < 0$ であるから，$h(x)$ は単調減少．

$h(1) = 0$ であるあるから，$0 < x < 1$ において $h(x) > 0$，すなわち

$$-x^2 + 4x - 3 - 2\log x > 0$$

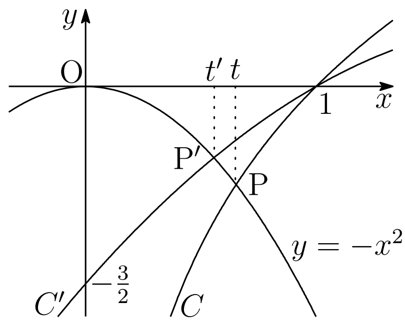
よって，$0 < x < 1$ において　$2\log x < -x^2 + 4x - 3$

(3) (1) の結果から　$\log t = -t^2 < 0$　すなわち　$0 < t < 1$

ゆえに　$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} = \frac{t}{1-t^2}$　よって　$\boldsymbol{f(t) = t,\ \ g(t) = 1 - t^2}$

(2) の結果から，$0 < x < 1$ において　$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} > \log x$

$C' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ とすると，$0 < x < 1$ において C' は C の上側にある．C，C' と $y = -x^2$ のグラフの交点の x 座標をそれぞれ t，t' とおくと，$t' < t$ である．ここで



$$S(x) = \frac{x}{1-x^2}\ (0 < x < 1)$$

とおくと　$S'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$

$S(x)$ は単調増加であるから

$$S(t) > S(t')\quad \text{すなわち}\quad S > S(t') \quad \cdots ①$$

$C' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$ と $y = -x^2$ のグラフの交点 P' の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = -x^2 \quad \text{ゆえに}\quad x^2 + 4x - 3 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意して　$x = \sqrt{7} - 2$　すなわち　$t' = \sqrt{7} - 2$

$$S(t') = \frac{t'}{1-t'^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{1-(\sqrt{7}-2)^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{4\sqrt{7}-10} = \frac{4+\sqrt{7}}{6} \quad \cdots ②$$

ここで　$\dfrac{4+\sqrt{7}}{6} - 1.1 = \dfrac{5\sqrt{7}-13}{30} = \dfrac{1}{5(5\sqrt{7}+13)} > 0 \quad \cdots ③$

①,②,③ から　　$S > 1.1$

別解 (1),(2) の結果から

$$-2t^2 < -t^2 + 4t - 3 \iff \sqrt{7} - 2 < t < 1$$

$S(x) = \dfrac{x}{1-x^2}\ (0 < x < 1)$ の単調増加性により

$$S(t) > S(\sqrt{7}-2) = \frac{\sqrt{7}-2}{4\sqrt{7}-10}$$

以下，②，③ より　$S = S(t) > 1.1$　■

5 (1) n を平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素である自然数})$$

を満たす整数 p，q が存在する．この両辺を平方すると

$$n = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ゆえに} \quad nq = \frac{p^2}{q} \quad \cdots ①$$

① の左辺は整数であり，右辺の p^2 は q と互いに素であるから

$$q = 1 \quad \text{これを①に代入して} \quad n = p^2$$

このとき，n は平方数となり，条件に反し矛盾．
よって，n が平方数でない自然数とするとき，$\sqrt{n}$ は無理数である．

(2) a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると

$$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = r \quad (r \text{ は有理数})$$

両辺を平方すると

$$a^2n + 2ab\sqrt{n(n+1)} + b^2(n+1) = r^2$$
$$\sqrt{n(n+1)} = \frac{r^2 - a^2n - b^2(n+1)}{2ab} \quad \cdots ②$$

② の右辺は有理数であるから，$\sqrt{n(n+1)}$ は有理数である．
したがって，(1) の結果により，$n(n+1)$ は平方数である．
一方，$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ より，$n(n+1)$ が平方数ではないので矛盾．
よって，a，b を正の有理数，n を自然数とするとき，$a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}$ は無理数である．■

$\boxed{6}$ (1)

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $x = y = 0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{f(0) = 0}$$

(2) (1) の結果および $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることに注意して

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)\cos h + f(h)\cos a - f(a)}{h} \end{aligned}$$

$g(x) = \cos x$ とおくと，$g(0) = 1$，$g'(x) = -\sin x$ より，$g'(0) = 0$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)g(h) + f(h)g(a) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ f(a)\cdot\frac{g(h) - g(0)}{h} + \frac{f(h) - f(0)}{h} g(a) \right\} \\ &= f(a)g'(0) + f'(0)g(a) \\ &= f'(0)\cos a \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は，$x = a$ で微分可能である．

(3) (2) と同様にして，$f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = f'(0)\cos x$$

これに $f'(0) = 3$ を代入すると

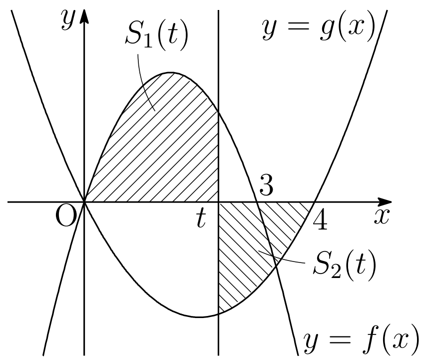
$$\boldsymbol{f'(x) = 3\cos x}$$

さらに，(1) の結果に注意して積分すると

$$\boldsymbol{f(x) = 3\sin x}$$

■

7 (1) 右の図から



$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t 2x(3-x)\,dx \\ &= \left[\,3x^2 - \frac{2}{3}x^3\,\right]_0^t \\ &= \boldsymbol{3t^2 - \frac{2}{3}t^3} \end{aligned}$$

(2) 右の図から

$$S_2(t) = \int_t^4 \{-x(x-4)\}\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_t^4 = \boldsymbol{\frac{t^3}{3} - 2t^2 + \frac{32}{3}}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= -\frac{t^3}{3} + t^2 + \frac{32}{3}, \\ S'(t) &= -t^2 + 2t = -t(t-2) \end{aligned}$$

したがって，$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める $S(t)$ の最大値は　$S(2) = \mathbf{12}$ ■

8 (1) C_2 は $C_1 : y = x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に $2a$ だけ平行移動したものであるから，C_2 の方程式は

$$y - 2a = (x-a)^2 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a \quad \cdots(*)$$

C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると $(a > 0)$

$$x^2 = x^2 - 2ax + a^2 + 2a \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a+2}{2}$$

これを C_1 の方程式に代入して　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{a+2}{2}, \frac{(a+2)^2}{4}}\right)$

(2) $(*)$ を微分すると　$y' = 2x - 2a$

これから，C_2 上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{a+2}{2}, \frac{(a+2)^2}{4}\right)$ における接線の傾きは

$$y' = 2\cdot\frac{a+2}{2} - 2a = 2 - a$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y - \frac{(a+2)^2}{4} = (2-a)\left(x - \frac{a+2}{2}\right)$$

よって　$\boldsymbol{y = (2-a)x + \frac{(a+2)(3a-2)}{4}}$

(3) (2) で求めた接線の傾きと y 切片がともに正であるから

$$\begin{cases} 2 - a > 0 \\ (a+2)(3a-2) > 0 \end{cases}$$

第1式を解いて　$a < 2$　$\cdots$①

第2式を解いて　$a < -2,\ \frac{2}{3} < a$　$\cdots$②

$a > 0$ に注意して，①，② の共通範囲を求めると　$\boldsymbol{\frac{2}{3} < a < 2}$　■

9 (1) サイコロを 3 回投げ終えたとき，点 P の x 座標と y 座標が等しくなるとき，サイコロの目の出方の組合せは

$$\{1,1,2\},\ \{1,3,4\},\ \{3,3,6\},\ \{1,5,6\}$$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{3!}{2!}+3!+\frac{3!}{2!}+3!\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{18}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(2) サイコロを n 回投げたとき，2 の目が 1 回と奇数の目が $n-1$ 回出る確率であるから

$${}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{n}{3\cdot 2^n}}$$

(3) (i) サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 0($n-1$ 回すべて奇数の奇数の目) で，n 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 4 以上 (n 回目に 4 または 6 の目) である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$$

(ii) サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 2 で，n 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 4 以上 (n 回目に偶数の目) である確率は，(2) の結果を利用して

$$\frac{n-1}{3\cdot 2^{n-1}}\times\frac{3}{6}=\frac{n-1}{3\cdot 2^n}$$

求める確率は，(i) または (ii) の確率であるから

$$\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+\frac{n-1}{3\cdot 2^n}=\boldsymbol{\frac{n+1}{3\cdot 2^n}}$$

■

4.5　2019年

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{9}$，$\boxed{10}$ 数I・II・A・B (120分)
- 教育学部は，$\boxed{2}$，$\boxed{9}$，$\boxed{10}$ 数I・II・A・B (100分)

1　10本のくじの中に，当たりくじがt本，はずれくじが$(10-t)$本入っているものとする．この中からくじを3本続けて引くとき，次の問に答えよ．ただし，$0 \leqq t \leqq 10$とし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) 当たりくじがちょうど1本である確率をtを用いて表せ．

(2) 当たりくじが1本以下である確率$P(t)$をtを用いて表せ．

(3) (2)の$P(t)$に対して，$P(t) \leqq \dfrac{1}{2}$をみたすtをすべて求めよ．

2　座標空間の原点をOとし，4つの点

$$\mathrm{A}(1, 0, -1),\quad \mathrm{B}(0, 1, 1),\quad \mathrm{C}(1, 1, 1),\quad \mathrm{D}\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

をとり，△OABの面積をαとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) αの値を求めよ．

(2) 3点O，A，Bの定める平面に，点Cから垂線CPを下ろす．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の形に表すとき，sとtの値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$を成分で表せ．

(3) (2)で求めた$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$に対して，点Eは，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = k\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ $(k>0)$と表され，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = \alpha$をみたすとする．△ABCの重心をGとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DE}}$を示せ．

3 $a>1$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=a\sin x+\dfrac{a}{a-1}\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$，$x$ 軸，2 直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(3) $a>1$ における，(2) の V の最小値とそのときの a の値を求めよ．

4 i を虚数単位とし，$\theta=\dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とする．また，

$$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\alpha^7=1$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0$ を示せ．

(2) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2\cos\theta$ を示せ．これと (1) を用いて，$f(\cos\theta)=0$ を示せ．

(3) $f(\cos 2\theta)=0$ を示せ．

5 10 本のくじの中に，当たりくじが t 本，はずれくじが $(10-t)$ 本入っているものとする．この中からくじを 3 本続けて引くとき，次の問に答えよ．ただし，$0\leqq t\leqq 10$ とし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) 当たりくじがちょうど 1 本である確率を t を用いて表せ．

(2) 当たりくじが 1 本以下である確率を $P(t)$ とするとき，$P(t)\leqq\dfrac{1}{2}$ をみたす t をすべて求めよ．

6 $a>1$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y=a\sin x+\dfrac{a}{a-1}\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$，$x$ 軸，2 直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(2) $a>1$ における，(1) の V の最小値とそのときの a の値を求めよ．

7 i を虚数単位とし，$\theta = \dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とする．また，

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\alpha^7 = 1$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \alpha^k = 0$ を示せ．

(2) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\cos\theta$ を示せ．これと (1) を用いて，$f(\cos\theta) = 0$ を示せ．

(3) $\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ が，方程式 $f(x) = 0$ の解となることを示せ．

8 n，m を 0 以上の整数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 自然数 x，y に対して，$x^2 + y^2$ が 3 の倍数ならば，x，y はともに 3 の倍数であることを示せ．

(2) $x^2 + y^2 = 5{\cdot}3^{2n}$ をみたす自然数の組は $(x,\ y)$ は

$$(3^n,\ 2{\cdot}3^n), \quad (2{\cdot}3^n,\ 3^n)$$

のみであることを示せ．

(3) $x^2 + y^2 = 7{\cdot}3^m$ をみたす自然数 x，y は存在しないことを示せ．

9 a を実数とし，$t = \sin x + \cos x$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\sin 2x$ を t を用いて表せ．

(2) x がすべての実数を動くとき，t の動く範囲を求めよ．

(3) x の方程式

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + 6a + 1 = 0$$

が実数解をもつような a の範囲を求めよ．

10 a を正の実数とする．C を放物線 $y = x^2$ とし，ℓ を直線 $y = 2ax - a^3$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) のとき，C と ℓ で囲まれた図形の面積を S とする．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S の最大値とそのときの a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 当たりくじがちょうど 1 本であるとき，t 本の当たりくじから 1 本，$(10-t)$ 本のはずれくじから 2 本引くから

$$t \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad 10-t \geqq 2 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq t \leqq 8$$

上式の t の値について，その確率は

$$\frac{{}_t\mathrm{C}_1 \cdot {}_{10-t}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{t(10-t)(9-t)}{240} \quad \cdots ①$$

$t = 0,\ 9,\ 10$ のとき，当たりじくをちょうど 1 本引くことはできないから，その確率は 0 で，このときも ① は成立する．

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{t(10-t)(9-t)}{240}}$

(2) 3 本ともはずれじくとき，$(10-t)$ 本のはずれくじから 3 本引くから

$$10-t \geqq 3 \quad \text{すなわち} \quad t \leqq 7$$

この t の値に，その確率は

$$\frac{{}_{10-t}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}$$

$t = 8,\ 9,\ 10$ のとき，3 本ともはずれくじを引くことはできないから，その確率は 0 で，このときも上式は成立する．これと (1) の結果から

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720} + \frac{t(10-t)(9-t)}{240} \\ &= \boldsymbol{\frac{(10-t)(9-t)(4+t)}{360}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を $P(t) \leqq \dfrac{1}{2}$ に適用すると　$\dfrac{(10-t)(9-t)(4+t)}{360} \leqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$(t-5)(t^2-10t-36) \leqq 0$

さらに　$(t-5+\sqrt{61})(t-5)(t-5-\sqrt{61}) \leqq 0$

これを解いて　$t \leqq 5-\sqrt{61},\ \ 5 \leqq t \leqq 5+\sqrt{61}$

t は，$0 \leqq t \leqq 10$ を満たす整数であることに注意して

$$\boldsymbol{t = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1$$

よって　$\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-(-1)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2s+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})t=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}},$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})s+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2t=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 1,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2$ であるから

$$2s-t=0,\quad -s+2t=2\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{s=\frac{2}{3},\ t=\frac{4}{3}}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{2}{3}(1,\ 0,-1)+\frac{4}{3}(0,\ 1,\ 1)-(1,\ 1,\ 1)=\boldsymbol{\frac{1}{3}(-1,\ 1,-1)}$$

(3) (2) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{CP}}\ (k>0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\alpha$ より

$$\alpha=k|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}k\quad \text{これから}\quad k=\frac{3}{2}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{2}(-1,\ 1,-1)$，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-\left(0,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(-1,\ 2,-2)$$

$\triangle$ABC の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{3}(2,\ 2,\ 1)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\{2\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot(-2)\}=0$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

■

3 (1) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\,x+\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\,x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\Big[\,\cos 2x\,\Big]_0^\pi = \mathbf{0}$$

(2) 求める立体の体積 V は，(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^\pi \left(a\sin x + \frac{a}{a-1}\cos x\right)^2 dx\\ &= a^2\int_0^\pi \sin^2\,dx + \frac{2a^2}{a-1}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\int_0^\pi \cos^2 x\,dx\\ &= a^2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2a^2}{a-1}\cdot 0 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left\{a^2+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{V = \frac{\pi^2}{2}\left\{a^2+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\right\}}$

(3) $a^2 = \{(a-1)+1\}^2 = (a-1)^2 + 2(a-1) + 1$

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{a-1}+1\right)^2 = \frac{1}{(a-1)^2} + \frac{2}{a-1} + 1$$

$b = a-1$ とおくと，$a > 1$ より，$b > 0$ であるから

$$\begin{aligned}a^2+\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 &= b^2+2b+1+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{b}+1\\ &= b^2+\frac{1}{b^2}+2\left(b+\frac{1}{b}\right)+2\\ &= b^2-2+\frac{1}{b^2}+2\left(b-2+\frac{1}{b}\right)+8\\ &= \frac{(b^2-1)^2}{b^2}+\frac{(b-1)^2}{b}+8 \geqq 8 \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$b=1$，すなわち，$a=2$ のとき，$(*)$ において等号が成立する．

$(*)$ および (1) の結果から，$\boldsymbol{a=2}$ のとき，V は最小値 $\boldsymbol{4\pi^2}$ をとる． ■

4 (1) $\theta = \dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta \cdots$ ① より

$$\alpha^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$\alpha^7 - 1 = 0$ であるから，等式 $\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k$ により

$$(\alpha - 1)\sum_{k=0}^{6}\alpha^k = 0 \quad \text{また，} \alpha - 1 \neq 0 \text{ より} \quad \sum_{k=0}^{6}\alpha^k = 0$$

(2) (1) の結果から　$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \cdots(*)$

したがって　$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha^3} = 0$

$\alpha^3 + \dfrac{1}{\alpha^3} = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$，$\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 - 2$ により

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 1 = 0$$

① および $\dfrac{1}{\alpha} = \cos\theta - i\sin\theta$ より，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^3 + (2\cos\theta)^2 - 2(2\cos\theta) - 1 &= 0 \\ 8\cos^3\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 1 &= 0\end{aligned}$$

上式より，$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ について　$f(\cos\theta) = 0$

(3) $\beta = \alpha^2$ とすると，$\alpha^7 = 1$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned}\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 &= \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1 \\ &= \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\beta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ であるから　$\beta + \dfrac{1}{\beta} = 2\cos 2\theta$

したがって，(2) と同様にして　$f(\cos 2\theta) = 0$　■

5 (1) $\boxed{\mathbf{1}}$(1) を参照．

(2) $\boxed{\mathbf{1}}$(2)，(3) を参照． ■

6 (1) $\boxed{\mathbf{3}}$(2) を参照．

(2) $\boxed{\mathbf{3}}$(3) を参照． ■

7 (1) $\boxed{\mathbf{4}}$(1) を参照．

(2) $\boxed{\mathbf{4}}$(2) を参照．

(3) $\boxed{\mathbf{4}}$(3) より，$\cos 2\theta$ は $f(x)=0$ の解である．

$\gamma=\alpha^3$ とすると，$\alpha^7=1$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned}\gamma^6+\gamma^5+\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1 &= \alpha^{18}+\alpha^{15}+\alpha^{12}+\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1\\ &= \alpha^4+\alpha+\alpha^5+\alpha^2+\alpha^6+\alpha^3+1\\ &= 0\end{aligned}$$

$\gamma=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ であるから　　$\gamma+\dfrac{1}{\gamma}=2\cos 3\theta$

同様に，$\cos 3\theta$ は $f(x)=0$ の解である． ■

$\boxed{8}$ (1) $x \equiv 0 \Longrightarrow x^2 \equiv 0,\quad x \equiv \pm 1 \Longrightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 3$ より

$$x^2 \equiv 0 \Longleftrightarrow x \equiv 0,\quad x^2 \equiv 1 \Longleftrightarrow x \equiv \pm 1,\quad x^2 \not\equiv -1 \pmod 3$$

よって　$x^2 + y^2 \equiv 0 \Longrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \Longrightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$

(2)
$$x^2 + y^2 = 5{\cdot}3^{2n} \quad \cdots (*)$$

(i) $(*)$ について，$n = 0$ のとき　$x^2 + y^2 = 5$

これをみたす自然数 $x,\ y$ は 1 または 2 であるから，求める組は

$$(x,\ y) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

(ii) $(*)$ について，$n > 0$ のとき，$(*)$ は 3 の倍数であるから，(1) の結果から $x,\ y$ はともに 3 の倍数であるから，$x,\ y$ が 3^l $(l \leqq n)$ で割り切れ，$\dfrac{x}{3^l},\ \dfrac{y}{3^l}$ の少なくとも一方は 3 で割り切れないとする．

$$\left(\frac{x}{3^l}\right)^2 + \left(\frac{y}{3^l}\right)^2 = 5{\cdot}3^{2(n-l)}$$

$l < n$ ならば，上式の右辺は 3 の倍数となり，(1) の結論から，$\dfrac{x}{3^l},\ \dfrac{y}{3^l}$ がともに 3 で割り切れ，矛盾を生じる．

したがって，$l = n$ となり　$\left(\dfrac{x}{3^n}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3^n}\right)^2 = 5$

(i) の結果を利用して　$\left(\dfrac{x}{3^n},\ \dfrac{y}{3^n}\right) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i),(ii) より　$(x,\ y) = (3^n,\ 2{\cdot}3^n),\ (2{\cdot}3^n,\ 3^n)$

(3)
$$x^2 + y^2 = 7{\cdot}3^m \quad \cdots (**)$$

(i) $(**)$ について，$m = 0$ のとき　$x^2 + y^2 = 7$

これをみたす自然数 $(x,\ y)$ の組は存在しない．

(ii) $(**)$ について，$m > 0$ のとき，$(**)$ は 3 の倍数であるから，(1) の結果から $x,\ y$ はともに 3 の倍数であるから，$x,\ y$ が 3^k $(2k \leqq m)$ で割り切れ，$\dfrac{x}{3^k},\ \dfrac{y}{3^k}$ の少なくとも一方は 3 で割り切れないとする．

$$\left(\frac{x}{3^k}\right)^2 + \left(\frac{y}{3^k}\right)^2 = 7{\cdot}3^{m-2k}$$

$2k < m$ ならば，上式の右辺は 3 の倍数となり，(1) の結論から，$\dfrac{x}{3^k},\ \dfrac{y}{3^k}$ がともに 3 で割り切れ，矛盾を生じる．

したがって，$2k = m$ となり　$\left(\dfrac{x}{3^k}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3^k}\right)^2 = 7$

(i) の結果により，これをみたす自然数 $\dfrac{x}{3^k},\ \dfrac{y}{3^k}$ は存在しない．

(i),(ii) により，$(**)$ をみたす自然数 $x,\ y$ は存在しない．　■

$\boxed{9}$ (1) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

よって　　$\boldsymbol{\sin 2x = t^2 - 1}$

(2) $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より　$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(3) x の方程式

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + 6a + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

について，(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}(*) \text{ の左辺} &= (t^2 - 1) - 2\sqrt{2}at + 6a + 1\\ &= t^2 - 2\sqrt{2}at + 6a\\ &= (t - \sqrt{2}a)^2 - 2a^2 + 6a\end{aligned}$$

t に関する 2 次関数

$$f(t) = t^2 - 2\sqrt{2}at + 6a \ (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M = \begin{cases} f(-\sqrt{2}) & (a > 0) \\ f(\sqrt{2}) & (a \leqq 0) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} f(-\sqrt{2}) & (a < -1) \\ f(\sqrt{2}a) & (-1 \leqq a \leqq 1) \\ f(\sqrt{2}) & (1 < a) \end{cases}$$

$f(\sqrt{2}) = 2a + 2$，$f(-\sqrt{2}) = 10a + 2$，$f(\sqrt{2}a) = -2a(a - 3)$ より

(i) $a < -1$ のとき　　$M = f(\sqrt{2}) < 0$

(ii) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$\begin{cases} M = f(\sqrt{2}) \geqq 0 \\ m = f(\sqrt{2}a) \leqq 0 \end{cases}$

(iii) $0 < a \leqq 1$ のとき　　$m = f(\sqrt{2}a) > 0$

(iv) $1 < a$ のとき　　$m = f(\sqrt{2}) > 0$

(i)〜(iv) より，(∗) が実数解をもつ a の値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 0}$　■

10 (1) $C: y=x^2$ と $\ell: y=2ax-a^3$ から y を消去して整理すると

$$x^2-2ax+a^3=0 \quad \cdots(*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，$(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=a^2-a^3>0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(a-1)<0$$

$a>0$ により　$\boldsymbol{0<a<1}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解は　$x=a\pm\sqrt{a^2-a^3}$

$\alpha=a-\sqrt{a^2-a^3}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-a^3}$ とおくと

$$x^2-2ax+a^3=(x-\alpha)(x-\beta), \quad \beta-\alpha=2\sqrt{a^2-a^3}$$

求める図形の面積 S は，上の 2 式に注意して

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{(2ax-a^3)-x^2\}dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{a^2-a^3})^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}\{a^2(1-a)\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(3) 3 正数 a，a，$2(1-a)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{a+a+2(1-a)}{3} \geqq \sqrt[3]{a{\cdot}a{\cdot}2(1-a)} \quad \text{ゆえに} \quad a^2(1-a) \leqq \frac{4}{27}$$

上式において，等号が成立するは　$a=2(1-a)$　すなわち　$a=\dfrac{2}{3}$

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4}{27}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{32\sqrt{3}}{729}}$ をとる． ■

4.6 2020 年

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{1}$ ある病原菌の検査試薬は，その病原菌に感染している個体に対し誤って陰性反応を示す確率が $\dfrac{3}{100}$ であり，感染していない個体に対し誤って陽性反応を示す確率が $\dfrac{1}{100}$ である．ある集団にこの試薬で病原菌の検査を行い，全体の 4%が陽性反応を示したとき，次の問に答えよ．

(1) 病原菌に感染している個体が陽性反応を示す確率を求めよ．

(2) この集団から 1 つの個体を取り出すとき，その個体が病原菌に感染している確率を求めよ．

(3) この集団の中で陽性反応を示した個体が，実際は病原菌に感染していない確率を求めよ．

$\boxed{2}$ 平面上に $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ となる $\triangle\mathrm{OAB}$ がある．辺 AB を $2:1$ に内分する点を C とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|+\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ とするとき，$f(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(3) $0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値，およびそのときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ $0<t<2$ とする．$f(x)=x(3-x)$，$g(x)=2x(x-2)$ とおく．曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq t)$ と直線 $x=t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V_1(t)$ とする．曲線 $y=g(x)$ $(t\leqq x\leqq 2)$ と直線 $x=t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V_2(t)$ とする．$V(t)=V_1(t)+V_2(t)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $V_1(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $V_2(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $0<t<2$ における $V(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

4 自然数 n に対して，

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx, \quad b_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx$$

とおくとき，次の問に答えよ．

(1) a_1 および b_1 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n，b_{n-1} を用いて表せ．また，b_n を n，a_{n-1} を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ を示せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 b_n$ を求めよ．

5 次の問に答えよ．

(1) p，q を正の実数とし，正の実数 α，β が

$$\alpha - \beta = q, \quad \alpha\beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

を満たすとする．このとき，$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ は，方程式

$$x^3 + px - q = 0$$

の解であることを示せ．

(2) 3次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ は，ただ1つの実数解をもつ．この実数解を求めよ．ただし，ただ1つの実数解をもつことは証明しなくてよい．

(3) 実数

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{28}{27}}}$$

は有理数である．この有理数の値を求めよ．

6 自然数 n に対して，

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx, \quad b_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx$$

とおくとき，次の問に答えよ．

(1) a_1 および b_1 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n，b_{n-1} を用いて表せ．また，b_n を n，a_{n-1} を用いて表せ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} na_n$ および $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n$ を求めよ．

7 円 $x^2 + (y-2)^2 = 25$ を C，直線 $y = -2x + 7$ を ℓ とする．また，円 C と直線 ℓ の共有点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，$x_1 < x_2$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 A，B の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が点 A，B および $\mathrm{C}(3, -2)$ を通るとき，a，b，c の値を求めよ．

(3) (2) で求めた放物線の点 A，B における接線とこの放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

8 次の問に答えよ．

(1) t を実数とするとき，x に関する方程式

$$x + \frac{1}{x} = t$$

の正の実数解の個数を求めよ．

(2) k を正の実数とするとき，x に関する方程式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = k$$

の正の実数解の個数を求めよ．

解答例

1 (1) 感染している事象を X，陽性と判定される事象を Y とすると

$$P_X(\overline{Y}) = \frac{3}{100},\quad P_{\overline{X}}(Y) = \frac{1}{100},\quad P(Y) = \frac{4}{100}\quad \cdots(*)$$

上の第 1 式および第 2 式から

$$\left.\begin{aligned} P_X(Y) &= 1 - P_X(\overline{Y}) = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100} \\ P_{\overline{X}}(\overline{Y}) &= 1 - P_{\overline{X}}(Y) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}\right\}\quad \cdots(**)$$

よって，求める確率 $P_X(Y)$ は　$\boldsymbol{\dfrac{97}{100}}$

(2)

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(X \cap Y) + P(\overline{X} \cap Y), \\ P(X \cap Y) &= P(X)P_X(Y), \\ P(\overline{X} \cap Y) &= P(\overline{X})P_{\overline{X}}(Y) = \{1 - P(X)\}P_{\overline{X}}(Y) \end{aligned}$$

上の第 2 式，第 3 式を第 1 式に代入すると

$$P(Y) = P(X)P_X(Y) + \{1 - P(X)\}P_{\overline{X}}(Y)$$

$(*)$，$(**)$ をこれに代入すると

$$\frac{4}{100} = P(X)\cdot\frac{97}{100} + \{1 - P(X)\}\cdot\frac{1}{100}$$

よって，求める確率 $P(X)$ は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(3) (1)，(2) の結果により，求める確率は

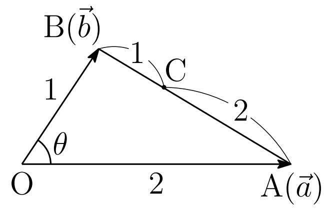
$$\begin{aligned} P_Y(\overline{X}) &= \frac{P(Y \cap \overline{X})}{P(Y)} = \frac{P(Y) - P(Y \cap X)}{P(Y)} = 1 - \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\ &= 1 - \frac{P(X)}{P(Y)}\cdot\frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = 1 - \frac{P(X)}{P(Y)}\cdot P_X(Y) \\ &= 1 - \frac{1}{32}\cdot\frac{100}{4}\cdot\frac{97}{100} = \boldsymbol{\frac{31}{128}} \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} P_Y(\overline{X}) &= \frac{P(Y \cap \overline{X})}{P(Y)} = \frac{P(\overline{X})}{P(Y)}\cdot\frac{P(\overline{X} \cap Y)}{P(\overline{X})} = \frac{1 - P(X)}{P(Y)}\cdot P_{\overline{X}}(Y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{32}\right)\cdot\frac{100}{4}\cdot\frac{1}{100} = \boldsymbol{\frac{31}{128}} \end{aligned}$$

■

2 (1) 点 C は AB を 2 : 1 に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})}$$

(2) 与えられた条件から

$$|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cos\theta$$

上式および (1) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \frac{2}{3}|\vec{b}-\vec{a}| = \frac{2}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \frac{1}{3}|\vec{a}+2\vec{b}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$$

よって　$f(\theta) = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| + \sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta} + \sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\sqrt{5-4\cos\theta} + 2\sqrt{1+\cos\theta}\right)}$$

(3) $x = \sqrt{5-4\cos\theta}$，$y = 2\sqrt{1+\cos\theta}$ とおくと $(0<\theta<\pi)$

$$(x+y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x-y)^2 = 18 - (x-y)^2 \leqq 18 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ において，等号が成立するとき，$x-y=0$ であるから

$$\sqrt{5-4\cos\theta} - 2\sqrt{1+\cos\theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \frac{1}{8}$$

$(*)$ および $f(\theta) = \frac{2}{3}(x+y)$ より

$$f(\theta) = \frac{2}{3}(x+y) \leqq \frac{2}{3}\sqrt{18} = 2\sqrt{2}$$

よって，$f(\theta)$ は，$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{8}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとる． ■

3 (1) $f(x)=x(3-x)$ のとき，曲線 $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq t)$ と直線 $x=t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V_1(t)$ は

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \pi\int_0^t x^2(3-x)^2\,dx \quad \cdots ① \\ &= \pi\int_0^t (x^4-6x^3+9x^2)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}x^4+3x^3\right]_0^t = \boldsymbol{\pi\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3}{2}t^4+3t^3\right)} \end{aligned}$$

(2) $g(x)=2x(x-2)$ のとき，曲線 $y=g(x)$ $(t \leqq x \leqq 2)$ と直線 $x=t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V_2(t)$ は

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \pi\int_t^2 4x^2(x-2)^2\,dx \quad \cdots ② \\ &= 4\pi\int_t^2 (x^4-4x^3+4x^2)\,dx \\ &= 4\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_t^2 \\ &= \boldsymbol{4\pi\left(-\frac{t^5}{5}+t^4-\frac{4}{3}t^3+\frac{16}{15}\right)} \end{aligned}$$

(3) ①，② より

$$V_1'(t)=\pi t^2(3-t)^2, \quad V_2'(t)=-4\pi t^2(2-t)^2$$

$V(t)=V_1(t)+V_2(t)$ より

$$\begin{aligned} V'(t) &= \pi t^2(3-t)^2-4\pi t^2(2-t)^2 \\ &= \pi t^2\{(3-t)^2-4(2-t)^2\} = \pi t^2(7-3t)(t-1) \end{aligned}$$

したがって，$0<t<2$ における $V(t)$ の増減は

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	極小	↗	

(1)，(2) の結果から，極小値は

$$V(1)=V_1(1)+V_2(1)=\frac{17}{10}\pi+\frac{32}{15}\pi=\boldsymbol{\frac{23}{6}\pi}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $a_n = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx,\quad b_n = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx$ (n は自然数)

上の 2 式について，$x = \dfrac{\pi}{2}t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\pi}{2}$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$(*) \quad a_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt,\quad b_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi}{2}t\,dt \quad (n \text{ は自然数})$$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると

$$a_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}t\,dt = \left[-t\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$
$$b_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 t\cos\frac{\pi}{2}t\,dt = \left[t\sin\frac{\pi}{2}t + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^1 = \boldsymbol{1 - \frac{2}{\pi}}$$

(2) $(*)$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt = -\int_0^1 t^n\left(\cos\frac{\pi}{2}t\right)'dt \\
&= -\left[t^n\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^1 + n\int_0^1 t^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt \\
&= \frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt = \boldsymbol{\frac{2n}{\pi}b_{n-1}}, \\
b_n &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\cos\frac{\pi}{2}t\,dt = \int_0^1 t^n\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)'dt \\
&= \left[t^n\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^1 - n\int_0^1 t^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}t\,dt \\
&= 1 - \frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}t\,dt = \boldsymbol{1 - \frac{2n}{\pi}a_{n-1}}
\end{aligned}$$

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ において，$0 \leqq t^n \sin\dfrac{\pi}{2} \leqq t^n$ であるから

$$0 \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n \leqq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ であるから，上式にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$0 \leqq t^n \cos\dfrac{\pi}{2} \leqq t^n$ であるから

$$0 \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq b_n \leqq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ であるから，上式にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

(2) の結果より，$b_n = 1 - \dfrac{2n}{\pi}a_{n-1}$ であるから $(n \geqq 2)$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n}{\pi}a_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - na_{n-1}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty} na_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot(n+1)a_n = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

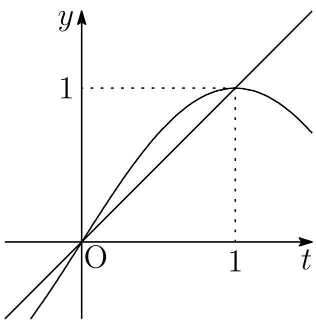
(2) の結果より，$a_n = \dfrac{2n}{\pi}b_{n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^2 b_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}na_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 b_n = \frac{\pi^2}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2 b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 b_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)^2 b_n = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

別解 $0 \leqq t \leqq 1$ において，$t \leqq \sin\dfrac{\pi}{2}t \leqq 1$ より



$$\int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \int_0^1 t^n\,dt$$

$$\frac{1}{n+2} \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{1}{n+1}$$

したがって

$$\frac{n\pi}{2(n+2)} \leqq na_n \leqq \frac{n\pi}{2(n+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} na_n = \frac{\pi}{2}$$

■

5 (1) $p,\ q,\ \alpha,\ \beta$ は正の実数であるから，$\alpha\beta = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ より　$p = 3\sqrt[3]{\alpha\beta}$

$q = \alpha - \beta$ であるから，方程式 $x^3 + px - q = 0$ は

$$x^3 + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}x - (\alpha - \beta) = 0 \quad \cdots (*)$$

$x = \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ を $(*)$ の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}(*)\text{ の左辺} &= (\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta})^3 + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) - (\alpha - \beta) \\ &= \alpha - 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2} - \beta \\ &\qquad\qquad + 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta} - 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2} - \alpha + \beta \\ &= 0\end{aligned}$$

よって，$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ は方程式 $x^3 + px - q = 0$ の解である．

(2) 3 次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ を (1) の結果に適用すると，$p = 6$，$q = 2$ より

$$\alpha - \beta = 2, \quad \alpha\beta = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$$

第 1 式から　$\alpha = \beta + 2$　これを第 2 式に代入すると

$$(\beta + 2)\beta = 8 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta - 2)(\beta + 4) = 0$$

与えれた方程式から，$\beta > 0$ に注意して　$\beta = 2$　ゆえに　$\alpha = 4$

求める実数解は　$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$，すなわち，$\boldsymbol{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$

(3) $t = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\dfrac{28}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\dfrac{28}{27}}}$ とし，

$$\alpha = 1 + \sqrt{\frac{28}{27}}, \quad \beta = -1 + \sqrt{\frac{28}{27}}$$

とすると

$$q = \alpha - \beta = 2, \quad p = 3\sqrt[3]{\alpha\beta} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 1$$

(1) の結果から，t は方程式 $x^3 + px - q = 0$，すなわち，$x^3 + x - 2 = 0$ の解であるから

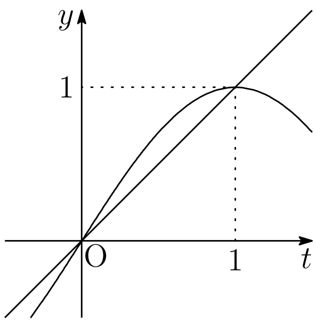
$$(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

t は実数であるから　$t = 1$　よって　求める有理数は　**1**　■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\boxed{\mathbf{4}}$(1) を参照

(2) $\boxed{\mathbf{4}}$(2) を参照

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ において，$t \leqq \sin\frac{\pi}{2}t \leqq 1$ より



$$\int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \int_0^1 t^n\,dt$$
$$\frac{1}{n+2} \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{1}{n+1}$$

したがって

$$\frac{n\pi}{2(n+2)} \leqq na_n \leqq \frac{n\pi}{2(n+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{2(1+\frac{2}{n})} \leqq na_n \leqq \frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{\pi}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{\pi}{2}}$$

(2) の結果より，$a_n = \dfrac{2n}{\pi}b_{n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^2 b_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}na_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 b_n = \frac{\pi^2}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2 b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 b_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)^2 b_n = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

■

7 (1) $C: x^2+(y-2)^2=25$ と直線 $\ell: y=-2x+7$ の方程式から y を消去すると

$$x^2+(-2x+7-2)^2=25 \quad 整理すると \quad x(x-4)=0$$

これを解いて　$x=0,\ 4$　これらを ℓ の方程式に代入すると

$$x=0 \text{ のとき } y=7, \quad x=4 \text{ のとき } y=-1$$

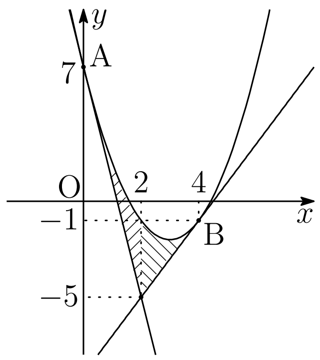
よって，x 座標に注意して　$\mathbf{A(0,\ 7)}$，　$\mathbf{B(4,-1)}$

(2) 放物線が点 A(0, 7) を通るから，$y=ax^2+bx+7$ とおく．
これが 2 点 B(4, −1)，C(3, −2) を通るから

$$-1=16a+4b+7, \quad -2=9a+3b+7$$

これを解いて　$a=1,\ b=-6$
よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-6,\ c=7}$

(3) (2) の結果から，$f(x)=x^2-6x+7$ とおくと



$$f'(x)=2x-6$$

2 点 A，B における接線の傾きは，それぞれ

$$f'(0)=-6, \quad f'(4)=2$$

C 上の点 A(0, 7) における接線は

$$y=-6x+7 \quad \cdots ①$$

C 上の点 B(4, −1) における接線の方程式は

$$y-(-1)=2(x-4) \quad すなわち \quad y=2x-9 \quad \cdots ②$$

2 直線 ①，② の交点の x 座標は

$$-6x+7=2x-9 \quad これを解いて \quad x=2$$

よって，求める面積を S とすると [1]

$$S = \int_0^2 \{(x^2-6x+7)-(-6x+7)\}\,dx + \int_2^4 \{(x^2-6x+7)-(2x-9)\}\,dx$$
$$= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 (x-4)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4 = \mathbf{\frac{16}{3}}$$

■

8 (1) $(*)$ $x+\dfrac{1}{x}=t$ より　$x^2-tx+1=0$

$f(x)=x^2-tx+1$ とおくと

$$f(0)=1,\quad f(x)=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+1-\frac{t^2}{4}$$

(i) $t \leqq 0$ のとき，$x>0$ において，$f(x)>0$ であるから，
$f(x)=0$，すなわち，$(*)$ を満たす正の実数解 x は存在しない．

(ii) $0<t<2$ のとき，$1-\dfrac{t^2}{4}>0$ より，$f(x)>0$ であるから，
$f(x)=0$，すなわち，$(*)$ を満たす正の実数解 x は存在しない．

(iii) $t=2$ のとき，$f(x)=(x-1)^2$ により，$f(x)=0$，すなわち，
$(*)$ を満たす正の実数解 x は 1 の 1 個のみ．

(iv) $2<t$ のとき，$1-\dfrac{t^2}{4}<0$ より，$f(x)=0$，すなわち，
$(*)$ を満たす正の実数解 x は $\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ の 2 個．

(i)〜(iv) から，$(*)$ の正の実数解 x の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{t<2} \text{ のとき} & \mathbf{0}\text{ 個} \\ \boldsymbol{t=2} \text{ のとき} & \mathbf{1}\text{ 個} \\ \boldsymbol{2<t} \text{ のとき} & \mathbf{2}\text{ 個} \end{cases}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

(2) k を正の実数とする x に関する方程式

$$\text{(A)} \quad x^2+\frac{1}{x^2}-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=k$$

について，(*) より

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2}-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+15 \\ &= t^2-8t+15 \\ &= (t-4)^2-1 \end{aligned}$$

$t \geqq 2$ のとき

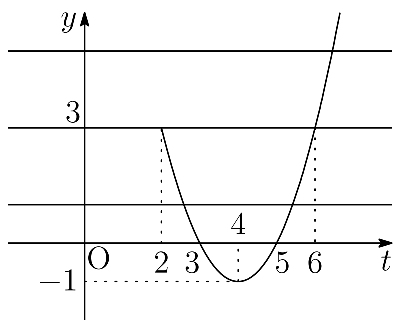
$$(t-4)^2-1=k \quad \cdots(**)$$

を満たす t の個数は，$y=(t-4)^2-1$ $(2 \leqq t)$ と $y=k$ $(k>0)$ の共有点の個数である．

(i) $0<k<3$ のとき，(**) を満たす t が t_1 $(2<t_1<3)$，t_2 $(5<t_2<6)$ の 2 個存在し，それぞれの t の値に対して，正の実数 x が 2 個ずつ存在する．したがって，(A) を満たす正の実数 x は 4 個存在する．

(ii) $k=3$ のとき，(**) を満たす t は $t=2,\ 6$ である．$t=2$ に対する正の実数 x は 1 個，$t=6$ に対する正の実数 x は 2 個存在する．したがって，(A) を満たす正の実数 x は 3 個存在する．

(iii) $3<k$ のとき，(**) を満たす t が t_3 $(6<t_3)$ の 1 個存在し，この t の値に対して，正の実数 x が 2 個ずつ存在する．したがって，(A) を満たす正の実数 x は 2 個存在する．



(i)〜(iii) から，(A) の正の実数解 x の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<k<3} \text{ のとき} & \textbf{4 個} \\ \boldsymbol{k=3} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{3<k} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases}$$

■

第 5 章　長崎大学

出題分野

(教 B・薬　工・情・歯　医学部　教 A・経・水・環)

教育 B・薬学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	長崎大学 教 B・薬	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式				4	3					
	三角関数					3		3	3		3
	指数関数と対数関数						3		3	3	3
	微分法と積分法	1	4						3	3·4	5
III	式と曲線										
	複素数平面							3	7	6	3
	関数										
	極限					5	7	7		7	7
	微分法とその応用	4	5	5·6	6	7		3·5	5		
	積分法				7	5	5	5		7	7
	積分法の応用	6	5	5·6	6	5·7	7		4·5		
A	場合の数と確率										
	整数の性質										3
	図形の性質										
B	平面上のベクトル	2								4	4
	空間のベクトル		1	4		4	4	4		3	
	数列	4	2	3	5			3	3		
	確率分布と統計										

数字は問題番号

工・情・歯学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	長崎大学 工・歯	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明				3						
	複素数と方程式										
	図形と方程式					3					
	三角関数	5			3	3		3	3		3
	指数関数と対数関数				3		3		3	3	3
	微分法と積分法	1	4						3	3·4	5
III	式と曲線	5									
	複素数平面							3			3
	関数										
	極限					5		6		7	
	微分法とその応用		5	5·6	6	6		3·5	5		
	積分法	5	6		7	5	5	5		7	6
	積分法の応用	6	5	5·6	6	5·6	6		4·5	5	
A	場合の数と確率										
	整数の性質										3
	図形の性質										
B	平面上のベクトル								6	4	4
	空間のベクトル	3	1	4		4	4	4		3	
	数列			3	5			3	3		
	確率分布と統計										9*

数字は問題番号．∗ は情報データ科学部の選択問題 (5,9 から 1 題選択)

医学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	長崎大学 医学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式				4	3					
	三角関数					3		3	3		3
	指数関数と対数関数		8				3		3	3	3
	微分法と積分法	7							3	3·4	
III	式と曲線		7								
	複素数平面							3	7	8	3
	関数										
	極限					5·8	7	7		7	7·8
	微分法とその応用	4		6	6·8			3			
	積分法	8	6			5			8	7	7
	積分法の応用			6·7	6·8	5·8	7·8	8	4		
A	場合の数と確率										
	整数の性質										3
	図形の性質										
B	平面上のベクトル	2								4	4
	空間のベクトル		1	4		4	4	4		3	
	数列	4		3	5			3	3		
	確率分布と統計										

数字は問題番号

教育A・経済・水産・環境 出題分野(2011-2020) 80分

◀	長崎大学 教A·経·水·環	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										1
	複素数と方程式										
	図形と方程式		3				1	1			
	三角関数			2			1	1	1	1	
	指数関数と対数関数			2			1				1
	微分法と積分法	1		1	1	1	1	2	1·2	2	2
A	場合の数と確率										
	整数の性質									1	1
	図形の性質										
B	平面上のベクトル	2			2			1	1	1	1
	空間のベクトル					2	2				
	数列		2	2				1	1	1	
	確率分布と統計										

数字は問題番号

5.1 2015 年

- 教育・薬学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 経済・水産・環境科学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{1}$ 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 2ax + 2a^2$ を考える．ただし，$a > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を a を用いて表せ．

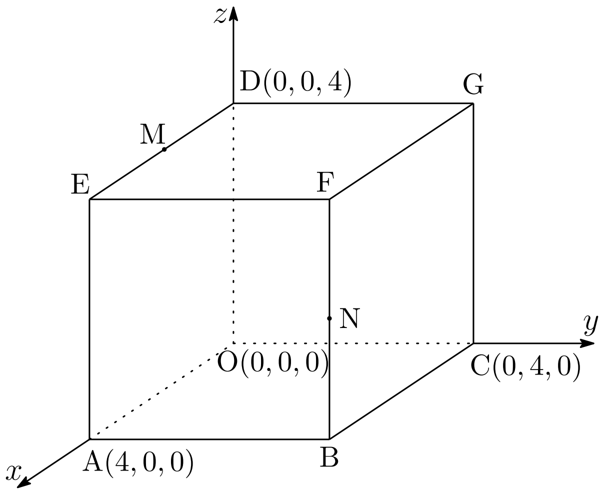
(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 の共通接線を ℓ とし，C_1 と ℓ との接点の x 座標を p，C_2 と ℓ との接点の x 座標を q とする．p と q の値および ℓ の方程式を，それぞれ a を用いて表せ．

(3) 放物線 C_1，C_2 および接線 ℓ によって囲まれた図形の面積を S_1 とする．S_1 を a を用いて表せ．

(4) 点 $\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を m とする．このとき，m の方程式を a を用いて表せ．また，m と接線 ℓ との交点の x 座標を求めよ．

(5) 放物線 C_1 および接線 ℓ，m によって囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 を a を用いて表せ．さらに，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ．

2 4 点 O(0, 0, 0)，A(4, 0, 0)，C(0, 4, 0)，D(0, 0, 4) をとり，下図のように線分 OA，OC，OD を 3 辺とする立方体 OABC-DEFG を考える．辺 DE，BF の中点を，それぞれ M，N とする．以下の問いに答えよ．



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{GN}}$ を成分で表せ．

(2) $\angle\mathrm{MGN} = \theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) 3 点 G，M，N を頂点とする三角形 GMN の面積を求めよ．

(4) 三角錐（すい）FGMN において，三角形 GMN を底面としたときの高さを求めよ．

(5) 三角形 GMN を含む平面と線分 OF との交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を用いて表せ．

3 放物線 $C : y = x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる．P，Q の x 座標をそれぞれ p，q (ただし，$p < q$) とする．直線 PQ の傾きを a とおく．以下の問いに答えよ．

(1) a を p，q を用いて表せ．

(2) $a = 1$ とする．直線 PQ と x 軸の正の向きのとなす角 θ_1(ただし，$0 < \theta_1 < \pi$) を求めよ．

(3) $a = 1$ とする．放物線 C 上に点 R をとる．R の x 座標を r(ただし，$r < p$) とする．三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2(ただし，$0 < \theta_2 < \pi$) を求めよ．また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ．さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ．

(4) $a = 2$ とする．放物線 C 上に点 S(1, 1) をとる．三角形 PQS が $\angle\mathrm{S} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ．

4 ひし形の紙がある (図1)．点線で半分に折ると正三角形になった (図2)．これを少し開いて机の上に立てると，三角錐(すい)の形になる．その高さを次のようにして求めたい．

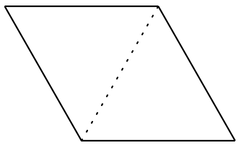


図1

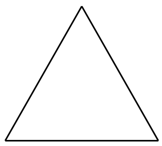


図2

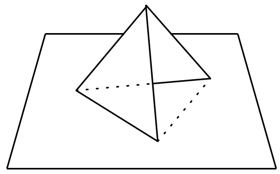


図3

図4において，2つの正三角形OABとOACの1辺の長さを1とする．点Oと平面ABCの距離が，三角錐OABCの高さになる．

空間ベクトルを利用してこの高さを求める．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき，線分BCの中点をMとする．以下の問いに答えよ．

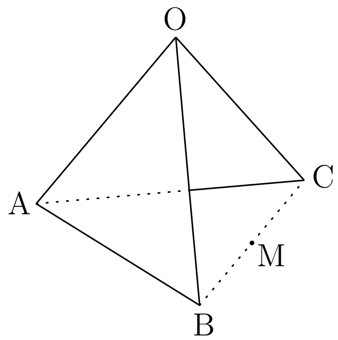


図4(図3の拡大図)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) 実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点Hは直線AM上にある．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ．さらに，Hが $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(4) 三角錐OABCの高さを h とする．h を $\cos\theta$ を用いて表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ．

5 以下の問いに答えよ．

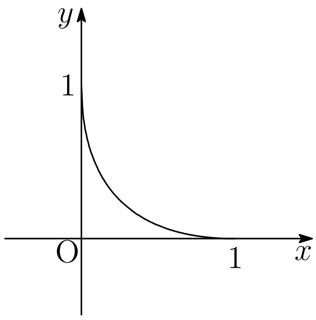
(1) 次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

(3) 曲線 $C : \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x 軸および y 軸で囲まれた下図の図形を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．



6 実数 $x \neq 1$ について定義される関数

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$，$\lim_{x \to 1-0} f(x)$，$\lim_{x \to 1+0} f(x)$，$\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めよ．

(3) x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．曲線 $y = f(x)$ 上の格子点の座標をすべて求めよ．

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(5) $x \leqq 0$ かつ $y \geqq 0$ で表される領域において，x 軸と y 軸および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

7 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ 上で定義される関数

$$f(x) = \cos 2x - 4\sin^3 x$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

8 自然対数の底を e とする．区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる．それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$ とする．点 P_0 は原点である．

自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ．

(2) 面積 S_n を求めよ．

(3) $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とする．このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

解答例

1 (1) $C_2 : y=(x-a)^2+a^2$ であるから，C_2 の頂点の座標は $\boldsymbol{(a,\ a^2)}$

(2) $y=x^2$ を微分すると $y'=2x$
$y=x^2-2ax+2a^2$ を微分すると $y'=2(x-a)$
C_1 上の点 $(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y-p^2=2p(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y=2px-p^2 \quad \cdots ①$$

C_2 上の点 $(q,\ q^2-2aq+2a^2)$ における接線の方程式は

$$y-(q^2-2aq+2a^2)=2(q-a)(x-q)$$

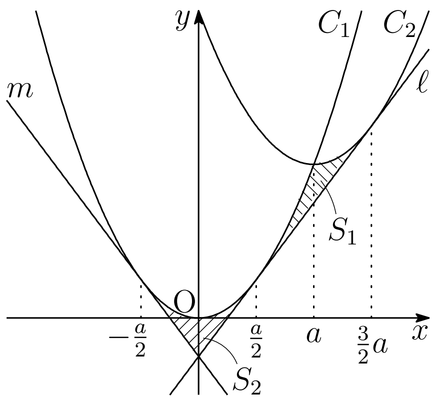
すなわち $\qquad y=2(q-a)x-q^2+2a^2 \quad \cdots ②$

①，② の直線は一致するから

$$2p=2(q-a), \quad -p^2=-q^2+2a^2$$

ゆえに $\quad q-p=a, \quad (q+p)(q-p)=2a^2$

よって $\qquad \boldsymbol{p=\frac{a}{2},\ q=\frac{3}{2}a}$



また，① から ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{y=ax-\frac{a^2}{4}}$$

(3) C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x^2=x^2-2ax+2a^2 \quad \text{ゆえに} \quad x=a$$

よって
$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{\frac{a}{2}}^{a}\left\{x^2-\left(ax-\frac{a^2}{4}\right)\right\}dx \\ &\quad +\int_{a}^{\frac{3}{2}a}\left\{(x^2-2ax+2a^2)-\left(ax-\frac{a^2}{4}\right)\right\}dx \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2dx+\int_{a}^{\frac{3}{2}a}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)^3\right]_{\frac{a}{2}}^{a}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^3\right]_{a}^{\frac{3}{2}a}=\boldsymbol{\frac{a^3}{12}}\end{aligned}$$

(4) C_1 は y 軸に関して対称である．C_1 上の 2 点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ は y 軸に関して対称であるから，C_1 上のそれぞれ点における接線 ℓ，m は y 軸に関して対称である．よって，m の方程式は

$$\boldsymbol{y=-ax-\frac{a^2}{4}}$$

したがって，ℓ と m の交点の x 座標は　$\boldsymbol{x=0}$

(5) C_1 および ℓ，m によって囲まれた図形は，y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{x^2-\left(ax-\frac{a^2}{4}\right)\right\}dx \\ &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 dx = 2\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)^3\right]_0^a = \boldsymbol{\frac{a^3}{12}} \end{aligned}$$

これと (3) の結果から　$\boldsymbol{\dfrac{S_2}{S_1}=1}$　■

2 (1) G(0, 4, 4)，M(2, 0, 4)，N(4, 4, 2) であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{GM}} &= (2,\ 0,\ 4)-(0,\ 4,\ 4) = \boldsymbol{(2,-4,\ 0)} \\ \overrightarrow{\mathrm{GN}} &= (4,\ 4,\ 2)-(0,\ 4,\ 4) = \boldsymbol{(4,\ 0,-2)} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}} &= 2\times4+(-4)\times0+0\times(-2)=8 \\ |\overrightarrow{\mathrm{GM}}| &= \sqrt{2^2+(-4)^2+0^2}=2\sqrt{5} \\ |\overrightarrow{\mathrm{GN}}| &= \sqrt{4^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{5} \end{aligned}$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(3) (2) の結果から　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

よって

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{GMN} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GN}}|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5} = \boldsymbol{2\sqrt{21}} \end{aligned}$$

(4) 三角錐 FGMN において △GMN を底辺とする高さを h とすると，三角錐 FGMN の体積により

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{GMN}\times h=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MFG}\times\mathrm{FN}$$

したがって　$\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{21}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\times 2$

これを解いて　$h=\dfrac{8}{\sqrt{21}}=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{21}}{21}}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおくと (α，β，γ は実数)

$$\begin{aligned}(4,\ 4,\ 4)&=\alpha(0,\ 4,\ 4)+\beta(2,\ 0,\ 4)+\gamma(4,\ 4,\ 2)\\&=(2\beta+4\gamma,\ 4\alpha+4\gamma,\ 4\alpha+4\beta+2\gamma)\end{aligned}$$

成分を比較して　$\beta+2\gamma=2,\quad \alpha+\gamma=1,\quad 2\alpha+2\beta+\gamma=2$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\beta=\dfrac{2}{5}$，$\gamma=\dfrac{4}{5}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと (k は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)\\&=\frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{2k}{5}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{4k}{5}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

このとき，P は平面 GMN 上の点であるから

$$\frac{k}{5}+\frac{2k}{5}+\frac{4k}{5}=1\quad ゆえに\quad k=\frac{5}{7}\quad よって\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OF}}}$$

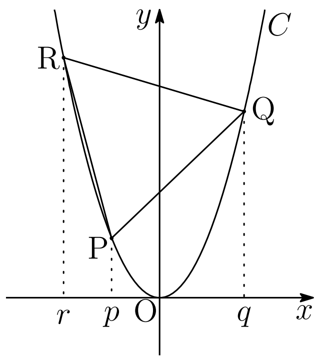
■

3 (1) P$(p,\ q)$，Q$(q,\ q^2)$ であるから，直線 PQ の傾き a は

$$a = \frac{q^2 - p^2}{q - p} = \boldsymbol{p + q}$$

(2) $a = 1$ より　$\tan\theta_1 = 1$　これをみたす θ_1 $(0 < \theta_1 < \pi)$ は　$\boldsymbol{\theta_1 = \frac{\pi}{4}}$

(3) (2) 結果から，直線 PR と x 軸の正の向きとなす角 θ_2 $(0 < \theta_2 < \pi)$ は，$r < p$ に注意して



$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi}$$

また，直線 PR，QR の傾きは，(1) と同様にして

$$p + r = \tan\theta_2 = \tan\frac{7}{12}\pi = \boldsymbol{-2 - \sqrt{3}}$$
$$q + r = \tan\left(\theta_1 - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \boldsymbol{-2 + \sqrt{3}}$$

$a = 1$ であるから，(1) の結果および上の 2 式から

$$p + q = 1,\quad p + r = -2 - \sqrt{3},\quad q + r = -2 + \sqrt{3}$$

これを解くと　$p = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$，$q = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$，$r = -\frac{5}{2}$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ より　$\mathrm{PQ} = \sqrt{2}(q - p) = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}(2\sqrt{6})^2 \sin 60^\circ = \boldsymbol{6\sqrt{3}}$

(4) $a = 2$ より，(1) の結果から　$p + q = 2$　$\cdots$①

S$(1,\ 1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{SP}} = (p - 1,\ p^2 - 1) = (p - 1)(1,\ p + 1)$
$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = (q - 1,\ q^2 - 1) = (q - 1)(1,\ q + 1)$

$\angle\mathrm{S} = \frac{\pi}{2}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = 0$ であるから

$$1\cdot1 + (p + 1)(q + 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pq + p + q + 2 = 0$$

① を上式に代入すると　$pq = -4$

よって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQS} &= \frac{1}{2}|(p - 1)(q - 1)||1(q + 1) - 1(p + 1)| \\ &= \frac{1}{2}|pq - (p + q) + 1|(q - p) = \frac{1}{2}|-4 - 2 + 1|(q - p) \\ &= \frac{5}{2}(q - p) = \frac{5}{2}\sqrt{(p + q)^2 - 4pq} = \frac{5}{2}\sqrt{2^2 - 4\cdot(-4)} = \boldsymbol{5\sqrt{5}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 1\cdot 1 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

また
$$\begin{aligned}|\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 \\ &= 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1\cos\theta + 1^2 = \boldsymbol{2 + 2\cos\theta}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= \left\{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) \\ &= (1-t)(\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b}) + \frac{t}{2}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2) \\ &= (1-t)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{t}{2}(1-1) = 0\end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(2) の結果に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} &= \left\{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot\left\{-\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} \\ &= (t-1)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}(1-t) - \frac{t}{2}\right\}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \frac{t}{4}|\vec{b}+\vec{c}|^2 \\ &= (t-1) + \left(\frac{1}{2} - t\right) + \frac{t}{4}(2 + 2\cos\theta) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ であるから

$$-\frac{1}{2} + \frac{t}{2}(1+\cos\theta) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t = \frac{1}{1+\cos\theta}}$$

(4) (2)，(3) の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \left|(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right|^2 \\
&= (1-t)^2|\vec{a}|^2+t(1-t)\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+\frac{t^2}{4}|\vec{b}+\vec{c}|^2 \\
&= (1-t)^2+t(1-t)+\frac{t^2}{4}(2+2\cos\theta) \\
&= 1-t+\frac{1}{2}t^2(1+\cos\theta) = 1-\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{2(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}
\end{aligned}
$$

よって　$h=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{\boldsymbol{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であるから

$$(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{ゆえに} \quad (1-t)\left\{\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\}=\vec{0}$$

したがって　$(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})=\vec{0}$

A と M は異なる点であるから　$1-t=0$　よって　$t=1$
これを (3) の結果に代入すると

$$\frac{1}{1+\cos\theta}=1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2}} \quad \text{このとき} \quad h=\sqrt{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

■

5 (1)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - (\sqrt{2}+1)a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

上の漸化式およびその補助方程式は

$$\begin{cases} a_{n+1} = (\sqrt{2}+1)a_n + 1 & \cdots ① \\ c = (\sqrt{2}+1)c + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② から $a_{n+1} - c = (\sqrt{2}+1)(a_n - c)$

② を解いて $c = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって $a_{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)\left(a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ は，初項 $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，公比 $\sqrt{2}+1$ の等比数列であるから

$$a_n + \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって $\boldsymbol{a_n = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^n - 1}{\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2}+1 > 1$ であるから $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$

(2) 求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\log 2}{2}}$$

(3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ より $S = \pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,dx = \pi\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4\,dx$

$t = 1 - \sqrt{x}$ とおくと

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$x = (1-t)^2$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2(t-1)$

よって $S = \pi\displaystyle\int_1^0 t^4 \cdot 2(t-1)\,dt$

$$= \pi\int_0^1 (-2t^5 + 2t^4)\,dt = \pi\left[-\frac{1}{3}t^6 + \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{15}}$$

■

6 (1) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{2}{x-1} - 1 = -2(x-1)^{-1} - 1$ より

$$f'(x) = 2(x-1)^{-2} = \frac{2}{(x-1)^2} \qquad f''(x) = -4(x-1)^{-3} = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \mathbf{-1}$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \boldsymbol{\infty}$

$\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \boldsymbol{-\infty}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right) = \mathbf{-1}$

(3) $f(x) = -\dfrac{2}{x-1} - 1$ より，格子点の x 座標は

$$x - 1 = \pm1,\ \pm2 \quad \text{すなわち} \quad x = -1,\ 0,\ 2,\ 3$$

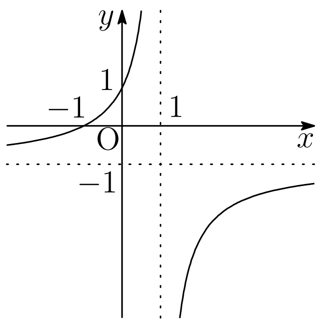
よって，求める格子点の座標は

$$\mathbf{(-1,\ 0,),\ (0,\ 1),\ (2, -3),\ (3, -2)}$$

(4) $y = -\dfrac{2}{x-1} - 1$ より漸近線の方程式は

$$x = 1, \quad y = -1$$

したがって，求めるグラフの概形は，右のようになる．



(5) 求める図形の面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(-\frac{2}{x-1} - 1\right)dx$$
$$= \Big[-2\log|x-1| - x\Big]_{-1}^{0} = \mathbf{2\log 2 - 1}$$

7　(1) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より　$f(x) = 1 - 2\sin^2 x - 4\sin^3 x$

$t = \sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(t) &= -4t^3 - 2t^2 + 1 \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \\ g'(t) &= -12t^2 - 4t \\ &= -4t(3t+1) \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$g'(t) < 0$ であるから，$g(t)$ は単調減少．

よって　$t = 0$　すなわち　$x = 0,\ \pi$ のとき　最大値 **1**

　　　　$t = 1$　すなわち　$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　最小値 **−5**

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x - 4\sin^3 x = \cos 2x - 4(1 - \cos^2 x)\sin x \\ &= \cos 2x - 4\sin x + 4\cos^2 x \sin x \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + 4\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x + C}$　**(C は積分定数)**

別解　$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ より　$f(x) = \cos 2x + \sin 3x - 3\sin x$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + 3\cos x + C}$　**(C は積分定数)**

(補足) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(3)
$$\begin{aligned} g(t) &= -4t^3 - 2t^2 + 1 = -(2t-1)(2t^2 + 2t + 1) \\ &= -(2t-1)\left\{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

上式から，$g(t) = 0\ (0 \leqq t \leqq 1)$ の解は　$t = \dfrac{1}{2}$

よって　$f(x) = 0\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の解は　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

(4) (3) の結果から，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ において　$g(t) \leqq 0$

よって，(2)，(3) の結果から，求める面積を S とすると

$$S = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} f(x)\,dx = -\left[\frac{1}{2}\sin 2x + 4\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{2}}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = e^{-x}\sin x\ (x \geqq 0)$ について，$f(x) = 0$ となる x の値であるから

$$\sin x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

よって，求める点 P_n の x 座標は　$\boldsymbol{x = n\pi}$

(2) (1) の結果から　$S_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |e^{-x}\sin x|\,dx$

ここで，$x = t + (n-1)\pi$ とおくと

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$\dfrac{dx}{dt} = 1$

よって

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi} |e^{-t-(n-1)\pi}\sin\{t + (n-1)\pi\}|\,dt \\ &= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt \\ &= e^{-(n-1)\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)\right]_0^{\pi} \\ &= e^{-(n-1)\pi} \times \frac{e^{-\pi}+1}{2} = \boldsymbol{\frac{(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi}}{2}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-(k-1)\pi} \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2} \times \frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} = \boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}} \end{aligned}$$

また，$0 < e^{-\pi} < 1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} = \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}$$

■

5.2 2016年

- 教育A・経済・水産・環境科学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 工・歯学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2 - x$ の頂点をPとする．点Qはこの放物線上の点であり，原点O(0, 0)とも点Pとも異なるとする．∠OPQが直角であるとき，点Qの座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は以下の条件(イ)，(ロ)，(ハ)を満たす．そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ．

(イ) $f'(x) = x^2 + ax$

(ロ) $f(0) = -1$

(ハ) $f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

(3) 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$ を解け．

(4) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式 $\sin 3x + \sin 2x < \sin x$ を解け．

$\boxed{2}$ 空間において，3点A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5)を頂点とする三角形ABCがある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分AB，BC，CAの長さを求めよ．

(2) 三角形ABCの面積 S を求めよ．

(3) 原点O(0, 0, 0)から平面ABCに垂線を下ろし，平面ABCとの交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，実数 ℓ，m の値を求めよ．

(4) 直線AHと直線BCの交点をMとする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形HBCの面積 T を求めよ．

(5) 原点Oを頂点，四角形ABHCを底面とする四角錐(すい)O-ABHCの体積 V を求めよ．

3 半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある．その面積を S とする．D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる．さらに，D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる．このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$．D_n の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S と S_1 を求めよ．

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$．

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，

$$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$$

である．

4 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある．右の図 1 のように，2 辺 BC，CD 上に，BS $=$ CT $= x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を満たす点 S，T をとる．このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい．以下の問いに答えよ．

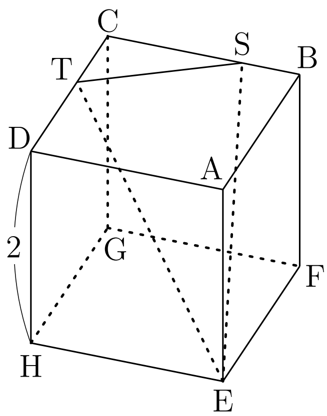


図 1

(1) 右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ．

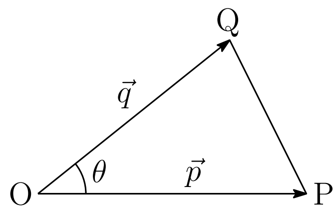


図 2

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \vec{c}$ とおく．立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ．

(3) 上の (1) を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値も答えよ．

5 以下の問いに答えよ．

(1) 関数
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求めよ．また，この関数の逆関数を求めよ．

(2) 定積分
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$
について，I_1，I_2，I_3 を求めよ．

(3) 関数
$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x} \quad (x > 0)$$
がある．曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．曲線 C と直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

6 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，2つの関数 $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$，$g(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ を考える．曲線 $C_1 : y = f(x)$ と曲線 $C_2 : y = g(x)$ で囲まれた図形を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最大値と最小値を求めよ．

(2) 曲線 C_1 は曲線 C_2 と原点に関して対称であることを示せ．

(3) 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)$ と $-g(x)$ の値の大小関係を調べよ．また，$g(x) \geqq 0$ が成り立つような x の範囲を求めよ．

(4) 図形 D の $x \geqq 0$ の部分を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

$\boxed{7}$ 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C : y = f(x)$ を考える．p を正の数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a，b の値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $\ell : y = c(x-p)+d$ とする．c と d の値を p を用いて表せ．さらに，区間 $x \geqq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \{c(x-p)+d\}$ の増減を調べ，不等式

$$f(x) \geqq c(x-p)+d \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形を F とする．その面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える．R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ．

$\boxed{8}$ 楕円（だえん）$x^2 + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ $(a > 0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0, -a)$ とする．θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AP の長さを ℓ とする．$X = \sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y = \ell^2$ となる関数を $Y = f(X)$ とする．$f(X)$ を X の式で表せ．

(2) $0 < a < 1$ の場合．
(1) の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ．

(3) $a = 2$ の場合．
(1) の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を $\mathrm{P_1}$ とする．$f(X)$ の最大値と $\mathrm{P_1}$ の座標を求めよ．また，点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ を中心とし点 $\mathrm{P_1}$ を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

解答例

1 (1) $y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$　ゆえに　$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

直線 OP の傾きは　$\dfrac{-\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = -\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{Q}(t,\ t^2 - t)$ とすると，直線 OP と直線 PQ は垂直であるから

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - t - \left(-\frac{1}{4}\right)}{t - \frac{1}{2}} = -1 \quad \text{整理すると} \quad (2t-1)(2t-5) = 0$$

$t \neq \dfrac{1}{2}$ であるから　$t = \dfrac{5}{2}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)}$

(2) $f'(x) = x^2 + ax = x(x+a)$ より $(a > 0)$，3 次関数 $f(x)$ は，極大値 $f(-a)$，極小値 $f(0)$ をとる．

$$f(-a) - f(0) = \int_0^{-a} f'(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2\right]_0^{-a} = \frac{1}{6}a^3$$

条件から，$f(-a) - f(0) = \dfrac{4}{81}$ であるから

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{4}{81} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

$f'(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x$ であるから，$f(0) = -1$ より　$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 1}$

(3) 与えられた方程式から　$2|\log_2 x|^2 - 7|\log_2 x| - 4 = 0$

ここで，$t = |\log_2 x|$ とおくと $(t \geqq 0)$

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-4)(2t+1) = 0$$

$t \geqq 0$ より　$t = 4$　ゆえに　$\log_2 x = \pm 4$　よって　$x = 2^{\pm 4} = \boldsymbol{16,\ \frac{1}{16}}$

(4) 与えられた不等式から

$$\begin{aligned}(\sin 3x - \sin x) + \sin 2x &< 0 \\ 2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x &< 0 \\ \sin x(\cos 2x + \cos x) &< 0 \\ \sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1) &< 0 \\ \sin x(\cos x + 1)(2\cos x - 1) &< 0\end{aligned}$$

$\sin x > 0$　すなわち　$0 < x < \pi$ のとき　$\cos x < \dfrac{1}{2}$

$\sin x < 0$　すなわち　$\pi < x < 2\pi$ のとき　$\cos x > \dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < x < \pi,\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi}$　■

$\boxed{2}$ (1) A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-4,-1,5),\quad \overrightarrow{\mathrm{CA}}=(5,-1,-4)$$

したがって
$$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$$
$$\mathrm{BC}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}}$$
$$\mathrm{CA}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2}=\boldsymbol{\sqrt{42}}$$

(2) (1) の結果から，三角形 ABC は BC = CA の二等辺三角形であるから，C から辺 AB に下した垂線の長さは

$$\sqrt{(\sqrt{42})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{9}{2}\sqrt{2}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\sqrt{3}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-5,1,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=(5,\ 0,\ 1)+\ell(-1,\ 2,-1)+m(-5,\ 1,\ 4)\\&=(5-\ell-5m,\ 2\ell+m,\ 1-\ell+4m)\quad\cdots①\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-1(5-\ell-5m)+2(2\ell+m)-1(1-\ell+4m)\\&=6\ell+3m-6\\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=-5(5-\ell-5m)+(2\ell+m)+4(1-\ell+4m)\\&=3\ell+42m-21\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=0$ より

$$\begin{cases}6\ell+3m-6=0\\3\ell+42m-21=0\end{cases}\qquad これを解いて\quad \boldsymbol{\ell=\frac{7}{9},\ m=\frac{4}{9}}$$

(4) (3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{11}{9}\cdot\dfrac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{11}$

ゆえに　$\boldsymbol{k=\dfrac{11}{9}}$，AM : MH = 9 : 2　よって　$T=\dfrac{2}{9}S=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(5) (3) の結果を ① に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 2,\ 2)$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2\sqrt{3}$

(4) の結果から，四角形 ABHC の面積は　$\dfrac{11}{9}S=\dfrac{11}{9}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{3}=\dfrac{11}{2}\sqrt{3}$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{11}{2}\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=\mathbf{11}$　■

3 (1) $S = 12\times\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\sin 30^\circ = \mathbf{3}$

S と S_1 の相似比は　$1 : \cos 15^\circ = 1 : \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

S と S_1 の面積比は　$1 : \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 : \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

したがって　$S_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}S = \boldsymbol{\dfrac{3(2+\sqrt{3})}{4}}$

(2) $S_n = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n S = \mathbf{3}\boldsymbol{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n}$

(3) (1)，(2) の結果を $S_n \leqq \dfrac{1}{2}$ に代入すると

$$3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \frac{1}{2}\cdot 3 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{4}{2+\sqrt{3}}\right)^n \geqq 2$$

2 を底とする対数をとると

$$n\log_2\frac{4}{2+\sqrt{3}} \geqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad n \geqq \frac{1}{\log_2\frac{4}{2+\sqrt{3}}} \qquad \cdots(*)$$

$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$，$\log_2\dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = 2-\log_2(2+\sqrt{3})$ より

$$\frac{1}{10} = 0.1 < \log_2\frac{4}{2+\sqrt{3}} < 0.11 = \frac{11}{100}$$

したがって　$9+\dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{\log_2\frac{4}{2+\sqrt{3}}} < 10$

よって，$(*)$ を満たす最小の整数 n は　**10** ■

4　(1) $\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

(2) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ES}} = \vec{a} + \dfrac{x}{2}\vec{b} + \vec{c},\ \ \overrightarrow{\mathrm{ET}} = \dfrac{2-x}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2 &= |\vec{a}|^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 2^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 \\
&= \boldsymbol{x^2+8} \\
|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2 &= \left(\frac{2-x}{2}\right)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 2^2 + 2^2 + 2^2 \\
&= \boldsymbol{(2-x)^2+8} \\
\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}} &= \frac{2-x}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{x}{2}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = \frac{2-x}{2}\cdot 2^2 + \frac{x}{2}\cdot 2^2 + 2^2 \\
&= \boldsymbol{8}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を (1) に代入すると

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)\{(2-x)^2+8\}-8^2}$$

ここで，$y = 2-x$ とおくと，$x+y=2$ であるから

$$\begin{aligned}
(x^2+8)\{(2-x)^2+8\}-8^2 &= (x^2+8)(y^2+8)-8^2 \\
&= x^2y^2 + 8(x^2+y^2) \\
&= x^2y^2 + 8\{(x+y)^2-2xy\} \\
&= x^2y^2 + 8(4-2xy) = x^2y^2 - 16xy + 32 \\
&= (8-xy)^2 - 32 = \{8-x(2-x)\}^2 - 32 \\
&= \{(x-1)^2+7\}^2 - 32
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\{(x-1)^2+7\}^2-32}}$

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ であるから，(3) の結果から

$\boldsymbol{x = 0,\ 2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとり，$\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{17}}{2}}$ をとる．

■

5 (1) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より　$y'=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=-1$$
$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right)=1$$

y は単調増加　ゆえに　$\boldsymbol{-1<y<1}$

$y=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より　$e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$　ゆえに　$x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

よって，求める逆関数は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)}$

(2) $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\Big[-\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{1-\frac{\pi}{4}}$

$I_3=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)'\tan x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2}$

(3) $f(x)=\dfrac{1+\log x}{x}=x^{-1}+x^{-1}\log x$ より

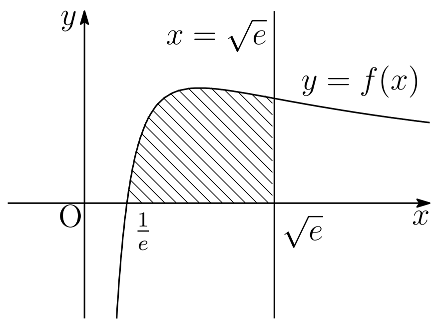
$$f'(x)=-x^{-2}-x^{-2}\log x+x^{-1}x^{-1}=-x^{-2}\log x$$
$$f''(x)=2x^{-3}\log x-x^{-2}x^{-1}=\frac{2\log x-1}{x^3}$$

$f(x)=0$ とすると　$1+\log x=0$　すなわち　$x=\dfrac{1}{e}$,

$f''(x)=0$ とすると　$2\log x-1=0$　すなわち　$x=\sqrt{e}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	極大	↘	変曲点	↘

求める面積を S とすると



$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} \frac{1+\log x}{x}\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} (1+\log x)(\log x)'\,dx$$
$$= \left[\ \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2\ \right]_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

■

6 (1) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+x)}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

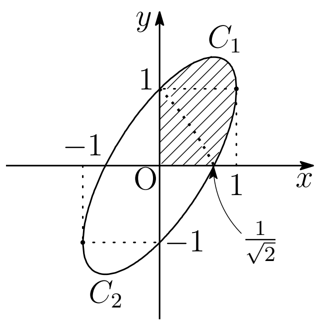
x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	極大 $\sqrt{2}$	$\searrow$	1

よって，最大値 $\boldsymbol{f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}}$，最小値 $\boldsymbol{f(-1) = -1}$

(2) $f(-x) = -x + \sqrt{1-(-x)^2} = -(x - \sqrt{1-x^2}) = -g(x)$
よって，$C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ は原点に関して対称である．

(3) $f(x) - \{-g(x)\} = f(x) + g(x) = 2x$ であるから
$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき $f(x) \leqq -g(x)$，
$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq -g(x)$

$g(x) \geqq 0$ のとき



$x - \sqrt{1-x^2} \geqq 0$　ゆえに　$x \geqq \sqrt{1-x^2} \geqq 0$

両辺を平方して　　$x^2 \geqq 1 - x^2$

$0 \leqq x \leqq 1$ に注意して解くと　　$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1}$

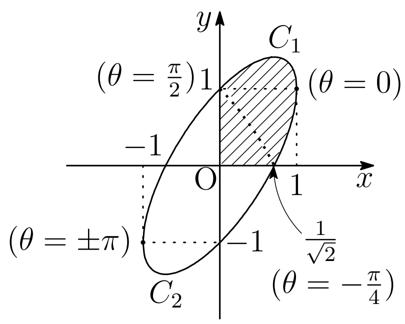
(4) (3) の結果から，求める体積は，上の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転

したものであるから

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (x+\sqrt{1-x^2}\,)^2 dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (x-\sqrt{1-x^2}\,)^2 dx \\ &= \int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2}+1)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (2x\sqrt{1-x^2}-1)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\pi}$

別解 $C(\theta) = (\cos\theta,\ \cos\theta+\sin\theta)$ とおくと，C_1，C_2 は，それぞれ $C(\theta)$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ および $-\pi \leqq \theta \leqq 0$ の部分である．



$x = \cos\theta$，$y = \cos\theta + \sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}y^2\,dx = y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta &= (\cos\theta+\sin\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \{g(x)\}^2\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (-\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta \\ &= \left[\ \cos\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\pi}$ ■

7 (1) $f(x) = xe^x$ より

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = \boldsymbol{(x+1)e^x}$$
$$f''(x) = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' = e^x + (x+1)e^x = \boldsymbol{(x+2)e^x}$$

また　$\{(ax+b)e^x\}' = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$

$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$ であるとき　$(ax+a+b)e^x = xe^x$

したがって　$a = 1,\ a+b = 0$　よって　$\boldsymbol{a = 1,\ b = -1}$

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - f(p) = f'(p)(x-p) \quad \text{ゆえに} \quad y = f'(p)(x-p) + f(p)$$

上式および (1) の結果から　$c = f'(p) = \boldsymbol{(p+1)e^p}$，$d = f(p) = \boldsymbol{pe^p}$

$g(x) = f(x) - \{c(x-p)+d\}$ より

$$g(x) = f(x) - \{(p+1)e^p(x-p) + pe^p\} = f(x) - (p+1)e^p x + p^2e^p$$
$$g'(x) = f'(x) - (p+1)e^p = f'(x) - f'(p)$$

(1) の結果から，$x \geqq 0$ において，$f''(x) > 0$ であるから，$f'(x)$ は単調増加．
したがって，$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$x \geqq 0$ において $g(x) \geqq 0$ であるから　$f(x) - \{c(x-p)+d\} \geqq 0$

よって　$f(x) \geqq c(x-p) + d \quad (x \geqq 0)$

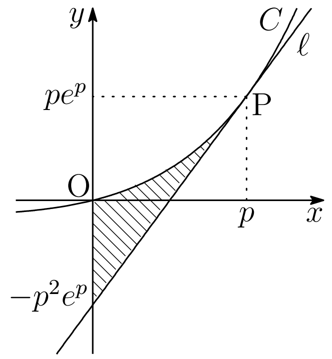
補足 $f''(x) > 0$ である曲線 $y = f(x)$ とその曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を $y = h(x)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) = f(x) - \{f'(p)(x-p) + f(p)\} &= \int_p^x f'(t)\,dt - f'(p)(x-p) \\ &= -\int_p^x (x-t)'f'(t)\,dt - f'(p)(x-p) \\ &= -\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t)\,dx - f'(p)(x-p) \\ &= \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \end{aligned}$$

$x \geqq p$ のとき $\displaystyle\int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \geqq 0$，　$x \leqq p$ のとき $\displaystyle\int_x^p (t-x)f''(t)\,dt \geqq 0$

したがって　$f(x) - h(x) \geqq 0$　よって　$f(x) \geqq h(x)$

(3) 図形 F は，下の図の斜線部分である．



よって，F の面積 $S(p)$ は，(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^p g(x)\,dx = \int_0^p \{f(x) - (p+1)e^p x + p^2 e^p\}\,dx \\ &= \Big[\ (x-1)e^x - \frac{1}{2}(p+1)e^p x^2 + p^2 e^p x\ \Big]_0^p \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1} \end{aligned}$$

(4) R は，P および点 $(0, -p^2e^p)$ を含む x 軸および y 軸に平行な長方形であるから，その面積の最小値 $T(p)$ は

$$T(p) = p\{pe^p - (-p^2e^p)\} = \boldsymbol{p^2(p+1)e^p}$$

よって　　$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)} &= \lim_{p\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1}{p^2(p+1)e^p} \\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{2}{p^2}\right)+\frac{2}{p^3e^p}}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \cos^2\theta + (a\sin\theta - a)^2\\ &= 1-\sin^2\theta + a^2(\sin\theta-1)^2\\ &= 1-X^2+a^2(X-1)^2\\ &= (a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{f(X) = (a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1}$

(2) (1) の結果から　$f(X) = (a^2-1)\left(X-\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)^2+\dfrac{1}{1-a^2}$

$0<a<1$ より，$a^2-1<0$，$\dfrac{a^2}{a^2-1}<0$ であることに注意すると

$\dfrac{a^2}{a^2-1}<-1$　すなわち　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<1$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f(-1)=4a^2}$

$\dfrac{a^2}{a^2-1}\geqq -1$　すなわち　$0<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)=\dfrac{1}{1-a^2}}$

(3) $a=2$ のとき

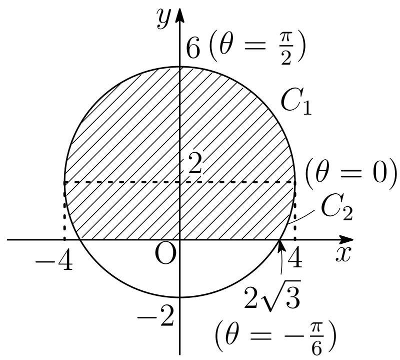
$$f(X)=3X^2-8X+5=3\left(X-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\quad(-1\leqq X\leqq 1)$$

したがって，$f(X)$ は $X=-1$，すなわち，$\mathbf{P_1(0,-2)}$ で最大値 **16** をとる．

A を中心とし，P_1 を通る円を

$$C(\theta)=(4\cos\theta,\ 4\sin\theta+2)$$

とおく．この円の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ および $-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq 0$ の部分をそれぞれ C_1，C_2 とすると，求める回転体の体積 V は



$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_{C_1} y^2\,dx - \int_{C_2} y^2\,dx\\ &= \int_0^4 y^2\,dx - \int_{2\sqrt{3}}^4 y^2\,dx\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}y^2\,dx = y^2\frac{dx}{d\theta}d\theta &= (4\sin\theta+2)^2(4\cos\theta)'d\theta\\ &= -16(4\sin^3\theta+4\sin^2\theta+\sin\theta)\,d\theta\\ &= 16(\sin3\theta+2\cos2\theta-4\sin\theta-2)\,d\theta\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{V}{2\pi} = 16\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin 3\theta + 2\cos 2\theta - 4\sin\theta - 2)\,d\theta$$
$$- 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} (\sin 3\theta + 2\cos 2\theta - 4\sin\theta - 2)\,d\theta$$
$$= 16\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} (\sin 3\theta + 2\cos 2\theta - 4\sin\theta - 2)\,d\theta$$
$$= 16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin 3\theta - 2\cos 2\theta + 4\sin\theta + 2)\,d\theta$$
$$= 16\left[\frac{1}{3}\cos 3\theta - \sin 2\theta - 4\cos\theta + 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{3}\pi + 24\sqrt{3}$$

よって $\quad V = \boldsymbol{\frac{128}{3}\pi^2 + 48\sqrt{3}\pi}$

参照 九大 2012 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{1}}$ の解答[1] を参照. ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

5.3 2017年

- 教育A・経済・水産・環境科学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 工・歯学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) △OABにおいて，辺OAを1 : 2に内分する点をMとし，辺OBを3 : 2に内分する点をNとする．また，線分ANと線分BMの交点をPとし，直線OPと辺ABの交点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ.

(2) 連立不等式

$$x + y \leqq 4, \quad y \leqq 2x + 4, \quad y \geqq 0$$

の表す領域と放物線$y = x^2 - 6x + k$が共有点をもつように，定数kの値の範囲を求めよ.

(3) $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$で定められる数列$\{a_n\}$がある．$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$とおくとき，数列$\{b_n\}$および数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ.

(4) $0 \leqq \theta \leqq \pi$のとき，$\sin^4\theta + \cos^4\theta$の最大値と最小値，およびそのときの$\theta$の値をそれぞれ求めよ.

2 2つの放物線 $C_1: y = 2x^2$ と $C_2: y = -x^2 + 2mx + 1$ について考える．ただし，m を正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) A，B を C_1 上の2点とし，その x 座標をそれぞれ α，β とする．ただし，$\alpha < \beta$ である．このとき，直線 AB の傾きおよび y 切片を，α と β で表せ．

(2) C_1 と C_2 は異なる2点で交わることを示せ．(1) の2点 A，B が C_1 と C_2 の交点であるとき，2次方程式の解と係数の関係を利用して，$\alpha + \beta$，$\alpha\beta$ を求めよ．さらに，$\beta - \alpha$ および直線 AB の方程式を m を用いて表せ．

(3) (2) の点 A，B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ D，E とする．このとき，四角形 ABED の面積 S を m を用いて表せ．

(4) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 T を m を用いて表せ．

(5) (3) と (4) で求めた S，T について，

$$S : T = 3 : 2$$

となるような定数 m の値を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

(2) e を自然対数の底とする．$x > e$ の範囲において，関数

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

を考える．この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ．また，$e < a < b$ のとき，$a^b > b^a$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)$$

であるとき，$a_{n+1} - a_n$ を n の式で表し，a_n が最大となる整数 n をすべて求めよ．

(4) 複素数平面上の点 P(z) が，原点を中心とする半径3の円の周上を動くとき，

$$w = \frac{z + 3i}{z}$$

で表される点 $Q(w)$ はどのような図形を描くか．

4 空間内の3点A，B，Cを頂点とする△ABCを考える．2辺BC，ACの中点をそれぞれM，Nとし，中線AMとBNの交点をGとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) 2点P，Qが $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき，3点P，Q，Gは同一直線上にあることを示せ．

(3) △ABCの頂点の座標が $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(7,\ 0,\ 6)$，$\mathrm{C}(2,\ 12,\ 5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ を考える．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最小値とそのときのPの座標を求めよ．

(4) (3)において，特に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ の最大値とそのときのPの座標，および最小値とそのときのPの座標を，それぞれ求めよ．

5 2つの関数 $f(x)=\log x$，$g(x)=e^x$ がある．原点Oから曲線 $C_1 : y=f(x)$ に引いた接線を ℓ_1，接点をAとし，原点Oから曲線 $C_2 : y=g(x)$ に引いた接線を ℓ_2，接点をBとする．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ_1 の方程式と接点Aの座標を求めよ．また，接線 ℓ_2 についても，その方程式と接点Bの座標を求めよ．

(2) C_1 と ℓ_1 および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) C_1，C_2，x 軸，y 軸および線分ABで囲まれた図形の面積 T を求めよ．

(4) 直線ABに平行な直線 m と曲線 C_1，C_2 の交点を，それぞれP，Qとする．Qの座標を $(t,\ e^t)$ とおくとき，線分PQの長さを t の式で表し，PQの長さの最小値と，そのときのP，Qの座標を求めよ．

6 xy 平面上に放物線 $C : y = x^2$ と直線 $\ell : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ がある．$t > 0$ とし，ℓ 上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\right)$ から C に接線を引く．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P を通り，傾き m の直線が C に接するとき，m が満たす 2 次方程式を求めよ．さらに，この 2 次方程式は，常に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) で求めた 2 次方程式の解を m_1，m_2 $(m_1 < m_2)$ とする．このとき，$m_1 + m_2$，$m_1 m_2$，$m_2 - m_1$ を，それぞれ t の式で表せ．

(3) 傾き m_1，m_2 の 2 本の接線が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，$m_1 = \tan\theta_1$，$m_2 = \tan\theta_2$ を利用して $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ を t の式で表せ．さらに，この式を $f(t)$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ．

(4) $t > 0$ であることに注意して，(3) の関数 $f(t)$ の最小値と，そのときの t の値および $\theta_2 - \theta_1$ の値を求めよ．

7 放物線 $C : y = x^2$ と定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ および C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_1(2,\ 4)$ が与えられている．自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ について，以下の操作を繰り返す．

> C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$ に対し，
>
> **手順 1**　直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ と C との交点のうち，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ とし，
>
> **手順 2**　直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ {p_{n+1}}^2)$ とする．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a を定数とする．直線 $y = ax + 1$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とする．このとき，$pq = -1$ が成り立つことを示せ．また，点 Q_1 の座標を求めよ．

(2) 点 P_2，Q_2 および P_3 の座標を求めよ．

(3) 数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(4) $x \geqq 0$ の範囲において，C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ．さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ．

$\boxed{8}$ xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある．この円の周上に 2 点 A$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ と B$(\cos\beta, \sin\beta)$ をとる．ただし，$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．さらに，2 点 A, B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C, D とする．扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD，DC，CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ．
ただし，扇形 OAB と図形 F は，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の範囲にあるものとする．

(1) S_1 を α と β で表せ．

(2) S_2 を α と β で表せ．

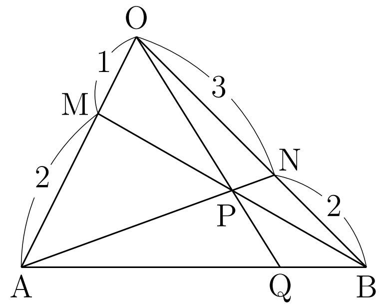
(3) $S_1 = S_2$ のとき，β を α の式で表せ．また，このとき $t = \cos\alpha - \cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) (3) のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする．さらに，$V = V_1 - V_2$ とする．V を t の式で表せ．

(5) (4) において，V の最大値，およびそのときの A，B の座標を求めよ．

解答例

1 (1) チェバの定理 $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NO}}=1$ により



$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}}\cdot\dfrac{2}{3}=1$ ゆえに $\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=3:1$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}}$

$\triangle$OQB と直線 AN について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PQ}}\cdot\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NO}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PQ}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=1$$

これから，$\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}=2:1$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{6}}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと，$\vec{a}=3\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\vec{b}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{3}y\overrightarrow{\mathrm{ON}}=3x\overrightarrow{\mathrm{OM}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

P は 2 直線 AN，BM 上の点であるから $x+\dfrac{5}{3}y=3x+y=1$

これを解いて $x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{2}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

また，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおけるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

Q は線分 AB 上の点であるから

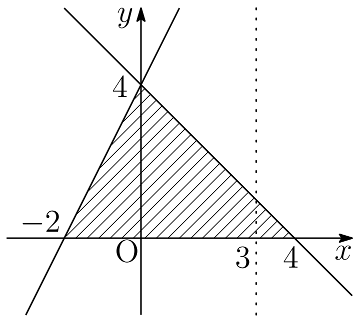
$$\frac{k}{6}+\frac{k}{2}=1 \quad \text{これを解いて} \quad k=\frac{3}{2}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

(2) 連立不等式

$$x + y \leqq 4, \quad y \leqq 2x + 4, \quad y \geqq 0$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で境界線を含む．放物線 $y = x^2 - 6x + k \cdots$ ① は



$$y = (x-3)^2 + k - 9$$

放物線の軸 $x = 3$ に注意すると，k が最大となるのは，直線 $x + y = 4$ 上の点であるから $(0 \leqq x \leqq 4)$，① に $y = 4 - x$ を代入すると

$$4 - x = x^2 - 6x + k \quad \text{ゆえに} \quad k = -x^2 + 5x + 4 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{41}{4}$$

したがって，$x = \dfrac{5}{2}$，すなわち，$\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，k は最大値 $\dfrac{41}{4}$ をとる．

また，k が最小となるのは，点 $(-2,\ 0)$ のときであるから，① により

$$0 = (-2)^2 - 6\cdot(-2) + k \quad \text{すなわち} \quad k = -16$$

よって，求める定数 k の値の範囲は　　$\boldsymbol{-16 \leqq k \leqq \dfrac{41}{4}}$

(3) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1$ より　$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ であるから　$b_1 = a_2 - a_1 = 0$，$b_{n+1} = b_n + 1$

したがって，$\{b_n\}$ は初項 0，公差 1 の等差数列であるから

$$b_n = 0 + 1(n-1) = \boldsymbol{n - 1}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$$

$$a_n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(0 + n - 2)$$

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するので　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)}$

(4) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$ であるから

$\sin 2\theta=0$　すなわち　$2\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき　最大値 1

$\sin 2\theta=\pm 1$　すなわち　$2\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　最小値$\dfrac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi}$ **のとき最大値 1，**　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ ■

2 (1) $C_1 : y=2x^2$ 上の 2 点 A，B の x 座標がそれぞれ α，β であるから，
2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 2\beta^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-\alpha^2=\frac{2\beta^2-2\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad y=2(\alpha+\beta)x-2\alpha\beta$$

よって　　傾き $\boldsymbol{2(\alpha+\beta)}$，　y 切片 $\boldsymbol{-2\alpha\beta}$

(2) C_1，C_2 の方程式から，y を消去すると

$$2x^2=-x^2+2mx+1\quad \text{整理すると}\quad 3x^2-2mx-1=0\quad \cdots(*)$$

$(*)$ の係数について　$D/4=(-m)^2-3\cdot(-1)=m^2+3>0$

したがって，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わる．

$(*)$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\boldsymbol{\frac{2m}{3}},\qquad \alpha\beta=\boldsymbol{-\frac{1}{3}}\qquad \cdots(**)$$

上の 2 式から，$\alpha<\beta$ により

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{\left(\frac{2m}{3}\right)^2-4\left(-\frac{1}{3}\right)}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{m^2+3}}$$

直線 AB の方程式は，(1) の結果により　$\boldsymbol{y=\dfrac{4m}{3}x+\dfrac{2}{3}}$

(3) $\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 2\beta^2)$，$\mathrm{D}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{E}(\beta,\ 0)$ を頂点とする四角形 ABED の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2)(\beta-\alpha)=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}(\beta-\alpha)\\&=\left\{\left(\frac{2m}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}\times\frac{2}{3}\sqrt{m^2+3}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{27}(2m^2+3)\sqrt{m^2+3}}\end{aligned}$$

(4) $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$-x^2+2mx+1 \geqq 2x^2$ であるから，$(**)$ により

$$\begin{aligned}
T &= \int_\alpha^\beta \{(-x^2+2mx+1)-2x^2\}\,dx \\
&= -3\int_\alpha^\beta \left(x^2-\frac{2m}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx \\
&= -3\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx \\
&= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{m^2+3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{27}(m^2+3)\sqrt{m^2+3}}
\end{aligned}$$

(5) (3),(4) の結果から

$$\begin{aligned}
S : T &= \frac{4}{47}(2m^2+3)\sqrt{m^2+3} : \frac{4}{27}(m^2+3)\sqrt{m^2+3} \\
&= (2m^2+3) : (m^2+3)
\end{aligned}$$

$S : T = 3 : 2$ であるから

$$(2m^2+3) : (m^2+3) = 3 : 2 \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = 3$$

$m > 0$ であるから　　$\boldsymbol{m = \sqrt{3}}$ ■

3 (1) $4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta = 4\sin^3\theta + 3(1-\sin^2\theta) = 4\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + 3$

$t = \sin\theta$ とおくと，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき　$0 \leqq t \leqq 1$

また，$f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 3$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと

$$f'(t) = 12t^2 - 6t = 6t(2t-1)$$

$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	極小 $\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4

よって　$t = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$ のとき　最大値 **4**

$t = \frac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\frac{11}{4}}$

(2) $y = x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると　$\log y = \dfrac{1}{x}\log x$

これを x について微分すると

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad y' = \frac{1}{x^2}(1-\log x)x^{\frac{1}{x}}$$

$x > e$ において，$y' < 0$ であるから，$x > e$ において，y は減少関数.

したがって，$e < a < b$ のとき　　$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$

この両辺を ab 乗すると　$\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{ab} > \left(b^{\frac{1}{b}}\right)^{ab}$　　よって　$a^b > b^a$

(3) $a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n - \left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n n\left\{\frac{3}{4}(n+1) - (n-1)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n n(7-n) \end{aligned}$$

したがって　$a_1 < a_2 < \cdots < a_6 < a_7 = a_8 > a_9 > \cdots$

よって，a_n が最大となる正の整数 n は　　$\boldsymbol{n = 7,\ 8}$

別解 $a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$，$a_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n$ より

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4}\cdot\frac{n+1}{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{3(n-1)}{4(n-1)} - 1 = \frac{7-n}{4(n-1)}$$

したがって　$a_1 = 0 < a_2 < \cdots < a_6 < a_7 = a_8 > a_9 > \cdots$

よって，a_n が最大となる正の整数 n は　　$n = 7,\ 8$

(4) 点 $\mathrm{P}(z)$ は，原点を中心とする半径 3 の円の周上にあるから　$|z| = 3$

$w = \dfrac{z+3i}{z}$ より，$z(w-1) = 3i$ であるから

$$|z(w-1)| = |3i| \quad \text{ゆえに} \quad |z||w-1| = 3 \quad \text{よって} \quad |w-1| = 1$$

したがって，$\mathrm{Q}(w)$ は，**点 1 を中心とする半径 1 の円を描く.** ■

$\boxed{4}$ (1) △ABC の 2 本の中線の交点 G は，△ABC の重心であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}$$

(2) (1) の結果から，$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC})\\ &= 3\overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\\ &= 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{PG} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PQ}$ を満たすとき　　$\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{PG}$

よって，3 点 P，Q，G は同一直線上にある．

(3) 3 点 A(0, 0, 1)，B(7, 0, 6)，C(2, 12, 5) を頂点とする △ABC の重心 G は

$$\left(\frac{0+7+2}{3},\ \frac{0+0+12}{3},\ \frac{1+6+5}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 4,\ 4)$$

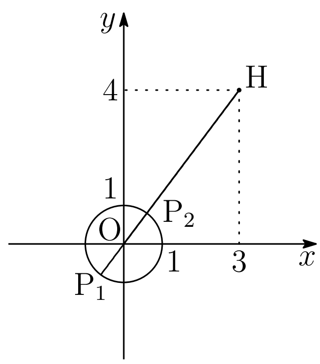
① より，$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 3|\overrightarrow{GP}| \cdots ②$ であるから

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 3|\overrightarrow{GP}| = 3\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2 + 16}$$

よって，P**(3, 4, 0)** のとき，最小値 **12** をとる．

(4) G から xy 平面に垂線 GH を引くと　H(3, 4, 0)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GP}|^2 &= |\overrightarrow{GH}|^2 + |\overrightarrow{HP}|^2\\ &= |\overrightarrow{HP}|^2 + 16 \quad \cdots ③\end{aligned}$$



xy 平面上において，直線 OH と円 $x^2 + y^2 = 1$ の 2 つの交点を

$$\mathrm{P}_1\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \quad \mathrm{P}_2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

とおくと，P が P_1，P_2 にあるとき，$|\overrightarrow{HP}|$ は，それぞれ 6，4 となる．

$4 \leqq |\overrightarrow{HP}| \leqq 6$ であるから，②，③ より，$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ は

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}, -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ \mathbf{0}\right) \text{ のとき，最大値 } 3\sqrt{6^2+16} = \mathbf{6\sqrt{13}}$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ \mathbf{0}\right) \text{ のとき，最小値 } 3\sqrt{4^2+16} = \mathbf{12\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = \log x$ を微分すると　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$C_1 : y = \log x$ と ℓ_1 の接点 A を $(a,\ \log a)$ とすると，ℓ_1 の方程式は

$$y - \log a = \frac{1}{a}(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{a} + \log a - 1$$

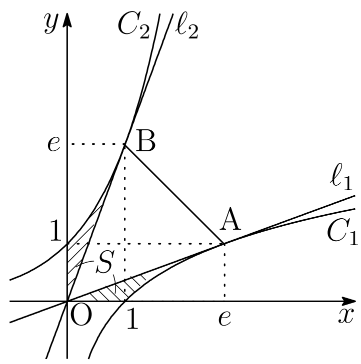
この直線は原点を通るから　$0 = \log a - 1$　ゆえに　$a = e$

よって　　$\mathbf{A}(\boldsymbol{e},\ \mathbf{1})$，$\boldsymbol{\ell_1 : y = \dfrac{x}{e}}$

C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから，点 B，接線 ℓ_2 は，それぞれ点 A，接線 ℓ_1 と直線 $y = x$ に関して対称である．

よって　　$\mathbf{B}(\mathbf{1},\ \boldsymbol{e})$，$\boldsymbol{\ell_2 : y = ex}$

(2) C_1 と ℓ_1 および x 軸で囲まれた図形の面積 S は，(1) で述べた対称性により，C_2 と ℓ_2 および y 軸で囲まれた図形の面積に等しいので



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (e^x - ex)\,dx \\ &= \left[\, e^x - \frac{e}{2}x^2 \,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{e}{2} - 1} \end{aligned}$$

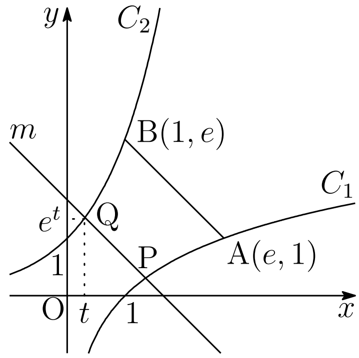
(3) 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(e,\ 1)$，B$(1,\ e)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\text{OAB} = \frac{1}{2}|e\cdot e - 1\cdot 1| = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

したがって，(2) の図から，面積 T は

$$T = 2S + \triangle\text{OAB} = 2\left(\frac{e}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}(e^2 - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2 + 2e - 5)}$$

(4) 直線 AB に平行な直線 m 上にある 2 点 P，Q は直線 $y=x$ に関して対称である．点 Q$(t,\ e^t)$ のとき，点 P の座標は $(e^t,\ t)$ であるから



$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{(t-e^t)^2+(e^t-t)^2}\\ &= \sqrt{2}|e^t-t|\end{aligned}$$

$h(t)=e^t-t$ とおくと　$h'(t)=e^t-1$

右の $h(t)$ の増減表より

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$$\mathbf{PQ}=\boldsymbol{\sqrt{2}(e^t-t)}$$

また，$t=0$，すなわち，**P(1, 0)**，**Q(0, 1)** のとき，PQ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ をとる．

■

6 (1) $y=x^2$ を微分すると，$y'=2x$ であるから，$C: y=x^2$ 上の点における接線の傾きが m となるとき，接点の x 座標は

$$2x=m\quad ゆえに\quad x=\frac{m}{2}$$

したがって，C 上の点 $\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m^2}{4}\right)$ を通り，傾き m の直線は

$$y-\frac{m^2}{4}=m\left(x-\frac{m}{2}\right)\quad すなわち\quad y=mx-\frac{m^2}{4}$$

この直線が点 P$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}\right)$ を通るから，m が満たす 2 次方程式は

$$\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=mt-\frac{m^2}{4}\quad すなわち\quad \boldsymbol{m^2-4tm+2t-1=0}\quad\cdots(*)$$

この m に関する 2 次方程式 $(*)$ の係数について

$$D/4=(-2t)^2-1(2t-1)=4t^2-2t+1=4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，方程式 $(*)$ は，常に異なる 2 つの実数解をもつ．

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解が m_1，m_2 であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{m_1 + m_2 = 4t, \quad m_1 m_2 = 2t - 1}$$

また，$m_1 < m_2$ であるから，上の 2 式から

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} \\ &= \sqrt{(4t)^2 - 4(2t-1)} = \boldsymbol{2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}} \end{aligned}$$

(3) $m_1 = \tan\theta_1$，$m_2 = \tan\theta_2$ であるから，(2) の結果により

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2 - \theta_1) &= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} \\ &= \frac{2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{1 + (2t - 1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{t}} \end{aligned}$$

$f(t) = \dfrac{\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{t}$ であるから

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{t} = \lim_{t\to\infty} \sqrt{4 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \boldsymbol{2}$$

(4) $t > 0$ より　$f(t) = \sqrt{4 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{t} - 1\right)^2 + 3}$

したがって，$f(t)$ は，$\boldsymbol{t = 1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとる．

$-\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ であるから

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \sqrt{3} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3}}$$

■

7 (1) 2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ を通る直線の方程式は $(q<0<p)$

$$y-p^2=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y=(p+q)x-pq \quad \cdots(*)$$

直線 $(*)$ が $y=ax+1$ に一致するから　　$pq=-1$

2点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$，$\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ を通る直線は，$(*)$ より

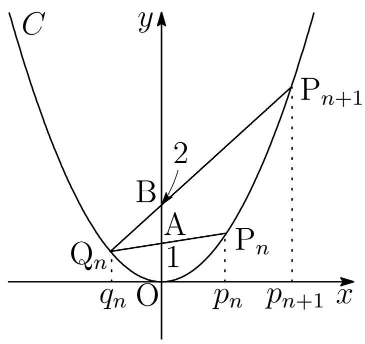
$$y=(p_n+q_n)x-p_nq_n$$

これが，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通るから　　$p_nq_n=-1 \quad \cdots ①$

$p_1=2$ のとき，① より　　$q_1=-\dfrac{1}{2}$

よって，C 上の点 Q_1 の座標は　$\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}}\right)$

(2) 2点 $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ {p_{n+1}}^2)$，$\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ を通る直線は，$(*)$ より



$$y=(p_{n+1}+q_n)x-p_{n+1}q_n$$

これが，点 $\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通るから

$$p_{n+1}q_n=-2 \quad \cdots ②$$

① に $n=2$，② に $n=1,\ 2$ を代入すると

$$p_2q_2=-1, \quad p_2q_1=-2. \quad p_3q_2=-2$$

これに (1) の結果の $q_1=-\dfrac{1}{2}$ を代入することにより

$$p_2=4, \quad q_2=-\frac{1}{4}, \quad p_3=8$$

P_2，Q_2，P_3 は，C 上の点であるから

$$\mathbf{P_2(4,\ 16)}, \quad \mathbf{Q_2}\left(\boldsymbol{-\frac{1}{4},\ \frac{1}{16}}\right), \quad \mathbf{P_3(8,\ 64)}$$

(3) ①，② から，q_n を消去すると　$p_{n+1} = 2p_n$

$p_1 = 2$ より，数列 $\{p_n\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{p_n = 2^n} \quad \text{これを①に代入して} \quad \boldsymbol{q_n = -\frac{1}{2^n}}$$

(4) (1) の結果から直線 PQ の方程式が $y = (p_n + q_n)x + 1$ であるから

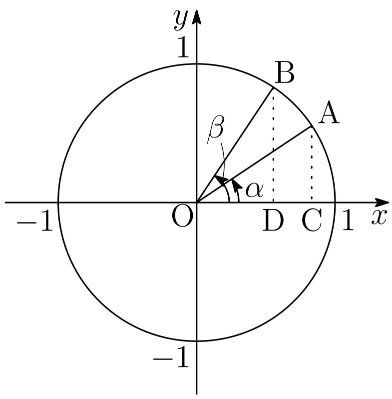
$$\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{p_n} \{(p_n + q_n)x + 1 - x^2\}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(p_n + q_n)x^2 + x \right]_0^{p_n} \\
&= \frac{1}{6}{p_n}^3 + \frac{1}{2}{p_n}^2 q_n + p_n \qquad\qquad (p_n q_n = -1) \\
&= \frac{1}{6}{p_n}^3 + \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{6}(2^n)^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^n = \boldsymbol{\frac{1}{6}(8^n + 3\cdot 2^n)}
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1} + 3\cdot 2^{n+1}}{8^n + 3\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + 6\cdot 2^{-2n}}{1 + 3\cdot 2^{-2n}} = \boldsymbol{8}$ ■

8 (1) $\angle\text{AOB} = \beta - \alpha$ より　$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2(\beta - \alpha) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(\beta - \alpha)}$

(2) $\triangle\text{OAC} = \dfrac{1}{2}\text{OC}\cdot\text{AC} = \dfrac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$

$\quad = \dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$



同様に　$\triangle\text{OBD} = \dfrac{1}{4}\sin 2\beta$

したがって

$$\begin{aligned}
S_2 &= (\triangle\text{OAC} + S_1) - \triangle\text{OBD} \\
&= (\triangle\text{OAC} - \triangle\text{OBD}) + \text{S}_1 \\
&= \frac{1}{4}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + S_1 \quad \cdots ① \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}
\end{aligned}$$

(3) $S_1 = S_2$ のとき，① より

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 0 \quad \text{すなわち} \quad \cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = 0$$

$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \beta+\alpha < \pi$，$0 < \beta-\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$$

したがって
$$\begin{aligned} t &= \cos\alpha - \cos\beta = \cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \cos\alpha - \sin\alpha \quad \cdots ② \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

このとき，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

よって $\boldsymbol{0 < t < 1}$

(4) $\triangle$OAC を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を V_α とすると

$$V_\alpha = \frac{\pi}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$$

同様に，$\triangle$OBD を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を V_β とすると，$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ であるから

$$V_\beta = \frac{\pi}{3}\sin^2\beta\cos\beta = \frac{\pi}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha$$

このとき，$V_1 + V_\alpha = V_2 + V_\beta$ であるから

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = V_\beta - V_\alpha \\ &= \frac{\pi}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha - \frac{\pi}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= \frac{\pi}{3}\cos\alpha\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) \end{aligned}$$

② より $t^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$ ゆえに $\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{1-t^2}{2}$

よって $V = \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{1-t^2}{2} \times t = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}(t - t^3)}$

(5) $f(t) = \dfrac{\pi}{6}(t - t^3)$ $(0 < t < 1)$ とおくと

$$f'(t) = \frac{\pi}{6}(1 - 3t^2) = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}\,t)(1 - \sqrt{3}\,t)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi$	$\searrow$	

したがって，$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{27}\pi}$ をとる．

このとき，② より　　$\cos\alpha - \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　$\cdots$③

③ を等式 $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 2$ に代入することにより

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \frac{5}{3}$$

このとき，$\cos\alpha > 0$，$\sin\alpha > 0$ より　$\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　　$\cdots$④

③，④ を解いて

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$$

また，(3) の結果 $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ により　　$\cos\beta = \sin\alpha, \quad \sin\beta = \cos\alpha$

よって，2点A，Bの座標は

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}}\right), \quad \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}}\right)$$

■

5.4 2018 年

- 教育 A・経済・水産・環境科学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{5}{6}$ の極値を求めよ．さらに，3 次方程式 $f(x) = k$ が，異なる正の解を 2 個，負の解を 1 個もつように，定数 k の値の範囲を定めよ．

(2) $0 < \theta < \pi$ で $\tan\theta = -2\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\cos\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，初項 a_1 および一般項 a_n を求めよ．

(4) 座標平面上に原点 O，点 A(5, 2)，点 B(11, 10) がある．条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ を満たす点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値，およびそのときの P の座標をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ 2x^2 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

と定義する．曲線 $C : y = f(x)$ の上に 2 点 A$(-a,\ a^2)$，B$(a,\ 2a^2)$ がある．ただし，a は正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 AB の方程式を求めよ．また，線分 AB の長さを求めよ．

(2) 曲線 C と直線 AB で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 2 点 A，B における曲線 C の接線を，それぞれ ℓ，m とする．ℓ，m の方程式を求めよ．さらに，ℓ と m の交点 D の座標を求めよ．

(4) 直線 AB と直線 ℓ が直交するように，a の値を定めよ．このとき，曲線 C と 2 直線 ℓ，m とで囲まれる図形の面積 T を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとき，初項 a_1 および一般項 a_n を求めよ．

(2) $\sin \dfrac{\alpha - \beta}{2} = A$ とするとき，

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

の値を A を用いて表せ．

(3) 方程式

$$\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x - 2|$$

を解け．

(4) 関数 $f(x)$ を

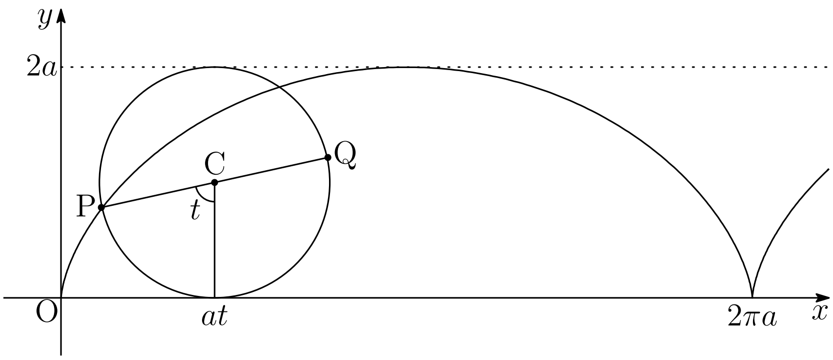
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$$

と定義する．「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$ の $x = 0$ における微分係数を求めよ．

$\boxed{4}$ 半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える．時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある．円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する．このとき，点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ は

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

で表される．以下の問いに答えよ．



(1) 時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ．

(2) 時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ．また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|$ の最大値と最小値，およびその時の P の座標を求めよ．

(3) 時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ．さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ．

(4) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$ がある．曲線 $C:y=f(x)$ の変曲点を P とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減および凹凸を調べ，極値および P の座標を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 P における接線を ℓ とする．また，P を通り ℓ に垂直な直線を m とする．ℓ，m の方程式を求めよ．

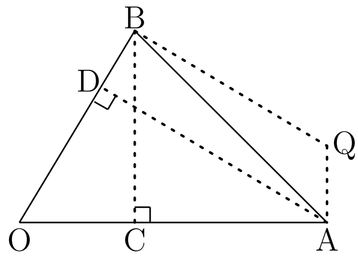
(3) 直線 m と曲線 C との交点で，P と異なる点を Q，R とする．ただし，Q の x 座標は R の x 座標より小さいものとする．このとき，C と線分 PR とで囲まれる図形 F の面積 S を求めよ．

(4) P を通り，図形 F の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

6 三角形 OAB において

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OB} = b, \quad \angle\mathrm{O} = \theta$$

とおく．ただし，$0 < b \leqq a$，$0 < \theta < \pi$ である．また，点 C と D は，それぞれ，直線 OA と OB 上にあり，CB⊥OA，DA⊥OB を満たす．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，この三角形の外心 P について調べる．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a，b，θ，$\vec{a}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を a，b，θ，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) OA の A を通る垂線と，OB の B を通る垂線との交点を Q とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = m\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ となる実数 ℓ，m がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ であることに注意して，ℓ と m の値を a，b，θ を用いて表せ．

(3) Q が (2) の点であるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

となる実数 p，q がある．p と q の値を a，b，θ を用いて表せ．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\vec{a} + s\vec{b}$$

を満たす r と s の値を a，b，θ を用いて表せ．

7 t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある．等式

$$t\left|z + \frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}\,|z - t| \qquad \text{(a)}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を F とする．下の小問 (1) から (4) を通して F がどのような図形を表すか調べたい．以下の問いに答えよ．

(1) A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ．

(2) $t = 1$ ならば，F はどのような図形を表すか．

(3) $t \neq 1$ とする．図形 F の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある．その値 z_1 と z_2 を求めよ．ただし，$|z_1| < |z_2|$ とする．

(4) $t \neq 1$ とする．2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として，m の値を求めよ．また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 F の点であるとき，$|z - m|$ の値を求めよ．さらに，F はどのような図形を表すか．

8 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$0! = 1$ と定める．また，関数 $y = t^0$ は，関数 $y = 1$ を意味する．

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ．同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ．

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ．その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ．さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ．さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ．

(4) $p(x) = x^n$ とおくとき，k 次導関数

$$p^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を求めよ．そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\, dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

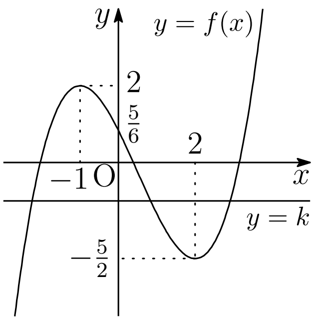
が成り立つことを示せ．ただし，$p^{(0)}(x) = p(x)$ と定める．

解答例

1 (1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{5}{6}$ より

$$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$



よって　極大値 $f(-1)=\mathbf{2}$，極小値 $f(2)=\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$

また，3次方程式 $f(x)=k$ が，異なる正の解を2個，負の解を1個もつ k の値の範囲は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標が $x>0$ の範囲に2個と $x<0$ の範囲に1個もつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-\frac{5}{2}<k<\frac{5}{6}}$$

(2) $0<\theta<\pi$ で $\tan\theta=-2\sqrt{2}<0$ であるから　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$　$\cdots$①

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より　$1+(-2\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

① より，$\cos\theta<0$ であるから　　$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{1}{3}}$

これを $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ に代入すると　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{3}$

① より，$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ に注意して

$$\boldsymbol{\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3) $S_n = 6n - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $n = 1$ を代入すると　$S_1 = 6 - 2a_1$

$S_1 = a_1$ であるから　$a_1 = 6 - 2a_1$　これを解いて　$\boldsymbol{a_1 = 2}$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから，$(*)$ より

$$a_n = 6n - 2a_n - \{6(n-1) - 2a_{n-1}\}$$

整理すると　$3a_n = 2a_{n-1} + 6$　ゆえに　$a_n - 6 = \dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 6)$

これから，数列 $\{a_n - 6\}$ は初項 -4，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n - 6 = -4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから，求める一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(4) A(5, 2)，B(11, 10)，P$(x,\ y)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x - 5,\ y - 2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x - 11,\ y - 10)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ であるから　$(x - 5)(x - 11) + (y - 2)(y - 10) = 0$

したがって　$(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 25 \quad \cdots(*)$

よって，点 P$(x,\ y)$ の軌跡は　**中心 (8，6)，半径 5 の円**

円 $(*)$ の中心を C，$\vec{r} = (4,\ 3)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\vec{r}$，$|\vec{r}| = 5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \vec{r} = 3\vec{r}$，　すなわち，**P(12，9)** のとき　最大値 $3|\vec{r}| = \boldsymbol{15}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + (-\vec{r}) = \vec{r}$，すなわち，**P(4，3)** のとき　最小値 $|\vec{r}| = \boldsymbol{5}$

■

2 (1) 2 点 $\mathrm{A}(-a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(a,\ 2a^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-a^2=\frac{2a^2-a^2}{a-(-a)}(x+a) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2}$$

線分 AB の長さは $(a>0)$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{a-(-a)\}^2+(2a^2-a^2)^2}=\sqrt{4a^2+a^4}=\boldsymbol{a\sqrt{4+a^2}}$$

(2) C は下に凸であるから

$$\begin{aligned} S&=\int_{-a}^{0}\left(\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2-x^2\right)dx+\int_{0}^{a}\left(\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2-2x^2\right)dx \\ &=\int_{-a}^{a}\left(\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}a^2\right)dx-\int_{-a}^{0}x^2\,dx-\int_{0}^{a}2x^2\,dx \\ &=\left[\frac{a}{4}x^2+\frac{3}{2}a^2x\right]_{-a}^{a}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{0}-\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{a}=\boldsymbol{2a^3} \end{aligned}$$

(3) $x<0$ のとき，$f(x)=x^2$ より，$f'(x)=2x$ であるから，ℓ の方程式は

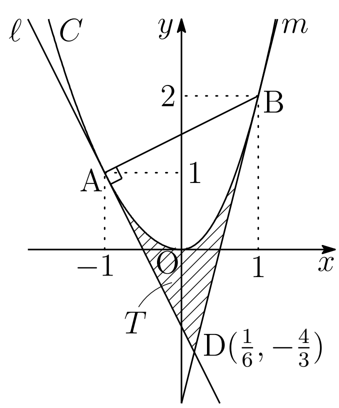
$$y-a^2=-2a(x+a) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=-2ax-a^2}$$

$x \geqq 0$ のとき，$f(x)=2x^2$ より，$f'(x)=4x$ であるから，m の方程式は

$$y-2a^2=4a(x-a) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=4ax-2a^2}$$

ℓ と m の連立方程式を解いて $\quad \boldsymbol{\mathrm{D}\left(\frac{a}{6},-\frac{4}{3}a^2\right)}$

(4) 直線 AB と直線 ℓ が直交するから $(a>0)$



$$\frac{a}{2}\cdot(-2a)=-1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{a=1}$$

このとき $\quad \mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$

(3) の結果から $\quad \mathrm{D}\left(\frac{1}{6},-\frac{4}{3}\right)$

ゆえに $\quad \mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AD}=\frac{7}{6}\sqrt{5}$

したがって $\quad \triangle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\frac{35}{12}$

(2) の結果から $\quad S=2 \quad$ よって $\quad T=\triangle\mathrm{ABD}-S=\frac{35}{12}-2=\boldsymbol{\frac{11}{12}}$ ■

3 (1) **1**(3) を参照.

(2) $\theta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと，$A = \sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\=&2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\=&2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos 2\theta\\=&2-2(1-2\sin^2\theta)=4\sin^2\theta=\boldsymbol{4A^2}\end{aligned}$$

(3) 方程式から　$\log_2 x^2 = \log_2 4|x-2|$

真数は正であるから　$x^2 = 4|x-2| > 0$

(i) $x > 2$ のとき　$x^2 = 4(x-2)$　ゆえに　$(x-2)^2 = -4$

これを満たす実数 x は存在しない.

(ii) $x < 2$ のとき　$x^2 = 4(2-x)$　ゆえに　$(x+2)^2 = 12$

$x < 2$ に注意して　$x = -2 \pm 2\sqrt{3}$

(i),(ii) より　$\boldsymbol{x = -2 \pm 2\sqrt{3}}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$ より　$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to-0}(x+1) = 1$$

よって　$f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$ ■

$\boxed{4}$ (1) 中心 C の座標 $(x,\ y)$ は　$\boldsymbol{x = at,\quad y = a}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = a\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}-t)\\ \sin(\frac{\pi}{2}-t)\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \begin{pmatrix}at\\ a\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(t+\sin t)\\ a(1+\cos t)\end{pmatrix}$$

よって，点 Q の座標 $(x,\ y)$ は　$\boldsymbol{x = a(t+\sin t),\quad y = a(1+\cos t)}$

(2) P の座標 $(x,\ y)$ は，$x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$ であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}} = (a(1-\cos t),\ a\sin t)}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において　$|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}| = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|$ は　$t = \pi$, すなわち, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\pi a,\ 2a})$ のとき, 最大値 $\boldsymbol{2a}$

$t = 0,\ 2\pi$, すなわち, $\mathbf{P(0,\ 0)}$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{2\pi a,\ 0})$ のとき, 最小値 $\mathbf{0}$

(3) (1) の結果から　$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}} = (a(1+\cos t), -a\sin t)}$

ゆえに　$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}} = a^2(1-\cos t)(1+\cos t) - a^2\sin^2 t = \mathbf{0}$

(4) $$L_{\mathrm{P}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{4\sqrt{2}a}$$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において　$|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}| = a\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}$

$$= a\sqrt{2(1+\cos t)} = 2a\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$

$$L_{\mathrm{Q}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2a\cos\frac{t}{2}\,dt - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2a\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$= \left[4a\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[4a\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{4(2-\sqrt{2})a}$$

■

5 (1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$ より　$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$,　$f''(x)=2x$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

よって　**極大値** $\boldsymbol{f(-1)=\dfrac{8}{3}}$，**極小値** $\boldsymbol{f(1)=\dfrac{4}{3}}$，**変曲点** $\mathbf{P(0,\ 2)}$

(2) (1) の結果から　$f'(0)=-1$　ゆえに　ℓ の傾きは -1，m の傾きは 1

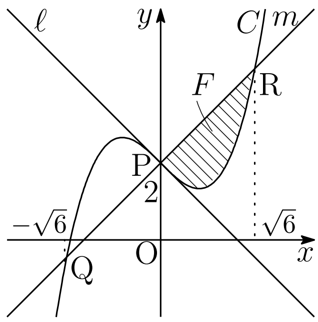
ℓ，m は点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$ を通るから　$\boldsymbol{\ell : y=-x+2,\quad m : y=x+2}$

(3) $C : y=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$，$m : y=x+2$ の共有点の x 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-x+2=x+2 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2-6)=0$$

これを解いて　$x=0,\ \pm\sqrt{6}$

F は右の図の斜線部分であるから



$$S=\int_0^{\sqrt{6}}\left\{x+2-\left(\frac{1}{3}x^3-x+2\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^{\sqrt{6}}\left(2x-\frac{1}{3}x^3\right)dx=\left[x^2-\frac{1}{12}x^4\right]_0^{\sqrt{6}}=\mathbf{3}$$

(4) (3) の図から，F を二等分する直線の方程式を $y=ax+2$ $(-1<a<1)$ とおくと，この直線と C の共有点の x 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-x+2=ax+2 \quad \text{ゆえに} \quad x\{x^2-3(a+1)\}=0$$

これを解いて　$x=0,\ \pm\sqrt{3(a+1)}$

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\sqrt{3(a+1)}}\left\{ax+2-\left(\frac{1}{3}x^3-x+2\right)\right\}dx$$
$$\frac{3}{2}=\int_0^{\sqrt{3(a+1)}}\left\{(a+1)x-\frac{1}{3}x^3\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(a+1)x^2-\frac{1}{12}x^4\right]_0^{\sqrt{3(a+1)}}=\frac{3}{4}(a+1)^2$$

したがって，$\dfrac{3}{4}(a+1)^2=\dfrac{3}{2}$ を $-1<a<1$ に注意して解くと　$a=\sqrt{2}-1$

よって，求める直線の方程式は　$\boldsymbol{y=(\sqrt{2}-1)x+2}$　■

6 (1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルを，それぞれ $\vec{e}$，$\vec{f}$ とおくと　$\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{a}$，$\vec{f} = \dfrac{\vec{b}}{b}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (\mathrm{OB}\cos\theta)\vec{e} = (b\cos\theta)\dfrac{\vec{a}}{a} = \boldsymbol{\dfrac{b\cos\theta}{a}\vec{a}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (\mathrm{OA}\cos\theta)\vec{f} = (a\cos\theta)\dfrac{\vec{b}}{b} = \boldsymbol{\dfrac{a\cos\theta}{b}\vec{b}}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{b} - \dfrac{b\cos\theta}{a}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{a} - \dfrac{a\cos\theta}{b}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = m\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ および上の 2 式から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \ell\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\ &= \vec{a} + \ell\left(\vec{b} - \frac{b\cos\theta}{a}\vec{a}\right) = \left(1 - \frac{b\cos\theta}{a}\ell\right)\vec{a} + \ell\vec{b} \qquad \cdots①\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + m\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\ &= \vec{b} + m\left(\vec{a} - \frac{a\cos\theta}{b}\vec{b}\right) = m\vec{a} + \left(1 - \frac{a\cos\theta}{b}m\right)\vec{b} \qquad \cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$1 - \frac{b\cos\theta}{a}\ell = m, \quad \ell = 1 - \frac{a\cos\theta}{b}m$$

上の 2 式から m を消去すると　$\ell = 1 - \dfrac{a\cos\theta}{b}\left(1 - \dfrac{b\ell\cos\theta}{a}\right)$

したがって　$\ell(1 - \cos^2\theta) = 1 - \dfrac{a\cos\theta}{b}$　　すなわち　$\boldsymbol{\ell = \dfrac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}}$

これから　$$\begin{aligned} m &= 1 - \frac{b\cos\theta}{a}\cdot\frac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}\\ &= 1 - \frac{\cos\theta(b - a\cos\theta)}{a\sin^2\theta} = \boldsymbol{\frac{a - b\cos\theta}{a\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = p\vec{a} + q\vec{b}$ は，①，② より　$p = m$，$q = \ell$

よって　$\boldsymbol{p = \dfrac{a - b\cos\theta}{a\sin^2\theta}}$，$\boldsymbol{q = \dfrac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}}$

$\angle\mathrm{OAQ} = \angle\mathrm{OBQ} = 90^\circ$ より，OQ は △AOB の外接円の直径である．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より　$r = \dfrac{1}{2}p = \boldsymbol{\dfrac{a - b\cos\theta}{2a\sin^2\theta}}$，$s = \dfrac{1}{2}q = \boldsymbol{\dfrac{b - a\cos\theta}{2b\sin^2\theta}}$　■

7 (1)
$$F : t\left|z+\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}|z-t| \quad \cdots\text{(a)}$$

(a) に $z=t$ を代入すると，$t>0$ より

$$(\text{左辺}) = t\left|t+\frac{1}{t}\right| = t\left(t+\frac{1}{t}\right) > 0, \quad (\text{右辺}) = 0$$

(a) に $z=-\dfrac{1}{t}$ を代入すると，$t>0$ より

$$(\text{左辺}) = 0, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{t}\left|-\frac{1}{t}-t\right| = t\left(\frac{1}{t}+t\right) > 0$$

よって，$\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ は，図形 F の点ではない．

(2) $t=1$ のとき　$F : |z+1| = |z-1|$

F の点 z は 2 点 (1)，(−1) から等距離にあるから，F は虚軸にある直線．

(3) (a) より，$t^2\left|z+\dfrac{1}{t}\right|^2 = \dfrac{1}{t^2}|z-t|^2$ であるから $(t \neq 1)$

$$\begin{aligned}
t^2\left(z+\frac{1}{t}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t^2}(z-t)(\overline{z}-t) \\
\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)z\overline{z} + \left(t+\frac{1}{t}\right)(z+\overline{z}) &= 0 \\
z\overline{z} + \frac{t}{t^2-1}(z+\overline{z}) &= 0 \\
\left|z+\frac{t}{t^2-1}\right|^2 &= \frac{t^2}{(t^2-1)^2} \\
\left|z-\frac{t}{1-t^2}\right| &= \frac{t}{|1-t^2|} \quad \cdots(*)
\end{aligned}$$

したがって，F は中心が $\dfrac{t}{1-t^2}$ で，半径 $\dfrac{t}{|1-t^2|}$ の円である．

よって，条件から　$\boldsymbol{z_1 = 0,\ z_2 = \dfrac{2t}{1-t^2}}$

(4) (3) の結果から　$m = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \boldsymbol{\dfrac{t}{1-t^2}}$　$(*)$ より　$\boldsymbol{|z-m| = \dfrac{t}{|1-t^2|}}$

よって，$\boldsymbol{F}$ **は** $\boldsymbol{m}$ **を中心とする半径** $\boldsymbol{|m|}$ **の円である．** ■

$\boxed{8}$ (1) 部分積分法により

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt=-\int_0^x \frac{t^2}{2!}(e^{-t})'\,dt$$
$$=-\left[\frac{t^2}{2!}e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x \frac{t}{1!}e^{-t}\,dt=\boldsymbol{-\frac{x^2}{2!}e^{-x}+F_1(x)},$$
$$F_1(x)=\int_0^x te^{-t}\,dt=-\int_0^x t(e^{-t})'\,dt$$
$$=-\left[te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt=\boldsymbol{-xe^{-x}+F_0(x)}$$

(2) $F_0(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x=\boldsymbol{1-e^{-x}}$

上式および (1) の結果により

$$F_1(x)=-xe^{-x}+(1-e^{-x})=\boldsymbol{1-e^{-x}(x+1)}$$
$$F_2(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+\{1-e^{-x}(x+1)\}=\boldsymbol{1-e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)}$$

(3) (1) と同様に，部分積分法を用いると

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\int_0^x \frac{t^n}{n!}(e^{-t})'\,dt$$
$$=-\left[\frac{t^n}{n!}e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt=\boldsymbol{-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)}$$

$F_k(x)-F_{k-1}(x)=-\dfrac{x^k}{k!}e^{-x}$ であるから $(k=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{k=1}^n\{F_k(x)-F_{k-1}(x)\}=-\sum_{k=1}^n\frac{x^k}{k!}e^{-x}$$
$$F_n(x)-F_0(x)=-e^{-x}\sum_{k=1}^n\frac{x^k}{k!}\qquad\cdots(*)$$

$F_0(x)=1-e^{-x}$ を $(*)$ の辺々に加えると

$$\boldsymbol{F_n(x)=1-e^{-x}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}}$$

(4) $p(x) = x^n$ より　　$\boldsymbol{p^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}}$

(3) の結果から　$\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

よって　$\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx = \frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f'''(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$
$$\int e^{-x+q}f(x)\,dx = -e^{-x+q}\left\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\right\} + C$$

本題は，上の第 2 式を用いると

$$\int_0^x e^{-t}p(t)\,dt = -\sum_{k=0}^{n}\Big[\,e^{-t}p^{(k)}(t)\,\Big]_0^x = \sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{n}e^{-x}p^{(k)}(x)$$

$p(x) = x^n$ であるから　$p^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \\ n! & (k = n) \end{cases}$

よって　$\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$

注意 $\displaystyle e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdots$(a) は，$x \neq 0$ のとき，$\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdots$(b) と表記できるが，$x = 0$ のとき，0^0 の項が現れ不適切である (不定形)．そこで便宜的に $0^0 = 1$ と定めておけば，(a) はすべての x について (b) と表記できる．大学数学では，このように「$0^0 = 1$」と定めて計算する流儀がある．

(∗) より，正確には，$\displaystyle F_n(x) = 1 - e^{-x} - e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ であるが，この便宜的な流儀にならい，$\displaystyle F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ と表記してもよい．■

5.5 2019年

- 教育A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ 数I・II・A・B (80分)
- 教育B・薬学部は，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 工・歯学部は，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{1}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 関数 $y = \cos^2 x - \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ．

(2) 等式 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2^n + 6n^2 + 4n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

(4) 平面上の3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ において

$$|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 3|\vec{c}| = 6k \quad (k\text{ は正の定数})$$
$$\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$$

が成り立っている．このとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を k を用いて表せ．また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 実数 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha \leqq \beta)$ に対し，$p,\ q$ を $p = \alpha + \beta$，$q = \alpha\beta$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $p = 3$，$q = -1$ のとき，α と β の値を求めよ．

(2) 実数 $\alpha,\ \beta$ を解とする x の2次方程式を p，q を用いて表せ．また，このときの p，q が満たす不等式を求めよ．

(3) (2)の実数 α，β が，さらに不等式 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3 \leqq 0$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が存在する領域 E を pq 平面に図示せよ．また，領域 E の面積 S を求めよ．

(4) (3)のとき，$\alpha\beta + \alpha + \beta$ の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの実数 α と β の値を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) 3 次方程式 $x^3 - 3px + p = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつように，実数 p の値の範囲を定めよ．

(2) 関数 $y = \log x$ $(x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を ℓ とする．また，点 P を通り，ℓ に垂直な直線を m とする．2 本の直線 ℓ，m および y 軸とで囲まれる図形の面積を S とする．$S = 5$ となるときの点 P の座標を求めよ．

(3) 空間内に，3 点 $\mathrm{A}(3, -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 4)$ がある．点 C から直線 AB に垂線を引き，交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくとき，実数 t の値と線分 CH の長さを求めよ．

(4) 原点を O とする座標平面上に，曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ があり，C 上に x 座標を t とする第 1 象限の点 P をとる．このとき，点 P から x 軸および y 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれ Q，R とする．四角形 OQPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V の最大値と，そのときの P の座標を求めよ．

4 △OAB の 2 辺 OA，OB 上にそれぞれ点 C，D があり，直線 CD は △OAB の重心 G を通るものとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}\ (0 < x < 1), \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = y\vec{b}\ (0 < y < 1)$$

とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{CG} : \mathrm{GD} = t : (1 - t)$，$0 < t < 1$ とする．このとき，x と y をそれぞれ t の式で表せ．

(2) y を x の式で表せ．また，$0 < y < 1$ より x の値の範囲を求めよ．

(3) △OCD の面積を S_1，△OAB の面積を S_2 とし，$f(x) = \dfrac{S_1}{S_2}$ とする．関数 $f(x)$ の増減表をつくり，$f(x)$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ．

5 曲線 $C : y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 上の x 座標が 0 の点を A，x 座標が $\dfrac{2}{3}\pi$ の点を B とする．点 $\mathrm{P}(p,\ \sin p)$ が曲線 C 上を動くとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AP の中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とする．ただし，P が A と一致するときは，中点 M は A とする．このとき，x と y をそれぞれ p を用いて表せ．また，M がえがく曲線を $C_1 : y = f(x)$ とするとき，関数 $f(x)$ と x の範囲を求めよ．

(2) 線分 PB の中点を $\mathrm{N}(x,\ y)$ とする．ただし，P が B と一致するときは，中点 N は B とする．このとき，x と y をそれぞれ p を用いて表せ．また，N がえがく曲線を $C_2 : y = g(x)$ とするとき，関数 $g(x)$ と x の範囲を求めよ．さらに，$y = g(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 AB とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(4) 3 つの曲線 C, C_1, C_2 の概形をえがき，3 つの曲線で囲まれる図形の面積 T を求めよ．

6 2 次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の 2 つの解を α, β $(-\pi < \arg\beta < \arg\alpha < \pi)$ とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n + \beta^n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_n &= (\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1, a_2, b_1, b_2 の値を求めよ．

(2) α, β を極形式で表し，一般項 a_n, b_n を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対して，a_n, b_n は整数であることを示せ．

(4) 複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\alpha^n)$，$\mathrm{C}(\beta^n)$ について，等式

$$b_n = |\alpha^n - \beta^n|^2$$

が成り立つとき，△ABC はどのような形になるか．また，このときの a_n と b_n の値を求めよ．

7 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定める．

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x} \qquad (x > 0)$$
$$g_n(x) = x(x-1)^{2n} \quad (x \geqq 0)$$

ただし，a_n は各自然数 n に対して定まり，x とは無関係な正の実数である．以下の問いに答えよ．

(1) $x = t$ $(0 < t < 1)$ における $y = f_n(x)$ の接線を ℓ とするとき，ℓ の式を t および a_n を用いて表せ．

(2) (1) の接線 ℓ は，$x = t$ $(0 < t < 1)$ において，$y = g_n(x)$ にも接しているものとする．すなわち，$f_n(t) = g_n(t)$，$f_n'(t) = g_n'(t)$ が同時に成り立つ．このとき，t および a_n をそれぞれ n の式で表せ．

(3) 曲線 $y = g_n(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき，S_n を n の式で表せ．

(4) (2) において，接線 ℓ と x 軸および y 軸とで囲まれる図形の面積を T_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n}$ の値を e を用いて表せ．ただし，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする．

8 方程式 $z^3 = 1$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする．複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $z_1 + z_2 + z_3$，$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$，$z_1z_2z_3$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，線分の長さの 2 乗の和 $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ および線分の長さの積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を，α を用いてそれぞれ表せ．

(3) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，α が $\dfrac{z_2 - \alpha}{z_3 - \alpha} = ri$ $(r > 0)$ を満たすとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最大値および，そのときの r と α の値を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(4) (3) において，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ が最大となるときの $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $$y = \cos^2 x - \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin x$$

$t = \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= 1 - t^2 - t \qquad (-1 \leqq t \leqq 1) \\ &= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

よって　$t = -\frac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$

$t = 1$，すなわち，$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-1}$

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ より　$4xy = 6x + 6y$　ゆえに　$(2x-3)(2y-3) = 9$

x は自然数であるから，$2x - 3 \geqq -1$，$2y - 3 \geqq -1$ に注意して

$$(2x-3,\ 2y-3) = (1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y) = (2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (6,\ 2)}$

(3) $a_1 = 1$，$a_{n+1} - a_n = 2^n + 6n^2 + 4n - 1$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k + 6k^2 + 4k - 1) \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + 6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) \\ &= 2^n + n(2n^2 - n - 2) \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 2^n + n(2n^2 - n - 2)}$

(4) $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ より　　$\boldsymbol{\vec{c} = -\frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}}$

$3|\vec{c}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$ であるから　　$9|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$　$\cdots(*)$

$|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 3|\vec{c}| = 6k$ より　　$|\vec{a}| = 6k$，$|\vec{b}| = 3k$，$|\vec{c}| = 2k$

これを $(*)$ に代入すると

$$9(2k)^2 = (6k)^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4(3k)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = -9k^2}$$

したがって　$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-9k^2}{6k\cdot 3k} = -\frac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi}$　■

2 (1) $p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$ より，$\alpha,\ \beta$ を解とする2次方程式は

$$x^2-px+q=0 \quad すなわち \quad x^2-3x-1=0$$

$\alpha \leqq \beta$ であるから　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ \beta=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$

(2) $\alpha,\ \beta$ を解とする2次方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad ゆえに \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$ であるから，$\alpha,\ \beta$ を解とする2次方程式は

$$\boldsymbol{x^2-px+q=0} \quad \cdots(*)$$

この方程式が実数解をもつから，その判別式を D とすると，$D \geqq 0$ より

$$\boldsymbol{p^2-4q \geqq 0}$$

(3) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3 \leqq 0$ より

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3 \leqq 0 \quad ゆえに \quad p^2-q-3 \leqq 0$$

領域E(下図の斜線部分で境界線を含む)の表す不等式は　$\begin{cases} q \geqq p^2-3 \\ q \leqq \dfrac{p^2}{4} \end{cases}$

2つの放物線 $q=p^2-3,\ q=\dfrac{p^2}{4}$ の共有点の p 座標は　$p=\pm 2$

よって，求める面積 S は

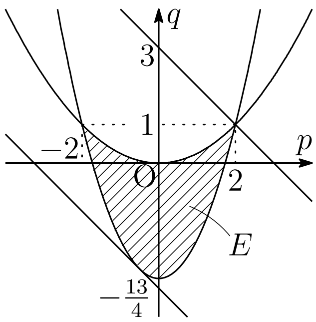
$$S=\int_{-2}^{2}\left\{\frac{p^2}{4}-(p^2-3)\right\}dp=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{2}(p+2)(p-2)\,dp=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot 4^3=\boldsymbol{8}$$

(4) $\alpha\beta+\alpha+\beta=q+p$ より，$p+q=k$ とおく．

E 上の点 $(2,\ 1)$ で k は最大値 $\boldsymbol{3}$ をとる．

$\alpha,\ \beta$ は $(*)$ より，方程式 $x^2-2x+1=0$ の解で

$$\boldsymbol{\alpha=\beta=1}$$



また，k が最小となるとき，

$$q=p^2-3\ (-2 \leqq p \leqq 2)$$

にあるから　$k=p^2+p-3=\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$

ゆえに，点 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$ で，k は最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{13}{4}}$ をとる．$\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ は，

2次方程式 $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{4}=0$ の解で　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{4},\ \beta=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{4}}$

■

3　(1) 3 次方程式 $x^3-3px+p=0\cdots(*)$ より，$f(x)=x^3-3px+p$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3p=3(x^2-p)$$

$p \leqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ となり，$f(x)$ が単調増加で，$(*)$ は異なる 3 つの実数解をもたない．ゆえに，$p>0$ より，$f'(x)=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{p}$

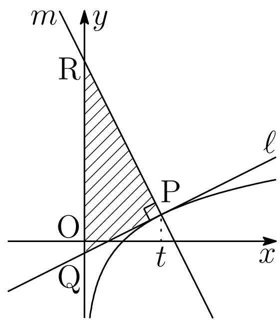
x	$\cdots$	$-\sqrt{p}$	$\cdots$	$\sqrt{p}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極大値 $f(-\sqrt{p})=p(2\sqrt{p}+1)>0$，極小値 $f(\sqrt{p})=p(-2\sqrt{p}+1)$

ゆえに，3次方程式 $(*)$ が，異なる 3 つの実数解をもつためには　$f(\sqrt{p})<0$

したがって　$-2\sqrt{p}+1<0$　よって　$\boldsymbol{p>\dfrac{1}{4}}$

(2) $y=\log x$ より　$y'=\dfrac{1}{x}$



ℓ は，点 P を通り，傾き $\dfrac{1}{t}$ の直線であるから

$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\log t=\frac{x}{t}-1+\log t$$

m は，点 P を通り，傾き $-t$ の直線であるから

$$y=-t(x-t)+\log t=-tx+t^2+\log t$$

2 直線 ℓ, m の y 軸との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{QR}=(t^2+\log t)-(-1+\log t)=t^2+1$$

したがって　　$S=\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}t\cdot\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}t(t^2+1)$

$S=5$ のとき　$\dfrac{1}{2}t(t^2+1)=5$　ゆえに　$(t-2)(t^2+2t+5)=0$

$t^2+2t+5=(t+1)^2+4>0$ に注意して，これを解くと　$t=2$

よって，求める点 P の座標は　　**(2，log 2)**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots(*)$$

A$(3,-1,\ 1)$，B$(0,\ 2,\ 4)$，C$(1,\ 0,\ 4)$ より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 3,\ 3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 1,\ 3),\\ &|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3)^2+3^2+3^2=27,\\ &\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-3\cdot(-2)+3\cdot1+3\cdot3=18\end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入して　$27t=18$　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$

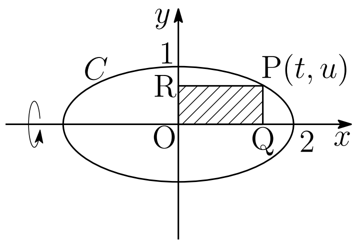
したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{3}(-3,\ 3,\ 3)=(-2,\ 2,\ 2)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ 2)-(-2,\ 1,\ 3)=(0,\ 1,-1)$

よって　$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(4) $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P を $(t,\ u)$ とすると

$$\frac{t^2}{4}+u^2=1 \quad \cdots(*)$$



四角形 OQPR の体積 V は，$(*)$ より

$$V=\pi u^2t=\pi t\left(1-\frac{t^2}{4}\right)=\pi\left(t-\frac{t^3}{4}\right) \quad (0<t<2)$$

$f(t)=t-\dfrac{t^3}{4}$ とおくと　$f'(t)=1-\dfrac{3}{4}t^2=-\dfrac{3}{4}\left(t+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

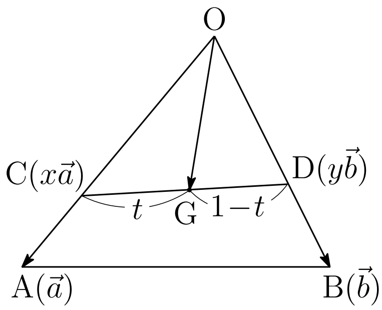
$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(2)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

$t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を $(*)$ に代入し，$u>0$ に注意して解くと　$u=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって，点 P$\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}}\right)$ のとき，V は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi}$ をとる．　■

$\boxed{4}$ (1) $\triangle$OAB の重心 G は　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$



点 G について CG : GD $= t : 1-t$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = y\vec{b}$ であるから

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} = (1-t)x\vec{a} + ty\vec{b}$$

したがって　$\left\{(1-t)x - \dfrac{1}{3}\right\}\vec{a} + \left(ty - \dfrac{1}{3}\right)\vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，$0 < t < 1$ に注意して

$$(1-t)x - \frac{1}{3} = 0, \quad ty - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{3(1-t)}}, \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{3t}}$$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{1}{x} = 3(1-t)$，$\dfrac{1}{y} = 3t$　ゆえに　$\dfrac{1}{y} = 3 - \dfrac{1}{x}$　$\cdots(*)$

$0 < y < 1$ より，$\dfrac{1}{y} > 1$ であるから，$0 < x < 1$ に注意して

$$3 - \frac{1}{x} > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2} < x < 1$$

$(*)$ および上の結果から　$\boldsymbol{y = \dfrac{x}{3x-1}}$　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right)}$

(3) (2) の結果により　$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}} = xy = \dfrac{x^2}{3x-1}$

よって　$f(x) = \dfrac{x^2}{3x-1} = \dfrac{1}{9}\left(3x+1+\dfrac{1}{3x-1}\right)$　$\left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{(3x-1)^2}\right\} = \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

x	$(\frac{1}{2})$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	

よって，$f(x)$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$，このとき，(2) の結果から　$\boldsymbol{x = y = \dfrac{2}{3}}$

補足　$f(x) = \dfrac{1}{9}\left(3x-1+\dfrac{1}{3x-1}+2\right) \geqq \dfrac{1}{9}\left(2\sqrt{(3x-1)\cdot\dfrac{1}{3x-1}}+2\right) = \dfrac{4}{9}$ ■

5 (1) 2 点 A$(0,\ 0)$，P$(p,\ \sin p)$ $\left(0 \leqq p \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ の中点が M$(x,\ y)$ であるから

$$\boldsymbol{x = \frac{p}{2},\ \ y = \frac{\sin p}{2}}\quad \text{ゆえに}\quad C_1 : y = \frac{1}{2}\sin 2x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

よって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)}$

(2) 2 点 B$\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，P$(p,\ \sin p)$ $\left(0 \leqq p \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ の中点が N$(x,\ y)$ であるから

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}\left(p + \frac{2\pi}{3}\right),\quad y = \frac{1}{2}\left(\sin p + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

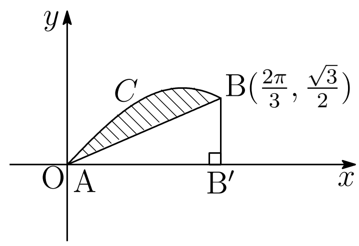
上の 2 式から，p を消去すると

$$C_2 : y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}\right)$$

よって　$\boldsymbol{g(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad \left(\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}\right)}$

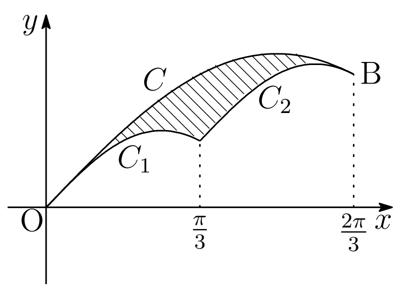
また，$2x - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x = \dfrac{7\pi}{12}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$

(3) S は，右の図の斜線部分であるから



$$S = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx - \triangle \mathrm{ABB'}$$
$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$$

(4) T は，右の図の斜線部分であるから



$$T = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$- \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\right\} dx$$

ここで　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left\{\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) dx$

よって　$\displaystyle T = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) dx$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{2\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$$

■

6 (1) 2次方程式

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

の解が $\alpha,\ \beta$ であるから，解と係数の関係により

$$a_1 = \alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = 1$$

ゆえに　$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$

$a_n = \alpha^n + \beta^n$,

$b_n = (\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1 = 1^n - a_n + 1 = 2 - a_n$

よって　$a_1 = \mathbf{1},\ a_2 = \mathbf{-1}$

$b_1 = 2 - a_1 = 2 - 1 = \mathbf{1},\ b_2 = 2 - a_2 = 2 - (-1) = \mathbf{3}$

(2) 2次方程式 $(*)$ を解くと　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

この方程式の解 $\alpha,\ \beta$ について，$-\pi < \arg\beta < \arg\alpha < \pi$ であるから

$$\boldsymbol{\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \quad \beta = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n = \alpha^n + \beta^n &= \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3} = \mathbf{2\cos\frac{n\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$b_n = 2 - a_n = \mathbf{2 - 2\cos\frac{n\pi}{3}}$$

(3) (2) の結果から，法6に関して

$n \equiv 0 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n) = (2,\ 0)$
$n \equiv \pm 1 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n) = (1,\ 1)$
$n \equiv \pm 2 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n) = (-1,\ 3)$
$n \equiv 3 \pmod 6$ のとき　$(a_n,\ b_n) = (-2,\ 4)$

よって，すべての自然数 n に対して，$a_n,\ b_n$ は整数である．

別解　$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha+\beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$, $\alpha + \beta = \alpha\beta = 1$ より

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad \cdots ①$$

$a_1 = 1,\ a_2 = -1$ および①より，すべての自然数 n に対して，a_n は整数．
また，$b_n = 2 - a_n$ より，すべての自然数 n に対して，b_n は整数．

(4) (2) の計算により

$$\alpha^n-\beta^n=\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=2i\sin\frac{n\pi}{3}$$

したがって

$$|\alpha^n-\beta^n|^2=4\sin^2\frac{n\pi}{3}=\begin{cases}0 & (n\equiv 0,\ 3)\\ 3 & (n\equiv \pm1,\ \pm 2)\end{cases}\qquad (\mathrm{mod}\ 6)$$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ が成り立つのは，上式および (3) の結果から，$n\equiv\pm2$ (mod 6) のときである．このとき，(2) で示した極形式により

$$\alpha^n=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad \beta^n=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

ゆえに　$|\alpha^n-1|=|\beta^n-1|=|\alpha^n-\beta^n|$　すなわち　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

このとき　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}$

別解 (2) で示したように，b_n は 0 以上の整数 (実数) であるから，$b_n=|b_n|$ より

$$\begin{aligned}b_n&=|(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1|=|(\alpha^n-1)(\beta^n-1)|\\&=|\alpha^n-1||\beta^n-1|\end{aligned}$$

ここで　$|\beta^n-1|=|\beta^n-\alpha^n\beta^n|=|\beta|^n|1-\alpha^n|=|\alpha^n-1|$

したがって　$b_n=|\alpha^n-1|^2=|\beta^n-1|^2$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ が成り立つとき

$$|\alpha^n-1|=|\beta^n-1|=|\alpha^n-\beta^n|\quad \text{すなわち}\quad \mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形になるための条件であるから，$\arg\beta=-\arg\alpha$ より

$$\arg\alpha^n=n\arg\alpha=\frac{n}{3}\pi\equiv\pm\frac{2}{3}\pi\quad(\mathrm{mod}\ 6)\quad \text{よって}\quad n\equiv\pm2\quad(\mathrm{mod}\ 6)$$

このとき，(2) の結果により　$\boldsymbol{(a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}$　■

7 (1) $f_n(x)=\dfrac{a_n}{x}$ より　$f_n'(x)=-\dfrac{a_n}{x^2}$

ℓ は，点 $(t,\ f_n(t))$ を通り，傾き $f_n'(t)$ の直線であるから

$$y-\frac{a_n}{t}=-\frac{a_n}{t^2}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-\frac{a_n}{t^2}x+\frac{2a_n}{t}}$$

(2) $g_n(x) = x(x-1)^{2n}$ より　$g_n'(x) = (x-1)^{2n} + 2nx(x-1)^{2n-1}$

$$= \{(2n+1)x - 1\}(x-1)^{2n-1}$$

$f_n(t) = g_n(t)$ より　$\dfrac{a_n}{t} = t(t-1)^{2n}$　ゆえに　$a_n = t^2(t-1)^{2n}$　$\cdots$①

$f_n'(t) = g_n'(t)$ より　$-\dfrac{a_n}{t^2} = \{(2n+1)t - 1\}(t-1)^{2n-1}$

ゆえに　$a_n = -t^2\{(2n+1)t - 1\}(t-1)^{2n-1}$　$\cdots$②

①，② から，$0 < t < 1$ に注意して

$$t^2(t-1)^{2n} = -t^2\{(2n+1)t-1\}(t-1)^{2n-1}$$
$$t - 1 = -\{(2n+1)t - 1\}$$

ゆえに　$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{n+1}}$　これを ① に代入すると

$$a_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{n+1} - 1\right)^{2n} = \boldsymbol{\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}}$$

(3) $y = g_n(x)$ は x 軸と 2 点 $(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を共有し，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$g_n(x) \geqq 0$ であるから

$$S_n = \int_0^1 x(x-1)^{2n}\,dx = \int_0^1 x(1-x)^{2n}\,dx$$

ここで，$1 - x = t$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = -1$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$S_n = \int_1^0 (1-t)t^{2n}(-dt) = \int_0^1 (t^{2n} - t^{2n+1})\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \boldsymbol{\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}}$$

(4) 直線 $\ell : y = -\dfrac{a_n}{t^2}x + \dfrac{2a_n}{t}$ の x 切片 $2t$ および y 切片 $\dfrac{2a_n}{t}$ により

$$T_n = \frac{1}{2}\cdot 2t \cdot \frac{2a_n}{t} = 2a_n = \frac{2n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)^{2n+2}}{2n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4\left(2+\frac{1}{n}\right)}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2 = \boldsymbol{\frac{e^2}{8}}$$

■

8 (1) $z^3-1=0$ の解が z_1, z_2, z_3 であるから

$$\begin{aligned} z^3-1 &= (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \quad \cdots(*) \\ &= z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3 \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較して

$$\boldsymbol{z_1+z_2+z_3=0,\quad z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0,\quad z_1z_2z_3=1}$$

(2) $\mathrm{A}(z_1)$, $\mathrm{B}(z_2)$, $\mathrm{C}(z_3)$, $\mathrm{P}(\alpha)$ より

$$\mathrm{AP}^2=|\alpha-z_1|^2=(\alpha-z_1)(\overline{\alpha}-\overline{z_1})=|\alpha|^2-\overline{z_1}\alpha-z_1\overline{\alpha}+1$$

同様に　$\mathrm{BP}^2=|\alpha|^2-\overline{z_2}\alpha-z_2\overline{\alpha}+1$, $\mathrm{CP}^2=|\alpha|^2-\overline{z_3}\alpha-z_3\overline{\alpha}+1$

上式および (1) の結果から, $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=\overline{z_1+z_2+z_3}=0$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 &= 3|\alpha|^2-(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})\alpha-(z_1+z_2+z_3)\overline{\alpha}+3 \\ &= \boldsymbol{3|\alpha|^2+3} \end{aligned}$$

$\mathrm{AP}=|\alpha-z_1|$, $\mathrm{BP}=|\alpha-z_2|$, $\mathrm{CP}=|\alpha-z_3|$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP} &= |\alpha-z_1||\alpha-z_2||\alpha-z_3| \\ &= |(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)|=\boldsymbol{|\alpha^3-1|} \end{aligned}$$

(3) $z^3=1$ を解いて　$z=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

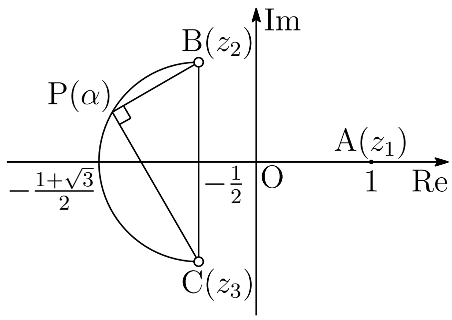
$0\leqq\arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$ に注意して

$$z_1=1,\quad z_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad z_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

α が $\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri\ (r>0)$ を満たすとき

$$\angle z_3\alpha z_2=\frac{\pi}{2}$$

したがって, 右の図のように, $\mathrm{P}(\alpha)$ は BC を直径とする半円上にある (B, C を除く). また, (2) の結果から



$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3|\alpha|^2+3$$

右上の図から, 上式は $\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$ のとき, 最大となる.

最大値は　$3\left|-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right|^2+3=\boldsymbol{\dfrac{12+3\sqrt{3}}{2}}$

このとき，BP $=$ CP，すなわち，$|z_2-\alpha|=|z_3-\alpha|$ より，$r>0$ に注意して

$$r=|ri|=\left|\frac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}\right|=\frac{|z_2-\alpha|}{|z_3-\alpha|}=\mathbf{1}$$

別解　P(α) は BC を直径とする半円上にあるから (B，C を除く)

$$\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\mathrm{BC}^2,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{3}$$

ゆえに　　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=\mathrm{AP}^2+3 \quad \cdots(**)$

前ページの図から，$\boldsymbol{\alpha=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ のとき，$(**)$ は最大となる．

このとき，$\mathrm{AP}=1-\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ より，求める最大値は

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2+3=\boldsymbol{\frac{12+3\sqrt{3}}{2}}$$

(4)　$\mathrm{AP\cdot BP\cdot CP}=|\alpha^3-1|$ に $\alpha=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned}\mathrm{AP\cdot BP\cdot CP}&=\left|-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3-1\right|\\&=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3+1=\boldsymbol{\frac{9+3\sqrt{3}}{4}}\end{aligned}$$

■

5.6　2020 年

- 教育 A・経済・水産・環境科学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育 B・薬学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 工・歯学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 情報データ科学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 必答, $\boxed{5}$, $\boxed{9}$ の 2 題から 1 題選択
  数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) ともに零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$ であり，$3\vec{a} - 2\vec{b}$ と $15\vec{a} + 4\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ．

(2) $a = 4^{50}$，$b = 6^{40}$，$c = 15^{25}$ の常用対数の値を求めよ．また，a，b，c の大小を不等式で表せ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(3) $x = t + \dfrac{1}{t}$ とする．$t > 0$ のとき，$x \geqq 2$ であることを示せ．また，関数

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2a\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (t > 0)$$

の最小値と，そのときの x の値を求めよ．ただし，a は定数とする．

(4) $f(n) = (n-1)n(n+1)$，$g(n) = n^5 - n$ とする．このとき，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 6 の倍数，$g(n)$ は 30 の倍数であることをそれぞれ証明せよ．

2 xy 平面上に直線 $\ell : y = x-1$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．直線 ℓ 上の点 $\mathrm{P}(t, t-1)$ から放物線 C に 2 本の接線 m_1 と m_2 を引き，接点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(s_1,\ {s_1}^2)$ と $\mathrm{Q}_2(s_2,\ {s_2}^2)$ とする．ただし，$s_1 < s_2$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 2 つの接点のうち，1 つを点 $\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ とする．$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における接線の式を s を用いて表せ．また，この接線が点 $\mathrm{P}(t,\ t-1)$ を通ることから，s の 2 次方程式を作り，和 $s_1 + s_2$ および積 $s_1 s_2$ の値を，それぞれ t を用いて表せ．

(2) 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の式を t を用いて表せ．

(3) 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ は t の値にかかわらず定点 N を通る．N の座標を求めよ．また，この点 N が線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の中点 M と一致するときの t の値を求めよ．

(4) 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ と放物線 C とで囲まれる図形の面積 S とするとき，S を t を用いて表せ．また，S を最小にする点 P の座標を求めよ．

3 以下はそれぞれ個別の問題である．各問いに答えよ．

(1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x) = 3\sin x \sin 2x + \cos 3x$ がある．$f(x)$ を $\cos x$ の式で表し，$f(x)$ の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(2) 不等式 $\dfrac{2}{3} + \log_8(2x^2 - x + 1) \leqq \log_2(x+1)$ を解け．

(3) 0 でなく，かつ 1 でもない複素数 z に対して，複素数平面上に 3 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$，$\mathrm{R}(1)$ をとる．点 R が線分 PQ を $t : (1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の比に分けるとき，z は実数ではないことを示せ．

(4) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$，$\beta = 1 - \sqrt{2}$ に対して，$P_n = \alpha^n + \beta^n$ とする．このとき，P_1 および P_2 の値を求めよ．また，すべての自然数 n に対して，P_n は 4 の倍数ではない偶数であることを証明せよ．

4 平面上に△ABC がある．点 O を△ABC の外心とし，外接円の半径を R とする．また，点 H は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を満たす点とする．

ただし，点 H は 3 点 A，B，C と異なる点であるとする．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，AH⊥BC，CH⊥AB であることを示せ．

(2) 線分 OH の中点を P とし，△ABC の各辺 AB，BC，CA の中点を，それぞれ L，M，N とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，P は△LMN の外心になることを示せ．

(3) 線分 AH の中点を D とするとき，P は線分 DM の中点になることを示せ．

(4) 頂点 A から直線 BC に垂線を下ろし，直線 BC との交点を E とするとき，E は△LMN の外接円の周上にあることを示せ．

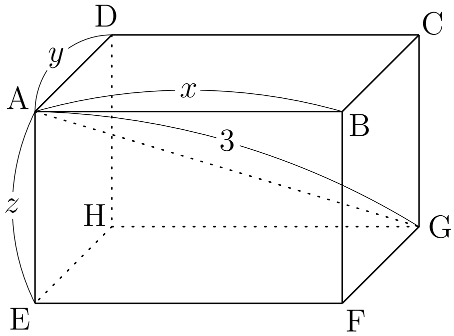
5 下図のように，AB $=x$，AD $=y$，AE $=z$ である直方体 ABCD − EFGH が空間内にある．直方体の対角線 AG の長さを 3，表面積 S を 16 とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $x+y+z$ の値を求めよ．

(2) $y+z$ と yz を x の式で表し，x を用いて y，z を解とする t の 2 次方程式を作れ．

(3) x の値の取り得る範囲を求めよ．

(4) この直方体の体積を V とするとき，V の最大値および最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．



6 自然数 n に対して，

$$a_n = \int_1^e x^2(\log x)^n\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_1 の値を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．また，これを利用して，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ．

(3) $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = x(\log x - 1)^2$ の増減およびグラフの凹凸を調べ，極値と変曲点を求めよ．

(4) (3) の関数 $f(x)$ について，$x \geqq 1$ における曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を F とする．このとき，F を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を a_1，a_2，a_3，a_4 を用いて表し，その値を求めよ．

7 各自然数 n に対して，平面上の 2 つの曲線

$$C_n : y = a_n \sin 2x \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$
$$D_n : y = a_{n+1} \cos x \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．ただし，$\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_n \geqq a_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす x によらない数列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_n，D_n の 2 つの交点のうち，x 軸上にない交点の x 座標を p_n とする．このとき，$\sin p_n$ を a_n，a_{n+1} を用いて表し，$0 < p_n \leqq \dfrac{\pi}{6}$ であることを示せ．

(2) 曲線 C_n と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき，S_n を a_n を用いて表せ．また，$x \geqq p_n$ において，曲線 C_n と D_n とで囲まれる図形の面積を T_n とするとき，T_n を a_n，a_{n+1} を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して $T_n = r^2 S_n$ (r は正の定数) が成り立つとき，一般項 a_n を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ が収束するような r の値の範囲をを求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ が収束するような r の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

$\boxed{8}$ 長さが a のひもを使って，周の長さが a の正三角形，正方形，正五角形，正六角形，$\cdots$ と順次，正多角形を作ることとする．頂点が n 個の正 n 角形 F_n (n は 3 以上の整数) の面積を S_n，F_n の外接円の半径を r_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) S_3 と S_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) r_n および S_n をそれぞれ a，n を用いて表せ．

(3) $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ の増減を調べよ．

(4) (3) を利用して，3 以上の整数 n に対して，$S_n < S_{n+1}$ であることを示せ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．さらに，この極限値が図形的にどのような意味を表しているか，簡単に説明せよ．

$\boxed{9}$ A 市の有権者のうち，ある政策に対する賛成者の母比率を p $(0 < p < 1)$ とする．A 市の有権者 100 人を無作為に選んだときの，この政策に対する賛成者数を確率変数 X として，$X = k$ のときの確率を $P(X = k)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 100)$ とする．以下の問いに答えよ．なお，必要に応じて次頁の正規分布表を用いてもよい．

(1) $P(X = k)$ を p，k を用いて表せ．

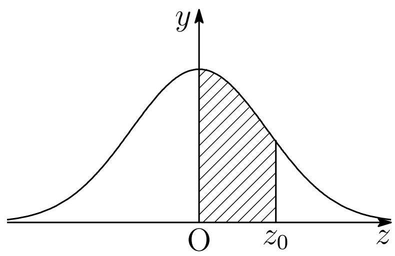
(2) 「100 人中 1 人だけが賛成者」ではない確率が,「100 人中 2 人だけが賛成者」ではない確率よりも大きくなるとき，p の値の範囲を求めよ．

(3) $X = 80$ のとき，p に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよ．

(4) $P(X = k)$ の自然対数 $\log P(X = k)$ を最大にする p を求めよ．ただし，$k = 1, 2, \cdots, 99$ とする．

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における
右図の斜線部分の面積をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

解答例

$\boxed{1}$ (1) $3\vec{a}-2\vec{b}$ と $15\vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるから

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(15\vec{a}+4\vec{b})=0 \quad \text{ゆえに} \quad 45|\vec{a}|^2-18\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{b}|=3|\vec{a}|$ であるから

$$45|\vec{a}|^2-18\vec{a}\cdot\vec{b}-8(3|\vec{a}|)^2=0 \quad \text{整理すると} \quad 3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$3|\vec{a}|^2=|\vec{a}||\vec{b}|$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ は

$$|\vec{a}||\vec{b}|+2\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta=\frac{2\pi}{3}}$$

(2) $a=4^{50}$，$b=6^{40}$，$c=15^{25}$ より

$$\begin{aligned}
\log_{10} a &= \log_{10} 4^{50} = 50\log_{10} 4 = 100\log_{10} 2 \\
&= 100\times 0.3010 = \mathbf{30.10}, \\
\log_{10} b &= \log_{10} 6^{40} = 40\log_{10} 6 = 40(\log_{10} 2+\log_{10} 3) \\
&= 40\times(0.3010+0.4771) = \mathbf{31.124} \\
\log_{10} c &= \log_{10} 15^{25} = 25\log_{10} 15 = 25(\log_{10} 10+\log_{10} 3-\log_{10} 2) \\
&= 25\times(1+0.4771-0.3010) = \mathbf{29.4025}
\end{aligned}$$

したがって　$\log_{10} c < \log_{10} a < \log_{10} b$
底 10 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{c<a<b}$

(3) $t>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x=t+\frac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}} \geqq 2$$

$t^2+\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2$ より

$$y=x^2-2-2ax=(x-a)^2-a^2-2$$

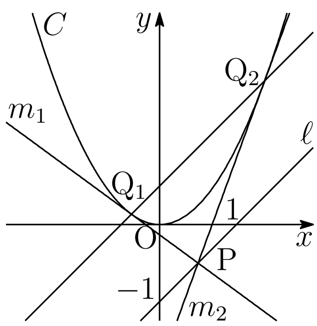
(i) $a \leqq 2$ のとき，$\boldsymbol{x=2}$ で最小値 $\boldsymbol{2-4a}$
(ii) $2<a$ のとき，$\boldsymbol{x=a}$ で最小値 $\boldsymbol{-a^2-2}$

(4) $f(n) = (n-1)n(n+1)$ は連続する 3 整数の積であるから，$f(n)$ は $3! = 6$ の倍数である．

$$\begin{aligned} g(n) &= n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2+1)(n^2-1) \\ &= n\{(n^2-4)+5\}(n+1)(n-1) \\ &= n(n^2-4)(n+1)(n-1) + 5(n-1)n(n+1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5f(n) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は連続する 5 整数の積で $5! = 120$ の倍数である．また，$5f(n)$ は $5 \cdot 6 = 30$ の倍数である．したがって，$g(n)$ は 30 の倍数である．■

2 (1) $C: y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$



C 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における接線の方程式は

$$y - s^2 = 2s(x-s) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2sx - s^2}$$

この接線が点 $\mathrm{P}(t,\ t-1)$ を通るから

$$t - 1 = 2st - s^2 \quad \text{ゆえに} \quad s^2 - 2ts + t - 1 = 0$$

上の第 2 式の s に関する 2 次方程式の解が $s_1,\ s_2$ であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{s_1 + s_2 = 2t,\quad s_1 s_2 = t - 1}$$

(2) C 上の 2 点 $\mathrm{Q}_1(s_1,\ {s_1}^2)$，$\mathrm{Q}_2(s_2,\ {s_2}^2)$ を通る直線の方程式は

$$y - s_1 = \frac{{s_2}^2 - {s_1}^2}{s_2 - s_1}(x - s_1) \quad \text{ゆえに} \quad y = (s_1+s_2)x - s_1 s_2 \quad \cdots①$$

これに (1) の結果を代入すると　　$\boldsymbol{y = 2tx - t + 1}$

(3) (2) の結果を t について整理すると　$(2x-1)t + 1 - y = 0$

t に関する恒等式 (t の値に関係なく成立する) であるから

$$2x - 1 = 0,\quad 1 - y = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{N}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{1}\right)$$

$Q_1(s_1,\ {s_1}^2)$，$Q_2(s_2,\ {s_2}^2)$ の中点 M は　$\left(\dfrac{s_1+s_2}{2},\ \dfrac{{s_1}^2+{s_2}^2}{2}\right)$

ここで　$$\begin{aligned}{s_1}^2+{s_2}^2 &= (s_1+s_2)^2-2s_1s_2\\ &= (2t)^2-2(t-1)=4t^2-2t+2\end{aligned}$$

これと (1) の結果から，線分 Q_1Q_2 の中点 M の座標は　$(t,\ 2t^2-t+1)$

M と N が一致するとき　　$t=\dfrac{1}{2}$,　$2t^2-t+1=1$

上の第 1 式が第 2 式を満たすことに注意して　　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$

(4) 面積 S は，① および C の方程式から，

$$\begin{aligned}S &= \int_{s_1}^{s_2}\{(s_1+s_2)x-s_1s_2-x^2\}\,dx\\ &= -\int_{s_1}^{s_2}(x-s_1)(x-s_2)\,dx=\frac{1}{6}(s_2-s_1)^3\end{aligned}$$

ここで　$$\begin{aligned}(s_2-s_1)^2 &= (s_1+s_2)^2-4s_1s_2\\ &= (2t)^2-4(t-1)=4(t^2-t+1)\end{aligned}$$

$s_1<s_2$ より，$s_2-s_1=2(t^2-t+1)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$S=\frac{1}{6}\{2(t^2-t+1)^{\frac{1}{2}}\}^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}(t^2-t+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，S は $t=\dfrac{1}{2}$ で最小となる．

よって，求める点 P の座標は　　$\boldsymbol{P\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)}$

補足 $S=\dfrac{2}{3}\triangle PQ_1Q_2$ を利用してもよい[2]．
直線 $Q_1Q_2 : y=2tx-t+1$ 上に点 $R(t,\ 2t^2-t+1)$ をとると

$$PR=(2t^2-t+1)-(t-1)=2(t^2-t+1)$$

$$\begin{aligned}\triangle PQ_1Q_2 &= \frac{1}{2}(s_2-s_1)\cdot PR\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t^2-t+1}\cdot 2(t^2-t+1)\\ &= 2(t^2-t+1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

3　(1)　$f(x) = 3\sin x \sin 2x + \cos 3x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin x \sin 2x + \cos 3x \\ &= 3\sin x \cdot 2\sin x \cos x + (4\cos^3 x - 3\sin x) \\ &= 6(1-\cos^2 x)\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x \\ &= \boldsymbol{-2\cos^3 x + 3\cos x} \end{aligned}$$

$t = \cos x$ とおき，$g(t) = -2t^3 + 3t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ とすると

$$g'(t) = -6t^2 + 3 = -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

よって　$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \pm\dfrac{\pi}{4}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$t = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \pm\dfrac{3\pi}{4}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

(2)　$\dfrac{2}{3} + \log_8(2x^2 - x + 1) \leqq \log_2(x+1)$ の真数について

$$2x^2 - x + 1 > 0, \quad x + 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > -1$$

与えられた不等式から

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{\log_2(2x^2 - x + 1)}{\log_2 8} &\leqq \log_2(x+1) \\ 2 + \log_2(2x^2 - x + 1) &\leqq 3\log_2(x+1) \\ \log_2 4(2x^2 - x + 1) &\leqq \log_2(x+1)^3 \end{aligned}$$

底 2 は 1 より大きいから

$$4(2x^2 - x + 1) \leqq (x+1)^3 \quad \text{整理すると} \quad x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \geqq 0$$

したがって　$(x-1)^2(x-3) \geqq 0$　よって　$\boldsymbol{x = 1,\ 3 \leqq x}$

(3) 3点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$，R(1) について，線分 PQ を $t:1-t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の比に内分する点が R であるから

$$\frac{1-t}{z}+\frac{t}{1-z}=1 \quad \text{ゆえに} \quad (1-t)(1-z)+tz=z(1-z)$$

第2式を z について整理すると　$z^2+2(t-1)z+1-t=0$

これを解くと　$z=1-t\pm\sqrt{t(t-1)}$

$t=0$ のとき $z=1$，$t=1$ のとき $z=0$ となり，z の条件に反する．

$0<t<1$ であるから，$t(t-1)<0$ より，z は実数ではない．

(4) $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ より　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$

$P_n=\alpha^n+\beta^n$ より

$$P_1=\mathbf{2}, \quad P_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot(-1)=\mathbf{6}$$

$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$ であるから

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$$

$P_n\equiv P_{n+1}\equiv 2 \pmod 4$ であると仮定すると (n は自然数)

$$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n\equiv 2\cdot 2+2\equiv 2 \pmod 4$$

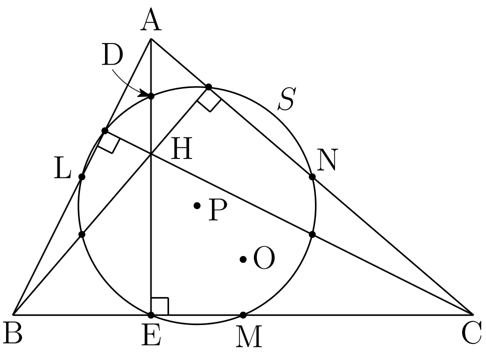
$P_1\equiv P_2\equiv 2 \pmod 4$ であるから，すべての自然数 n について

$$P_n\equiv 2 \pmod 4$$

よって，P_n は4の倍数ではない偶数である． ■

4　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ より



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}\\\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}\end{aligned}$$

上式および $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=R^2-R^2=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=R^2-R^2=0$$

よって　AH⊥BC，CH⊥AB

補足　同様の計算により，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となる．これと (1) の結果より，H が△ABC の垂心であることがわかる．また，△ABC の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

△ABC の重心 G は外心 O と垂心 H を 1 : 2 に内分する点である．3 点 O，G，H は同一直線 (オイラー線) 上にある．

(2) L，M，N は AB，BC，CA の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$

点 P は OH の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{b}}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PN}}|=\frac{1}{2}R$ である．

よって，点 P は△LMN の外心である．

(3) 点 D は線分 AH の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

線分 DM の中点は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

よって，P は線分 DM の中点である．

(4) △LMN の外接円を S とすると，(3) の結果から，DM は S の直径である．∠DEM は直角であるから，E は外接円 S 上の点である．

補足 E と同様に，頂点 B から直線 CA に垂直に引いた直線と CA との交点，頂点 C から直線 AB に垂直に引いた直線と AB との交点も S 上にある．また，D と同様に，線分 BH の中点，線分 CH の中点も S 上にある．これら 9 点が S 上にあるから，九点円 (オイラー円) と呼ばれている．S の中心 P もオイラー線上にある．△ABC の外心 O，重心 G，垂心 H を含めて次の比に内分される．

$$\mathrm{OG} : \mathrm{GP} : \mathrm{PH} = 2 : 1 : 3$$

S の半径は，△ABC の外接円の $\dfrac{1}{2}$ である．■

5 (1) 長方形の対角線の長さが 3 であるから　$x^2+y^2+z^2=9$　$\cdots$①
表面積が 16 であるから　$2(xy+yz+zx)=16$
上の 2 式の辺々を加えると

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9+16$$

したがって　$(x+y+z)^2=25$　よって　$\boldsymbol{x+y+z=5}$

(2) (1) の結果から　$\boldsymbol{y+z=5-x}$
上式の両辺を平方すると　$y^2+z^2+2yz=25-10x+x^2$
① より　$y^2+z^2=9-x^2$　これを上式に代入すると

$$9-x^2+2yz=25-10x+x^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{yz=x^2-5x+8}$$

したがって，$y,\ z$ を解とする 2 次方程式は

$$\boldsymbol{t^2-(5-x)t+x^2-5x+8=0} \quad \cdots(*)$$

(3) $x > 0$，$y > 0$，$z > 0$ であるから

$$y + z = 5 - x > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < x < 5 \quad \cdots ②$$
$$yz = x^2 - 5x + 8 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

方程式 $(*)$ が実数解をもつから，係数について

$$D = (5 - x)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(x^2 - 5x + 8) \geqq 0$$

整理すると　$3x^2 - 10x + 7 \leqq 0$　ゆえに　$(x - 1)(3x - 7) \leqq 0$

② に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq \frac{7}{3}}$

(4) $yz = x^2 - 5x + 8$ より，$V = xyz = x^3 - 5x^2 + 8x$

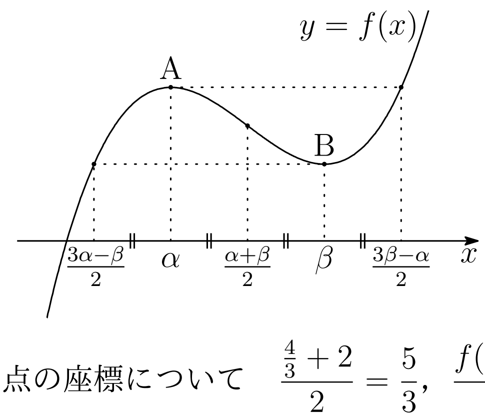
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ とおくと $\left(1 \leqq x \leqq \frac{7}{3}\right)$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = (x - 2)(3x - 4)$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{7}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	$\frac{112}{27}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{112}{27}$

よって　$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$，$\boldsymbol{\frac{7}{3}}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{112}{27}}$，$\boldsymbol{x = 1}$，$\boldsymbol{2}$ で最小値 $\boldsymbol{4}$ をとる．

補足　$a > 0$，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について，$y = f(x)$ が点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$ で極大，点 $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ で極小であるとき，変曲点 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$ は A，B の中点である．また，$f\left(\frac{3\alpha-\beta}{3}\right) = f(\beta)$，$f(\alpha) = f\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ が成立する．



本題のグラフの変曲点の座標について　$\dfrac{\frac{4}{3} + 2}{2} = \dfrac{5}{3}$，$\dfrac{f(\frac{4}{3}) + f(2)}{2} = f(\frac{5}{3})$

x 座標 1，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$，2，$\frac{7}{3}$ は等差数列をなし，$f(1) = f(2)$，$f(\frac{4}{3}) = f(\frac{7}{3})$． ■

6 (1)　　(∗)　$a_n = \int_1^e x^2(\log x)^n\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$n = 1$ のとき

$$a_1 = \int_1^e x^2 \log x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \boldsymbol{\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}}$$

(2) (∗) より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_1^e x^2(\log x)^{n+1}\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'(\log x)^{n+1}\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}(\log x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\log x)^n\,dx = \boldsymbol{\frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}a_n} \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から，順次

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}a_1 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \boldsymbol{\frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}}, \\ a_3 &= \frac{e^3}{3} - a_2 = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}\right) = \boldsymbol{\frac{4e^3}{27} + \frac{2}{27}}, \\ a_4 &= \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}a_3 = \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{4e^3}{27} + \frac{2}{27}\right) = \boldsymbol{\frac{11e^3}{81} - \frac{8}{81}} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x(\log x - 1)^2$ より

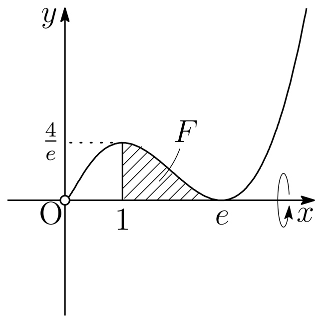
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x - 1)^2 + x\cdot 2(\log x - 1)\cdot\frac{1}{x} \\ &= (\log x)^2 - 1 = (\log x + 1)(\log x - 1), \\ f''(x) &= \frac{2\log x}{x} \end{aligned}$$

したがって，グラフの増減および凹凸は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

よって　極大値 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \boldsymbol{\frac{4}{e}}$，極小値 $f(e) = \mathbf{0}$，変曲点 $\mathbf{(1,\ 1)}$

(4) (3) の増減表から，F の表す領域は下の図の斜線部分である．



(3) の増減表から，V の体積は

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_1^e f(x)^2\,dx = \int_1^e x^2(\log x-1)^4\,dx \\
&= \int_1^e x^2\{(\log x)^4-4(\log x)^3+6(\log x)^2-4\log x+1\}\,dx \\
&= a_4-4a_3+6a_2-4a_1+\int_1^e x^2\,dx \\
&= \frac{11e^3}{81}-\frac{8}{81}-4\left(\frac{4e^3}{27}+\frac{2}{27}\right) \\
&\qquad +6\left(\frac{5e^3}{27}-\frac{2}{27}\right)-4\left(\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}\right)+\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_1^e \\
&= \frac{8e^3}{81}-\frac{131}{81}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi\left(\frac{8e^3}{81}-\frac{131}{81}\right)}$

解説　本来，部分積分法

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

は漸化式である．$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すように (n は自然数)，ここで，n を 0 さらに負の整数まで拡張することにする．実際にはこのような定義はないが，$f^{(-n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次原始関数と定義する．上の積分について，部分積分法を繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ &\quad \cdots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx\end{aligned}$$

例えば，$f(x)$ を n 次関数とし，$g'(x) = e^{ax+b}$ とすると (積分定数は 0 とする)

$$g^{(-k)}(x) = \frac{e^{ax+b}}{a^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$f(x)$ の $n+1$ 次導関数は 0 であるから

$$\int f(x)e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{f^{(k)}(x)}{a^k} + C$$

たとえば，$f(t) = t^4$，$g'(t) = e^{3t+3}$ とすると

$$\begin{aligned}\int t^4 e^{3t+3}\,dt &= \frac{e^{3t+3}}{3}\left(t^4 - \frac{4t^3}{3} + \frac{12t^2}{3^2} - \frac{24t}{3^3} + \frac{24}{3^4}\right) + C \\ &= \frac{e^{3t+3}}{3}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right) + C\end{aligned}$$

定積分 $I = \displaystyle\int_1^e x^2(\log x - 1)^4\,dx$ について，$x = e^{t+1}$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = e^{t+1}, \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & e \\ \hline t & -1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{0}(e^{t+1})^2(\log e^{t+1} - 1)^4 e^{t+1}\,dt = \int_{-1}^{0} t^4 e^{3t+3}\,dt \\ &= \left[\frac{e^{3t+3}}{3}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right)\right]_{-1}^{0} = \frac{8e^3}{81} - \frac{131}{81}\end{aligned}$$

このように対数型の積分は指数型の積分に変換した方が計算しやすい[3]．

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf $\boxed{3}$

前ページで示した結果から，定積分についても同様に，次式が成立する．

$$\int_x^a f(t)g'(t)\,dt = \Big[\ f(t)g(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(-k)}(t)\ \Big]_x^a + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)g^{(-n+1)}(t)\,dt$$

$g^{(-k)}(t) = \dfrac{1}{k!}(t-x)^k$ とおくと $(k=-1, 0, 1, \cdots)$，$g(t)=1$，$g'(t)=0$ より

$$0 = \Big[\ f(t)\ \Big]_x^a + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ (-1)^k f^{(k)}(t)\frac{(t-x)^k}{k!}\ \Big]_x^a + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

したがって

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ここで

$$J = (-1)^n\int_x^a \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = (-1)^n\Big[\ \frac{(t-x)^n}{n!}\ \Big]_x^a = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

とおき，積分区間における $f^{(n)}(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$$K = (-1)^n\int_x^a f^{(n)}(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

は MJ と mJ の間にあるから

$$K = f^{(n)}(c)J$$

を満たす c が積分区間に少なくとも 1 つ存在する (積分学の平均値の定理)．よって，次の等式が成立する (テイラー展開)．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

例えば，n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき，次式が成立する．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + A(x-a)^n$$

3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数を a とし，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を満たすとすると $(\alpha<\beta)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a(x-\alpha)(x-\beta) = 3a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ f''(x) &= 3a\{2x-(\alpha+\beta)\} \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

ゆえに　$f'(\alpha)=0,\quad f''(\alpha)=3a(\alpha-\beta),\quad f''(\alpha)=6a$

$f(x)$ の $x=\alpha$ を極とするテイラー展開を行うと

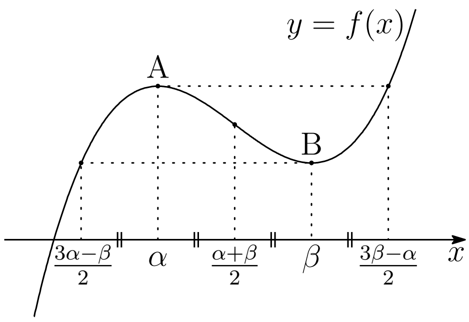
$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3 \\ &= f(\alpha)+\frac{1}{2!}\cdot 3a(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}\cdot 6a(x-\alpha)^3 \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} f(x)-f(\alpha) &= \frac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3 \\ &= a(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

同様にして
$$f(x)-f(\beta)=a(x-\beta)^2\left(x-\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

また，$f''\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ であるから，この点は変曲点である．

したがって，$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



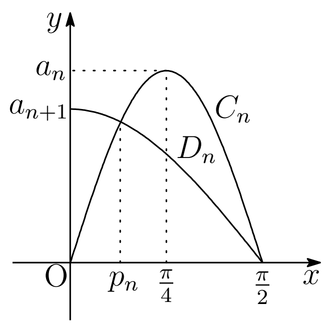
とくに，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$，α，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，β，$\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．

注意　関数 $f(x)$ について，$f'(\alpha)=0$ であっても，$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化しないとき $f(\alpha)$ は極値ではないように，$f''(c)=0$ であって，$x=c$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化しないと点 $(c,\ f(c))$ は変曲点ではない．3 次関数 $f(x)$ については，$f''(x)$ は 1 次関数であるから，変曲点が常に 1 つ存在する．■

7 (1) $C_n: y = a_n \sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$D_n: y = a_{n+1} \cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

C_n，D_n の2式から y を消去すると



$$a_n \sin 2x = a_{n+1} \cos x$$
$$(2a_n \sin x - a_{n+1}) \cos x = 0$$

したがって　$\sin x = \dfrac{a_{n+1}}{2a_n}$,　$x = \dfrac{\pi}{2}$

x 軸上にない C_n，D_n の交点の x 座標 p_n は，$x \neq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\boldsymbol{\sin p_n = \frac{a_{n+1}}{2a_n}}$$

$a_n \geqq a_{n+1} > 0$ より，$0 < \dfrac{a_{n+1}}{2a_n} \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{0 < p_n \leqq \dfrac{\pi}{6}}$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$a_n \sin 2x \geqq 0$ であるから

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_n \sin 2x\, dx = \left[-\frac{a_n}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{a_n}$$

$p_n \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$a_n \sin 2x \geqq a_{n+1} \cos x$ であるから

$$\begin{aligned}
T_n &= \int_{p_n}^{\frac{\pi}{2}} (a_n \sin 2x - a_{n+1} \cos x)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}a_n \cos 2x - a_{n+1} \sin x\right]_{p_n}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}a_n(1 + \cos 2p_n) - a_{n+1}(1 - \sin p_n) \\
&= a_n(1 - \sin^2 p_n) - a_{n+1}(1 - \sin p_n) \\
&= a_n\left(1 - \frac{{a_{n+1}}^2}{4{a_n}^2}\right) - a_{n+1}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{2a_n}\right) \\
&= \boldsymbol{a_n - a_{n+1} + \frac{{a_{n+1}}^2}{4a_n}}
\end{aligned}$$

(3) $T_n = r^2 S_n$ (r は正の定数) が成り立つとき，(1),(2) の結果から

$$a_n - a_{n+1} + \frac{{a_{n+1}}^2}{4a_n} = r^2 a_n \quad \text{ゆえに} \quad 4{a_n}^2 - 4a_n a_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 4r^2 {a_n}^2$$

したがって　　$(2a_n - a_{n+1})^2 = (2ra_n)^2$

$a_n \geqq a_{n+1} > 0,\ r > 0$ であるから

$$2a_n - a_{n+1} = 2ra_n \quad ゆえに \quad a_{n+1} = 2(1-r)a_n$$

$a_1 = 1$ であるから　$\boldsymbol{a_n = \{2(1-r)\}^{n-1}}$

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，$a_n > 0$ であることに注意して

$$0 < 2(1-r) \leqq 1 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq r < 1}$$

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ が収束するとき，$a_n > 0$ に注意して

$$0 < 2(1-r) < 1 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} < r < 1}$$

求める無限級数の和は　$\dfrac{a_1}{1-2(1-r)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2r-1}}$ ■

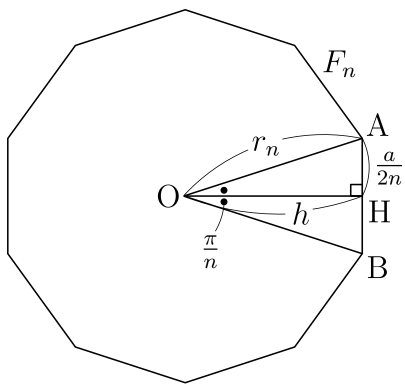
8 (1) S_3 は一辺が $\dfrac{a}{3}$ の正三角形の面積であるから

$$S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 \sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}a^2}{36}}$$

S_4 は一辺が $\dfrac{a}{4}$ の正方形の面積であるから

$$S_4 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{a^2}{16}}$$

(2) 正 n 角形 F_n の 1 つの辺 AB に F_n の外心 O から垂線 OH を引くと



$$\angle\mathrm{AOH} = \frac{\pi}{n}, \quad \mathrm{AH} = \frac{a}{2n}$$

したがって　　$r_n \sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{a}{2n}$

よって　　$\boldsymbol{r_n = \dfrac{a}{2n\sin\frac{\pi}{n}}}$

$h = \mathrm{OH}$ とおくと

$$h = r_n\cos\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\cos\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2n\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{2n\tan\frac{\pi}{n}} \quad よって \quad \boldsymbol{S_n = \frac{a^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{\tan x} = x\cdot\dfrac{1}{\tan x}$ を微分すると $\left(0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\tan x} + x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2\sin x\cos x - 2x}{2\sin^2 x} = \frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

ここで，$g(x) = \sin 2x - 2x$ とおくと $\left(0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = 2(\cos 2x - 1) < 0$$

$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において　$g(x) < 0$　すなわち　$f'(x) < 0$

よって，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$f(x)$ は単調減少である．

(4) (2) の結果から　$S_n = \dfrac{a^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{a^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{a^2}{4\pi}f\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$　$\cdots(*)$

$\dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{n}$ であるから，(3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right) < f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \quad \text{よって} \quad S_n < S_{n+1}$$

$x = \dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{x\to+0}\frac{a^2}{4\pi}f(x)$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{x}{\tan x} = 1$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{a^2}{4\pi}}$

F_n が円周の長さ a $\left(\text{半径}\dfrac{a}{2\pi}\right)$ の円に近づくから，次が成立する (類題 [4])．

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi R^2 = \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \frac{a^2}{4\pi}$$

■

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2018.pdf $\boxed{2}$

9 (1) $\boldsymbol{P(x=k)={}_{100}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{100-k}}$

(2) 100 人中 1 人だけ賛成である確率は　$P(X=1)$

100 人中 2 人だけ賛成である確率は　$P(X=2)$

「100 人中 1 人だけが賛成者」でない確率が,「100 人中 2 人だけが賛成者」でない確率よりも大きいから

$$1-P(X=1)>1-P(X=2)\quad \text{ゆえに}\quad P(X=2)>P(X=1)$$

したがって

$$\begin{aligned}{}_{100}\mathrm{C}_2p^2(1-p)^{98}&>{}_{100}\mathrm{C}_1p(1-p)^{99}\\ \frac{100\cdot99}{2}p^2(1-p)^{98}&>100p(1-p)^{99}\\ 99p&>2(1-p)\end{aligned}$$

$0<p<1$ であることに注意して　$\boldsymbol{\frac{2}{101}<p<1}$

(3) 正規分布表から　$P(0\leqq z\leqq 1.96)=0.4750$

ゆえに　$P(-1.96\leqq z\leqq 1.96)=0.4750\times2=0.9500$

標本比率 $p_0=\frac{80}{100}=0.8$，標本の大きさ $n=100$ のとき，母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[p_0-1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\ p_0+1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\ \right]$$

$1.96\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{100}}=1.96\times0.04=0.0784$ より

$$[0.8-0.0784,\ 0.8+0.0784]\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{[0.7216,\ 0.8784]}$$

(4) $P(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{100-k}$ の自然対数をとると

$$\log P(X=k)=\log{}_{100}\mathrm{C}_k+k\log p+(100-k)\log(1-p)$$

これを p について微分すると

$$\frac{d}{dp}\log P(X=k)=\frac{k}{p}-\frac{100-k}{1-p}=\frac{k-100p}{p(1-p)}$$

p	(0)	$\cdots$	$\frac{k}{100}$	$\cdots$	(1)
$\frac{d}{dp}P(X=k)$		$+$	0	$-$	
$P(X=k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める p の値は　$\boldsymbol{p=\dfrac{k}{100}}$ ■

第 6 章　熊本大学

出題分野　(文系　理系　医学部)

文系 出題分野 (2011-2020) 120 分

	◀ 熊本大学 文系	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式		1								
	2 次関数										
	図形と計量	1					1				
	データの分析						2				
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式									4	
	三角関数								2		1
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	3	3·4	2	2·3·4	1·4	4	4	1	3	2
A	場合の数と確率						2	2	3	2	
	整数の性質	2		1			3				
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル	4		3	1	2		1			4
	数列		2	4		3	3	3	4	1	3
	確率分布と統計										

数字は問題番号

6.1 2015 年 (文系)

1 a を実数とする。曲線 $C_1 : y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l とする。曲線 C_2 を $y = x^2 - 1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) l と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。曲線 $C_3 : y = -x^2 + 1$ と C_2 とで囲まれた部分は l によって 2 つの部分に分けられる。これらのうち，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を含む部分の面積を求めよ。

2 座標空間内の 3 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(3,\ 0,\ 1)$，C$(1,\ 2,\ 0)$ を含む平面を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P$(-3,\ 2,\ 2)$ は H 上の点であることを示せ。

(2) 点 Q$(1, -3, -4)$ を通る直線が H と直交するとき，その交点の座標を求めよ。

3 $\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = 1$，$\mathrm{CX}_1 = 8$ とする．各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を求めよ。

(2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

4 $f(x)$ は x の 3 次多項式とし，x^3 の係数は 1，定数項は 0 とする。2 つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=2ax-a^2$$

l と $C_2: y=x^2-1$ の共有点の x 座標は

$$2ax-a^2=x^2-1\quad \text{これを解いて}\quad x=a\pm1$$

求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{a-1}^{a+1}\{(2ax-a^2)-(x^2-1)\}\,dx &= -\int_{a-1}^{a+1}(x-a+1)(x-a-1)\,dx\\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+1)-(a-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

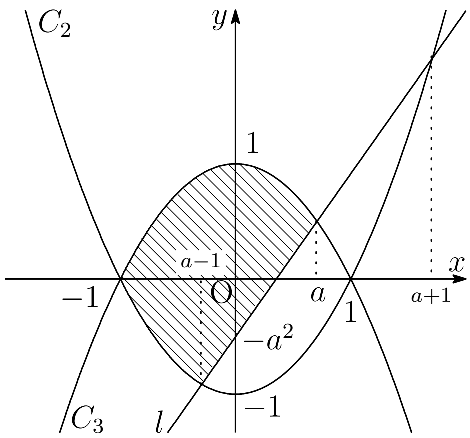
(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，l の方程式は

$$l: y=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$$

l と C_3 の共有点の x 座標は

$$\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=-x^2+1$$

ゆえに　$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(=a),\ -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$



$f(x)=-x^2+1$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x$ とする．

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=2\int_{-1}^{a-1}f(x)\,dx+\int_{a-1}^{a}\{f(x)-(2ax-a^2)\}\,dx\\ &=2\Big[\,F(x)\,\Big]_{-1}^{a-1}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{a-1}^{a}+\Big[-ax^2+a^2x\Big]_{a-1}^{a}\\ &=F(a)+F(a-1)-2F(-1)-a^2+a\\ &=-\frac{1}{3}a^3+a-\frac{1}{3}(a-1)^3+a-1-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)-a^2+a\\ &=-\frac{2}{3}a^3+2a+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

このとき，$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$\boldsymbol{S=\dfrac{5\sqrt{2}+4}{6}}$ ■

2　(1)　A(1, 1, 1)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 0)，P(−3, 2, 2) から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ 1, -1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (-4,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと (α，β は実数)

$$(-4,\ 1,\ 1) = \alpha(2, -1,\ 0) + \beta(0,\ 1, -1)$$

したがって　　$2\alpha = -4$，$-\alpha + \beta = 1$，$-\beta = 1$

これを解いて　　$\alpha = -2$，$\beta = -1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって，点 P は平面 H 上の点である．

(2)　平面 H を媒介変数 s，t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= (1,\ 1,\ 1) + s(2, -1,\ 0) + t(0,\ 1, -1)\\ &= (1 + 2s,\ 1 - s + t,\ 1 - t)\quad \cdots ①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ 1, -1)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1,\ 2,\ 2)$$

とおく．Q を通り $\vec{n}$ に平行な直線を媒介変数 k を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1, -3, -4) + k(1,\ 2,\ 2)\\ &= (1 + k, -3 + 2k, -4 + 2k)\quad \cdots ②\end{aligned}$$

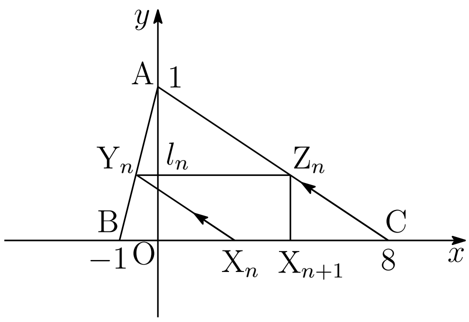
求める交点 $(x,\ y,\ z)$ は，①，② から

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2s = 1 + k\\ y &= 1 - s + t = -3 + 2k\\ z &= 1 - t = -4 + 2k\end{aligned}$$

これを解いて　　$s = 1$，$t = 1$，$k = 2$，$x = 3$，$y = 1$，$z = 0$

よって，求める交点は　　**(3, 1, 0)**　■

3 (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 0)$，C$(8,\ 0)$，$\mathrm{X}_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y=x+1 \quad \cdots ①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 $\mathrm{X}_n\mathrm{Y}_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{8}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{8}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y_n の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{1+x_n}{9}$　$\cdots ④$

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{1}{9}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{8}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=8(1-l_n)$$

これが点 X_{n+1} の x 座標であるから　$x_{n+1}=8(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{1+x_{n+1}}{9}=\frac{1+8(1-l_n)}{9}=\boldsymbol{-\frac{8}{9}l_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1\cdots ①$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

ここで，定数 c を

$$c=-\frac{8}{9}c+1 \quad \cdots ②$$

とおくと，①，② から

$$l_{n+1}-c=-\frac{8}{9}(l_n-c) \quad \text{ゆえに} \quad l_n-c=(l_1-c)\left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

② を解いて　$c=\dfrac{9}{17}$　また　$l_1-c=\dfrac{1}{9}-\dfrac{9}{17}=-\dfrac{64}{153}$

よって　$l_n=\dfrac{9}{17}-\dfrac{64}{153}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n}}$ ■

4 (1) x の 3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数が 1，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ であるから

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)=3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は 0 であるから

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x$$

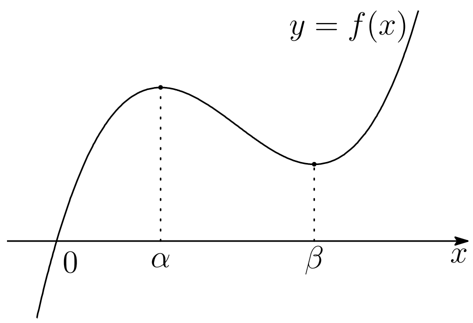
したがって

$$f(\alpha)=\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2+3\alpha^2\beta=\boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta)=\beta^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2+3\alpha\beta^2=\boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha<\beta<3\alpha$ より，$0<\alpha<\beta$，$3\alpha-\beta>0$ であるから，$f(\beta)>0$
したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y=f(x)$ および $y=-1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数は **1 個**. ■

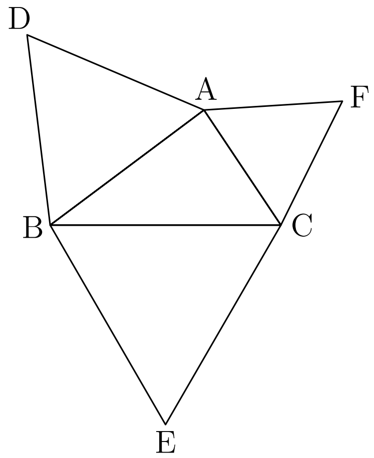
6.2　2016 年 (文系)

1 下図のように，△ABC の外部に 3 点 D，E，F を △ABD，△BCE，△CAF がそれぞれ正三角形になるようにとる。△ABC の面積を S，3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくとき，$\sin\theta$ を b，c，S を用いて，$\cos\theta$ を，a，b，c を用いて表せ。

(2) DC^2 を a，b，c，S を用いて表し，$\mathrm{DC}^2=\mathrm{EA}^2=\mathrm{FB}^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 3 つの正三角形の面積の平均を T とおくとき，DC^2 を S と T を用いて表せ。



2 1 つのさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目の数，2 回目に出る目の数，3 回目に出る目の数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とし，5 つの数

$$2,\ 5,\ 2-X_1,\ 5+X_2,\ X_3$$

からなるデータを考える。以下の問いに答えよ。

(1) データの範囲が 7 以下である確率を求めよ。

(2) X_3 がデータの中央値に等しい確率を求めよ。

(3) X_3 がデータの平均値に等しい確率を求めよ。

(4) データの中央値と平均値が一致するとき，X_3 が中央値に等しい条件付き確率を求めよ。

3 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 和 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を 4 で割った余りは 0 か 3 であることを示せ。

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

4 2 次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

とおく。a を正の数とし，$F(x)$ が $x = a$ と $x = -a$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての x について $F(-x) = -F(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $F(x) + F(a) = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

(3) 関数 $\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ。

解答例

1 (1) 面積の公式から　$S = \frac{1}{2}bc\sin\theta$　ゆえに　$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{2S}{bc}}$

余弦定理により　$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

(2) △ACD に余弦定理を適用すると，(1) の結果により

$$\begin{aligned} \mathrm{DC}^2 &= \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AD}\cos(\theta + 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2S}{bc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + 2\sqrt{3}S \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ は，a，b，c に関する対称式であるから　$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{EA}^2 = \mathrm{FB}^2$

(3) $T = \frac{1}{3}(\triangle\mathrm{BCE} + \triangle\mathrm{CAF} + \triangle\mathrm{ABD})$ であるから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ + \frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ + \frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

ゆえに　$a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}T$

これを $(*)$ に代入すると

$$\mathrm{DC}^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}T + 2\sqrt{3}S = \boldsymbol{2\sqrt{3}(S+T)}$$

■

2 (1) 5 つのデータの最大値と最小値はそれぞれ $5 + X_2$，$2 - X_1$ であるから，データの範囲は

$$(5 + X_2) - (2 - X_1) = X_1 + X_2 + 3$$

これが 7 以下であるから

$$X_1 + X_2 + 3 \leqq 7 \quad \text{ゆえに} \quad X_1 + X_2 \leqq 4$$

これを満たす $(X_1,\ X_2)$ の組は，次の 6 通り．

$$(X_1,\ X_2) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

このとき，X_3 は，1〜6 の 6 通りであるから，求める確率は

$$\frac{6\times 6}{6^3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) $2-X_1<2<5<5+X_2$ であるから，X_3 がデータの中央値であるとき

$$2 \leqq X_3 \leqq 5 \quad \text{これを満たす } X_3 \text{は4通り}$$

このとき，X_1，X_2 は，ともに1〜6の6通りであるから，求める確率は

$$\frac{4\times6\times6}{6^3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) 条件から $\qquad X_3=\dfrac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}$

整理すると $\qquad 4(X_3-3)=X_2-X_1+2 \quad \cdots①$

このとき，$1 \leqq X_1 \leqq 6$，$1 \leqq X_2 \leqq 6$ であるから

$$-3 \leqq X_2-X_1+2 \leqq 7 \quad \cdots②$$

①，② より，$X_2-X_1+2=0,\ 4$ であるから

$$X_2=X_1-2\ (X_1=3,4,5,6) \text{ のとき} \quad X_3=3$$
$$X_2=X_1+2\ (X_1=1,2,3,4) \text{ のとき} \quad X_3=4$$

よって，求める確率は $\qquad \dfrac{4+4}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{27}}$

(4) $2-X_1<2<5<5+X_2$ より，中央値は2，5，X_3 のいずれかである．

i) 中央値が2のとき

$$\frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}=2 \quad \text{ゆえに} \quad X_1=X_2+X_3+4$$

このとき $(X_1,\ X_2,\ X_3)=(6,\ 1,\ 1)$ の1通り

ii) 中央値が5のとき

$$\frac{2+5+(2-X_1)+(5+X_2)+X_3}{5}=5 \quad \text{ゆえに} \quad X_1+11=X_2+X_3$$

このとき $(X_1,\ X_2,\ X_3)=(1,\ 6,\ 6)$ の1通り

iii) 中央値が X_3 のとき，(3) の結果より8通り

i)〜iii) から，求める条件付き確率は $\qquad \dfrac{\frac{8}{6^3}}{\frac{1+1+8}{6^3}}=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$ ■

3 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1}-1=n \quad \text{ゆえに} \quad a=n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は　$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

(3) $n=2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned} a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\}=(2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2-1=4(m^2-1)+3 \end{aligned}$$

$n=2m$ のとき (m は整数)

$$a_n=2m(2m+2)=4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ を x で微分すると　$F'(x)=f(x)$

条件より，$F(x)$ は $x=\pm a$ で極値をとるから

$$F'(\pm a)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(\pm a)=0$$

2次関数 $f(x)$ は，$x+a$，$x-a$ を因数にもつから，定数 $k\neq 0$ を用いて

$$f(x)=k(x+a)(x-a)=k(x^2-a^2)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned} F(x)&=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x k(t^2-a^2)\,dt \\ &=k\left[\frac{t^3}{3}-a^2t\right]_0^x=k\left(\frac{x^3}{3}-a^2x\right) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

このとき　$F(-x)=k\left\{\dfrac{(-x)^3}{3}-a^2(-x)\right\}=-k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)=-F(x)$

(2) $(*)$ より　$F(a)=-\dfrac{2}{3}ka^3$　$\cdots$①

$F(x)+F(a)=0$ のとき　　$k\left(\dfrac{x^3}{3}-a^2x\right)-\dfrac{2}{3}ka^3=0$

$k\neq 0$ であるから，これを整理すると

$$x^3-3a^2x-2a^3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+a)^2(x-2a)=0$$

よって，求める x は　　$\boldsymbol{x=-a,\ 2a}$

(3) $F'(0)=f(0)$ より　$F'(0)=-ka^2$

$g(x)=\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと　$g(x)=-\dfrac{F(x)}{ka^2}$．これを微分すると

$$g'(x)=-\frac{F'(x)}{ka^2}=-\frac{f(x)}{ka^2}=-\frac{k(x+a)(x-a)}{ka^2}=-\frac{1}{a^2}(x+a)(x-a)$$

このとき，$g(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，求める極大値は，① により

$$g(a)=-\frac{F(a)}{ka^2}=-\frac{-\frac{2}{3}ka^3}{ka^2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

■

6.3　2017 年 (文系)

1 原点を O とする座標空間内に 3 点 A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, c) がある。ただし，$c>0$ とする。$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ を c を用いて表せ。

(2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直であるとき，c の値を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで，面積 S を求めよ。

2 n は 5 以上の自然数とする。赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う。以下の問いに答えよ。

(1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ。

(2) 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る確率を求めよ。

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき，2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出ている条件付き確率を求めよ。

3 $f(x)=x^2+x$ とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1=8$ とする。a_n $(n \geqq 1)$ に対して，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ 上の点 $({a_n}^2,\ f({a_n}^2))$ における接線と直線 $y=x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし，${a_n}^2$ は a_n の 2 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n>0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n=\log_2 a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 t は 0 でない実数とする。座標平面上の曲線 $C_1: y=(x-t)^2+2t^3-t^2$ と曲線 $C_2: y=2x^3-x^2$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点が 2 個になるような t を求めよ。

(2) t を (1) で求めた値とし，曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点を A，B とする。ただし，点 A の x 座標は，点 B の x 座標より小さいとする。このとき，点 A，B における曲線 C_2 の接線 ℓ_{A}，ℓ_{B} と曲線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

1 (1) A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, c) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 4,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ 0,\ c)$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\sqrt{c^2+4}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5(c^2+4)}}}$$

また，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{5(c^2+4)}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}}}$$

(2) H(x, y, z) とおくと，H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = (2-x, -y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = (-x,\ 4-y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}} = (-x, -y,\ c-z)$ がいずれも $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x,\ y,\ z)$ に垂直であるから

$$(2-x)x - y^2 - z^2 = 0$$
$$-x^2 + (4-y)y - z^2 = 0$$
$$-x^2 - y^2 + (c-z)z = 0$$

① に注意してこれらを整理すると

$$2x = 1,\quad 4y = 1,\quad cz = 1$$

上の 3 式から，$x = \dfrac{1}{2}$，$y = \dfrac{1}{4}$，$z = \dfrac{1}{c}$ を ① に代入して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = 1$$

$c > 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{c = \dfrac{4}{\sqrt{11}}}$

(3) (1) の結果から

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{c^2+4} \times \sqrt{\frac{5c^2+16}{5(c^2+4)}} = \sqrt{5c^2+16}$$

これに (2) の結果を代入すると

$$S = \sqrt{5\times\frac{16}{11}+16} = \boldsymbol{\frac{16}{\sqrt{11}}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $n-1$ 回目までに赤玉が 2 度出て，n 回目に赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned}{}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\times\frac{3}{10} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{3^2}{10^2}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\times\frac{3}{10}\\ &= \boldsymbol{\frac{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}}\end{aligned}$$

(2) n 回の試行で 2 度以上連続することなく赤玉が 3 度出る順の総数は，$n-3$ 個の白玉を一列に並べ，赤玉をその間と両側を含めた $n-2$ 箇所から赤玉を配置する 3 箇所を選ぶ組合せの総数であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}{}_{n-2}\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} &= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\cdot\frac{27}{10^3}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{9(n-2)(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}}\end{aligned}$$

(3) n 回目に 3 度目の赤玉が出る事象を A，2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る事象を B とすると，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

事象 $A\cap B$ は，$n-1$ 回目まで赤玉が連続することなく 2 度出て，n 回目に赤玉が出ることである．その総数は，(2) と同様に $n-3$ 個の白玉とその最後に赤玉 1 個を一列に並べ，白玉の間とその前を含めた $n-3$ 箇所から赤玉を配置する 2 箇所を選ぶ組合せの総数であるから，その確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= {}_{n-3}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}\times\frac{3}{10}\\ &= \frac{(n-3)(n-4)}{2}\cdot\frac{9}{10^2}\cdot\frac{7^{n-3}}{10^{n-3}}\times\frac{3}{10}\\ &= \frac{27(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}\end{aligned}$$

また，$P(A)$ は，(1) で求めた確率であるから，求める条件付き確率は

$$\begin{aligned}P_A(B) &= \frac{27(n-3)(n-4)\cdot 7^{n-3}}{2\cdot 10^n}\times\frac{2\cdot 10^n}{27(n-1)(n-2)\cdot 7^{n-3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}}\end{aligned}$$

■

3 (1) $f(x) = x^2 + x$ を微分すると $f'(x) = 2x + 1$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t + 1)x - t^2$

これと直線 $y = x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t + 1)x - t^2 = x \quad \text{ゆえに} \quad 2t\left(x - \frac{1}{2}t\right) = 0$$

$t = a_n{}^2$ とすると，$a_n > 0$ のとき，$t \neq 0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}t \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n{}^2 > 0$$

$a_1 = 8 > 0$ により，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

(2) $a_n > 0$ より $(n \geqq 1)$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n{}^2$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{1}{2}a_n{}^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n - 1$$

$b_n = \log_2 a_n$ であるから $\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n - 1}$

(3) (2) の結果から $b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$

また $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 8 = 3$

数列 $\{b_n - 1\}$ は，初項が $b_1 - 1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n - 1 = 2\cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2^n + 1$$

$b_n = \log_2 a_n$ より，$a_n = 2^{b_n}$ であるから $\boldsymbol{a_n = 2^{2^n+1}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) C_1，C_2 の方程式から，y を消去すると

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 &= (x-t)^2 + 2t^3 - t^2 \\ 2(x^3 - t^3) - 2x^2 + 2tx &= 0 \\ (x-t)(x^2 + tx + t^2) - x(x-t) &= 0 \\ (x-t)\{x^2 + (t-1)x + t^2\} &= 0 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

2 曲線 C_1，C_2 の共有点が 2 個となるのは，$(*)$ から，次の場合がある．

(i) $x = t$ が方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ の解であるとき

$$t^2 + (t-1)t + t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t(3t-1) = 0$$

ここで，$t \neq 0$ に注意して，$t = \dfrac{1}{3}$ を $(*)$ に代入すると

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = 0$$

このとき，方程式 $(*)$ が 3 重解をもち，不適．

(ii) 方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ が重解をもつとき，係数について

$$(t-1)^2 - 4t^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (3t-1)(t+1) = 0$$

$t = \dfrac{1}{3}$ は (i) から，不適であるから，$t = -1$ を方程式 $(*)$ に代入すると

$$(x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(x-1)^2 = 0$$

このとき，2 曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標は　$x = -1,\ 1$

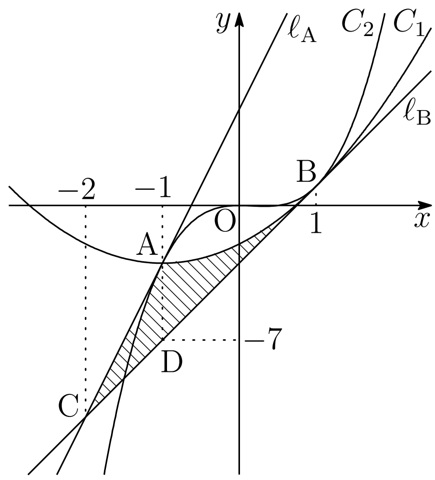
(i)，(ii) より，求める t の値は　　$\boldsymbol{t = -1}$

(2) (1) の結果から　　$C_1 : y = (x+1)^2 - 3$，$C_2 : y = 2x^3 - x^2$

条件により　　A$(-1, -3)$，B$(1,\ 1)$

$y = 2x^3 - x^2$ を微分すると

$$y' = 6x^2 - 2x$$



$x = -1$ のとき，$y' = 8$
$x = 1$ のとき，$y' = 4$
2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の方程式は

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{A}} :\ y - (-3) &= 8(x+1) \\ y &= 8x + 5 \\ \ell_{\mathrm{B}} :\ y - 1 &= 4(x-1) \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

2 直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} の交点を C とすると，その x 座標は

$$8x + 5 = 4x - 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2$$

ℓ_{B} 上の $x = 1$ における点を D とすると　D$(1, -7)$

求める面積は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ACD} + \int_{-1}^{1} \{(x^2 + 2x - 2) - (4x - 3)\}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\{-3 - (-7)\} + \int_{-1}^{1} (x-1)^2\, dx \\ &= 2 + \left[\, \frac{1}{3}(x-1)^3 \,\right]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{14}{3}} \end{aligned}$$

6.4　2018 年 (文系)

1 p，q を整数とする。関数 $f(x)=x^3-px^2+(p^2-2p)x+q$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が極値をもつときの整数 p の値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ が負の解 1 つと相異なる正の解 2 つをもつとき，整数 p，q の値を求めよ。

2 正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする。P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{PBA}=\theta$ とおくとき，PA，PB，PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また，$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ の最大値を求めよ。

(2) $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ を求めよ。

3 m，n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にある確率を求めよ。

4 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。$\{S_n\}$ が

$$S_{n+1}=2S_n+n^2+2n\quad(n\geqq 1)$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3) $n\geqq 2$ のとき，a_n を n の式で表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^3 - px^2 + (p^2 - 2p)x + q$ より　$f'(x) = 3x^2 - 2px + p^2 - 2p$

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると，$D/4 > 0$ であるから

$$(-p)^2 - 3(p^2 - 2p) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad p(p-3) < 0$$

p は整数であるから　　$\boldsymbol{p = 1,\ 2}$

(2) (1) の結果は，方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要条件である．

(i) $p = 1$ のとき，$f(x) = x^3 - x^2 - x + q$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$$

与えられた条件を満たすとき，$f(0) > 0$，$f(1) < 0$ であるから

$$q > 0, \quad q - 1 < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < q < 1$$

q は整数であるから，これを満たす q は存在しない．

(ii) $p = 2$ のとき，$f(x) = x^3 - 2x^2 + q$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

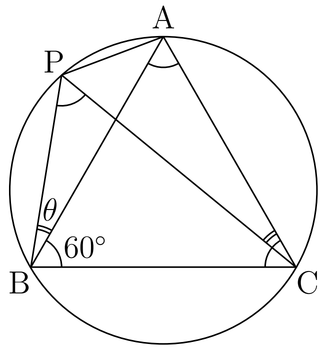
与えられた条件を満たすとき，$f(0) > 0$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right) < 0$ であるから

$$q > 0, \quad q - \frac{32}{27} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < q < \frac{32}{27}$$

q は整数であるから　$q = 1$

(i),(ii) より　　$\boldsymbol{p = 2,\ q = 1}$　■

2 (1) $\angle\mathrm{PBA} = \theta$ より，右の図から



$$\angle\mathrm{PBC} = 60^\circ + \theta, \quad \angle\mathrm{PCB} = 60^\circ - \theta$$

$\triangle\mathrm{PBA}$，$\triangle\mathrm{PBC}$ は半径 1 の円に内接しているから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\theta} = 2\cdot 1,$$
$$\frac{\mathrm{PB}}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{\mathrm{PC}}{\sin(60^\circ + \theta)} = 2\cdot 1$$

ゆえに $\quad \mathbf{PA = 2\sin\boldsymbol{\theta}}$

$$\mathbf{PB = 2\sin(60^\circ - \boldsymbol{\theta}),\quad PC = 2\sin(60^\circ + \boldsymbol{\theta})}$$

加法定理により $\quad \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta) = 2\sin 60^\circ\cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

したがって
$$\begin{aligned}\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} &= 2\{\sin\theta + \sin(60^\circ - \theta) + \sin(60^\circ + \theta)\}\\ &= 2(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\\ &= 4\sin(\theta + 60^\circ)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ は，$\theta = 30^\circ$ のとき，最大値 **4** をとる．

(2) $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 &= 2\{2\sin^2\theta + 2\sin^2(60^\circ - \theta) + 2\sin^2(60^\circ + \theta)\}\\ &= 2\{3 - \cos 2\theta - \cos(120^\circ - 2\theta) - \cos(120^\circ + 2\theta)\}\\ &= 6 - 2\{\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta)\}\end{aligned}$$

ここで，加法定理により

$$\cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 2\cos 120^\circ\cos 2\theta = -\cos 2\theta$$

上式より，$\cos 2\theta + \cos(120^\circ - 2\theta) + \cos(120^\circ + 2\theta) = 0$ であるから

$$\mathbf{PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6}$$

■

3　(1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots(*)$$

である ($i,\ j$ は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A\cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にあるとき，途中反転する (1 の目が上から下，下から上)．5 回投げる中で反転は 2 度起き，さいころの 1 の目が下にくるのは硬貨を 2 回目または 3 回目に投げたあとである．

さいころが 2 回で反転する事象を X とすると，X が起きるのは．硬貨が「表表」または「裏裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(X) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

さいころが 3 回で反転する事象を Y とすると，Y が起きるのは，硬貨が「表裏表」または「裏表裏」の順に出るときであるから，その確率は

$$P(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

求める確率は，X, Y または Y, X の順に起こる確率であるから

$$P(X)P(Y) + P(Y)P(X) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

■

4 (1) $S_1 = a_1 = 1$，$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2{\cdot}1 = 5$$
$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2{\cdot}2 = 18$$

よって　$a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$,　$a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) $(*)$ より　$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$

$S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$

上の 2 式の辺々を引くと　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が，すべての n について，次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \quad \cdots ①$$

したがって　$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると　$pn + p + q = (2p+2)n + 2q + 1$

上式は，n に関する恒等式であるから

$p = 2p + 2$,　$p + q = 2q + 1$　これを解いて　$p = -2$,　$q = -3$

ゆえに　$f(n) = -2n - 3 \quad \cdots ②$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2{\cdot}2 - 3 = -7$ であるから，$a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$$a_n - f(n) = 11{\cdot}2^{n-2} \quad ゆえに \quad a_n = 11{\cdot}2^{n-2} + f(n)$$

これに ② を代入して　$\boldsymbol{a_n = 11{\cdot}2^{n-2} - 2n - 3 \ \ (n \geqq 2)}$ ■

6.5　2019 年 (文系)

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b = \dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b = \dfrac{1}{2}(a+3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。

(3) $S = \cos\dfrac{\pi}{a} + \sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく。$a > b$ であるとき，$S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a，b に対して，$f(x) = x^2 + ax + b$ とおく。$y = f(x)$ は x 軸および直線 $y = 2x + 3$ に接しているとする。実数 a，b を求めよ。このとき，$y = f(x)$，x 軸および直線 $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2px - 2p$ および $C_2 : y = x^3$ の共有点がちょうど 2 個になるような実数 p の値をすべて求めよ。

4 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1, -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1} = 2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n} + 1 \cdots (*)$ に $n = m$ を代入すると

$$2 = \frac{2}{a_m} + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_m = 2$$

第 m 項ですでに $a_m = 2$ となり，矛盾を生じる．
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1 \cdots (**)$ より　$b_n = \dfrac{a_n + 1}{a_n - 2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1} + 1 = \frac{2}{a_n} + 2 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n}$$
$$a_{n+1} - 2 = \frac{2}{a_n} - 1 = \frac{-(a_n - 2)}{a_n}$$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 2} = -2 \cdot \dfrac{a_n + 1}{a_n - 2}$　すなわち　$b_{n+1} = -2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 + 1}{a_1 - 2} = \dfrac{1+1}{1-2} = -2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n = b_1 \cdot (-2)^{n-1} = \boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x = \dfrac{2}{x} + 1$ の解が $2, -1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n + 1}{a_n - 2}\right\}$ は等比数列である．

(3) $(**)$ より　$b_n - 1 = \dfrac{3}{a_n - 2}$　ゆえに　$a_n - 2 = \dfrac{3}{b_n - 1}$

上式および (2) の結果から　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3}{(-2)^n - 1} + 2}$

(4) (3) の結果を $a_n > \dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n - 1} + 2 > \frac{5}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{(-2)^n - 1} > \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

したがって　$0 < (-2)^n - 1 < 6$　ゆえに　$1 < (-2)^n < 7$

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n = 2}$

分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots (*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots (***)$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって $\displaystyle \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha} \left(\frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+\dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{a_1-\alpha}+\frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式[1]

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x=\dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0,-1$ であるから

$$a_{n+1}+1=\frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって　$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$　ゆえに　$\dfrac{a_n}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって　$$a_n=\frac{3\cdot2^{n-1}}{4\cdot5^{n-1}-3\cdot2^{n-1}}$$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式[2]

$$a_1=\frac{q}{p}\ (p>q>0),\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x=\dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$$

ゆえに　$\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\frac{q}{p}-1}-(n-1)$　よって　$a_n=\dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf $\boxed{1}$
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf $\boxed{12}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) a に対する b の値は，次のようになる．

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき，$a > b$ となるのは，次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{6} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ より　$\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$

$\cos\dfrac{\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} < \sqrt{0.81} = 0.9$　ゆえに　$\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}$,　$\sqrt{0.49} < \sqrt{0.5} < \sqrt{0.64}$ より

$$0.7 < \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} < 0.8$$

(2) および上の結果に注意すると，$a < b$ となる $(a,\ b)$ について

$(a,\ b) = (2,\ 1)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\pi = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (4,\ 2)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{2} > 0.7 + 1 = 1.7$

$(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{\pi}{4} < 0.9 + 0.8 = 1.7$

$(a,\ b) = (6,\ 3)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \sqrt{1.7^2} = 1.7$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{2}{4} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

補足 $a < b$ である事象を X，$S < 1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

$(a,\ b) = (1,\ 2)$ のとき　$S = \cos\pi + \sin\dfrac{\pi}{2} = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (3,\ 3)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1.7$

$P(Y) = \dfrac{4}{6}$ より，$P_X(Y) \neq P(Y)$ であるから，X と Y は独立ではない．■

3　(1) $y=x^2+ax+b$ が x 軸に接するから，係数について

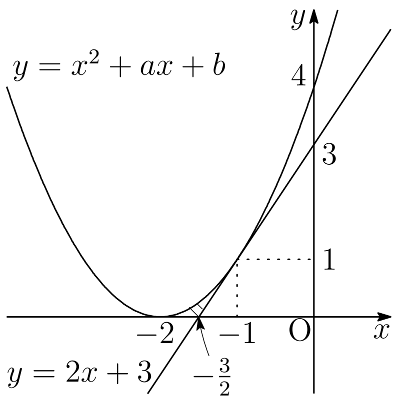
$$a^2-4b=0 \quad \cdots ①$$

$y=x^2+ax+b$ と $y=2x+3$ から y を消去して整理すると

$$x^2+(a-2)x+b-3=0$$

この方程式は重解をもつから

$$(a-2)^2-4(b-3)=0 \quad \cdots ②$$



①，② を解いて　　$\boldsymbol{a=4,\ b=4}$

3 点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$(-1,\ 0)$，$(-1,\ 1)$ を頂点する三角形の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{4}$

よって，求める面積を S とすると[3]

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)\,dx-\frac{1}{4} \\ &= \int_{-2}^{-1}(x+2)^2\,dx-\frac{1}{4}=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{-1}-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

(2) $y=x^2+2px-2p$ と $y=x^3$ から y を消去すると

$$x^2+2px-2p=x^3 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2-2p)=0 \quad \cdots (*)$$

(i) $x^2-2p=0$ が重解をもつとき　$p=0$

これを $(*)$ に代入して　　$(x-1)x^2=0$

(ii) $x^2-2p=0$ が 1 を解にもつとき　$1-2p=0$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

これを $(*)$ に代入して　　$(x+1)(x-1)^2=0$

(i),(ii) で得られた結果は条件を満たす．よって　$\boldsymbol{p=0,\ \frac{1}{2}}$　■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf $\boxed{4}$ の補足を参照．

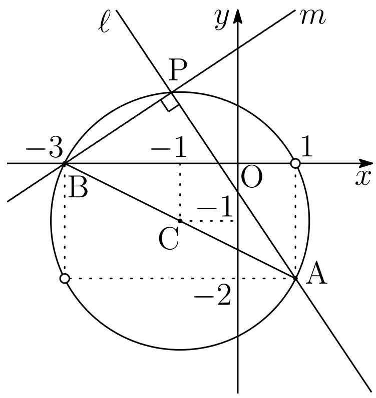
$\boxed{4}$ (1) $\ell : y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x-1)$ より，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m : y = bx + 3b$ は $y = b(x+3)$ より，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．

線分 AB の中点を C とすると　$\mathrm{C}(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5,\quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab = -1$ であるから

$$\ell : ax - y - a - 2 = 0, \quad m : x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは，点 $\mathrm{A}(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 + a\cdot(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \boldsymbol{\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

線分 BP の長さは，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP} = \frac{|a\cdot(-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}}$$

(3) △APB の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，AP = BP より

$$\frac{2|a-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \text{ゆえに} \quad |a-2| = |2a+1|$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, -3}$

別解 直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta = -\frac{1}{2}$

△APB の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan\theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$

■

6.6　2020 年 (文系)

1 a を定数とし，$y = (\sin\theta + a)(\cos\theta + a)$ とする。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とするとき，y を a と t を用いて表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 $a < b < c$ を満たす実数 a，c と整数 b に対し，$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ とする。また，$f(x) = g(x) - g'(x)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(a) < 0$，$f(b) > 0$，$f(c) < 0$ となることを示せ。

(2) $f(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 2)$ のとき，a，b，c の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a，b，c から定まる曲線 $y = g(x)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。n を自然数とするとき，3 直線 $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{n}{3}$，$y = x - n$，$x = n$ で囲まれた図形を D_n とする。また，D_n の周上および内部の格子点の個数を L_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) L_3 を求めよ。

(2) k を 0 以上の整数とする。直線 $\ell : x = n + 3k$ が D_n と交わるとき，D_n の周上および内部の格子点で ℓ 上にあるものの個数を n と k を用いて表せ。

(3) L_n を n を用いて表せ。

4 k，s，t を実数とする。座標空間に原点 O，A$(1,\ -1,\ 1)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 0,\ k)$ の 4 点をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で定まる点を D，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点を E とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ により定まる点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を k，s，t を用いて表せ。

(2) 点 P が $0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たしながら動くとき，点 P が動いてできる平行四辺形を $P(k)$ とし，その面積を $S(k)$ とする。k が実数全体を動くとき，$S(k)$ の最小値と，そのときの k の値を求めよ。

(3) (2) で求めた k に対し，平行四辺形 $P(k)$ を底面とし，点 O を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=(\sin\theta+a)(\cos\theta+a)$ より

$$y=\sin\theta\cos\theta+a(\sin\theta+\cos\theta)+a^2$$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \qquad \text{ゆえに} \qquad \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって $\quad y=\dfrac{t^2-1}{2}+at+a^2=\boldsymbol{\dfrac{t^2}{2}+at+a^2-\dfrac{1}{2}}$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ より $\quad t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $\quad \boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(3) $y=f(t)$ とおくと，(1) の結果から

$$f(t)=\frac{1}{2}(t+a)^2+\frac{a^2-1}{2} \quad (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

したがって，$y=f(t)$ は，下に凸の放物線である．
軸は $t=-a$，定義域 $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の中央は $\quad t=0$

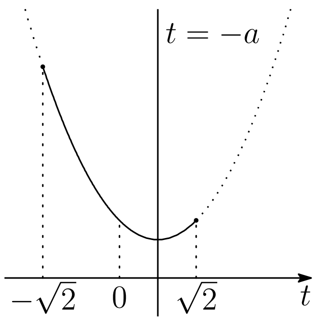
(i) $0<-a$ すなわち $\quad a<0$ のとき

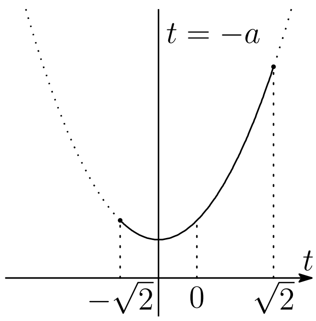
最大値 $f(-\sqrt{2})=\boldsymbol{a^2-\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}}$

(ii) $-a\leqq 0$ すなわち $\quad a\geqq 0$ のとき

最大値 $f(\sqrt{2})=\boldsymbol{a^2+\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}}$

(i) $0<-a$ のとき $(a<0)$ (ii) $-a\leqq 0$ のとき $(a\geqq 0)$





2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる．

最小値は，次の 3 つの場合に分けて求める．

(i) $\sqrt{2} < -a$　すなわち　$a < -\sqrt{2}$ のとき

最小値 $f(\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 + \sqrt{2}a + \dfrac{1}{2}}$

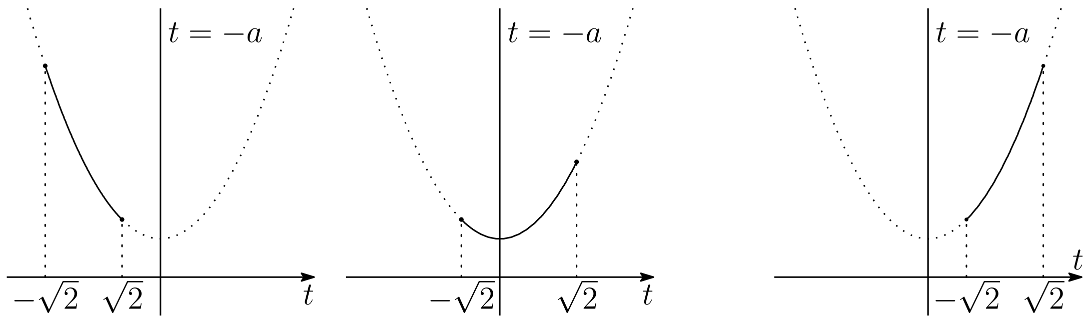
(ii) $-\sqrt{2} \leqq -a \leqq \sqrt{2}$　すなわち　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

最小値 $f(-a) = \boldsymbol{\dfrac{a^2-1}{2}}$

(iii) $-a < -\sqrt{2}$　すなわち　$\sqrt{2} < a$ のとき

最小値 $f(-\sqrt{2}) = \boldsymbol{a^2 - \sqrt{2}a + \dfrac{1}{2}}$

(i) $\sqrt{2} < -a$ のとき $(a < -\sqrt{2})$　　(ii) $-\sqrt{2} \leqq -a \leqq \sqrt{2}$ のとき $(-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2})$　　(iii) $-a < -\sqrt{2}$ のとき $(\sqrt{2} < a)$



■

2　(1) $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ より　$g(a) = g(b) = g(c) = 0$　$\cdots(*)$

$g(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ac+bc+ca)x - abc$ であるから

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \\ &= (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) \end{aligned}$$

$a < b < c$ であるから

$$(**) \quad \begin{cases} g'(a) = (a-b)(a-c) > 0 \\ g'(b) = (b-c)(b-a) < 0 \\ g'(c) = (c-a)(c-b) > 0 \end{cases}$$

$f(x) = g(x) - g'(x)$ は，$(*)$，$(**)$ により

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) - g'(a) < 0, \\ f(b) &= g(b) - g'(b) > 0, \\ f(c) &= g(c) - g'(c) < 0 \end{aligned}$$

(2) $p = a + b + c$，$q = ab + bc + ca$，$r = abc$ とおくと，(1) の結果から

$$g(x) = x^3 - px^2 + qx - r, \quad g'(x) = 3x^2 - 2px + q$$

ゆえに　$g(x) - g'(x) = x^3 - (p+3)x^2 + (2p+q)x - q - r$

また　$f(x) = (x+1)(x-2-4x+2) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$

$f(x) = g(x) - g'(x)$ であるから

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = x^3 - (p+3)x^2 + (2p+q)x - q - r$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$-3 = -(p+3), \quad -2 = 2p + q, \quad 2 = -q - r$$

これを解いて　$p = 0, \ q = -2, \ r = 0$

$a, \ b, \ c$ を解とする 3 次方程式は，$t^3 - pt^2 + qt - r = 0$，すなわち

$$t^3 - 2t = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 0, \ \pm\sqrt{2}$$

$a < b < c$ であるから　$\boldsymbol{a = -\sqrt{2}, \ b = 0, \ c = \sqrt{2}}$

(3) $y = g(x)$，$y = f(x)$ の共有点の x 座標は，$f(x) - g(x) = -g'(x)$ より

$$f(x) - g(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -g'(x) = -(3x^2 - 2) = 0$$

これを解いて　$x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ において

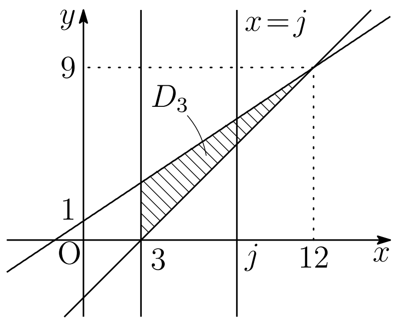
$$f(x) - g(x) = -g'(x) = -3x^2 + 2 \geqq 0$$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} (-3x^2 + 2)\,dx \\ &= \Big[-x^3 + 2x\Big]_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{6}}{9}} \end{aligned}$$

■

3　(1) $n=3$ のとき，3 直線



$$y=\frac{2}{3}x+1,\quad y=x-3,\quad x=3$$

で囲まれた領域 D_3 で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数は $(3 \leqq j \leqq 12)$

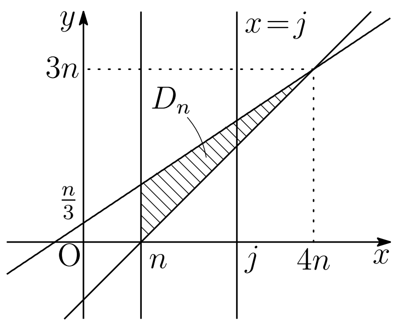
$$\left[\frac{2}{3}j+1\right]-(j-3)+1=\left[\frac{15-j}{3}\right]$$

よって，求める個数は（$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す）

$$\begin{aligned}&\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{12}{3}\right]\\&=\left(\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]\right)\\&\qquad+\left(\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]\right)+\left[\frac{12}{3}\right]\\&=3+6+9+4=\mathbf{22}\end{aligned}$$

補足　次頁の定理を参照.

(2) 3 直線



$$y=\frac{2}{3}x+\frac{n}{3},\quad y=x-n,\quad x=n$$

で囲まれた領域 D_n で，直線 $x=j$ 上の格子点の個数を a_j とすると $(n \leqq j \leqq 4n)$

$$\begin{aligned}a_j&=\left[\frac{2}{3}j+\frac{n}{3}\right]-(j-n)+1\\&=\left[\frac{4n-j}{3}\right]+1\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

求める個数は　$a_{n+3k}=\left[\dfrac{4n-(n+3k)}{3}\right]+1=\boldsymbol{n-k+1}$

(3) $(*)$ より $\quad a_{n+3k+1} = \left[\dfrac{4n-(n+3k+1)}{3}\right]+1 = n-k$

$$a_{n+3k+2} = \left[\dfrac{4n-(n+3k+2)}{3}\right]+1 = n-k$$

上の 2 式および (2) の結果により

$$\begin{aligned}
L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{n+3k}+a_{n+3k+1}+a_{n+3k+2})+a_{4n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\{(n-k+1)+(n-k)+(n-k)\}+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)+k+k\}+1 = \sum_{k=1}^{n}(3k+1)+1 \\
&= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)}
\end{aligned}$$

別解 $(*)$ により

$$\begin{aligned}
L_n &= \sum_{j=n}^{4n} a_j = \sum_{j=n}^{4n}\left(\left[\frac{4n-j}{3}\right]+1\right) = \sum_{j=n}^{4n}\left[\frac{4n-j}{3}\right]+\sum_{j=n}^{4n} \\
&= \left(\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]\right)+\left(\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]\right) \\
&\qquad +\cdots+\left(\left[\frac{3n-2}{3}\right]+\left[\frac{3n-1}{3}\right]+\left[\frac{3n}{3}\right]\right)+(3n+1) \\
&= 1+4+\cdots+(3n-2)+(3n+1) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)\{1+(3n+1)\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)}
\end{aligned}$$

定理 a，n を整数とすると，次式が成立する．

$$\text{(A)} \quad \boldsymbol{\left[\frac{a}{n}\right]+\left[\frac{a+1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=a}$$

証明 連続する n 個の整数 $a,\ a+1,\cdots,a+n-1$ 中で n の倍数を $a+q$ とする．

$q=0$ のとき (A) のすべての項が $\dfrac{a}{n}$ であるから，(A) の値は $\dfrac{a}{n}\cdot n = a$

$q\neq 0$ のとき $\left[\dfrac{a}{n}\right]=\left[\dfrac{a+1}{n}\right]=\cdots=\left[\dfrac{a+q-1}{n}\right]=\dfrac{a+q}{n}-1,$

$$\left[\frac{a+q}{n}\right]=\left[\frac{a+q+1}{n}\right]=\cdots=\left[\frac{a+n-1}{n}\right]=\frac{a+q}{n}$$

(A) の値は $\left(\dfrac{a+q}{n}-1\right)q+\dfrac{a+q}{n}(n-q)=a$ 証終 ■

4　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\{t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}-(1-s)\vec{a}\\&=-\vec{a}+\vec{c}+s\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{c})\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$-\vec{a}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ k-1)$，$\vec{b}-\vec{c}=(1,\ 1,\ 1-k)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(-2,\ 1,\ k-1)+s(1,-1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 1-k)\\&=(-2+s+t,\ 1-s+t,\ k-1+s+t(1-k))\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{P}(\boldsymbol{-2+s+t,\ 1-s+t,\ k-1+s+t(1-k)})$

(2) $\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}$ とおくと，$(*)$ において $0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の描く図形は，2 つのベクトル

$$\vec{a}=(1,-1,\ 1),\quad \vec{d}=(1,\ 1,\ 1-k)$$

によって張られる平行四辺形であるから，その面積 $S(k)$ は

$$S(k)=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{d}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{d})^2}$$

このとき
$$\begin{aligned}&|\vec{a}|^2=1^2+(-1)^2+1^2=3\\&|\vec{d}|^2=1^2+1^2+(1-k)^2=k^2-2k+3\\&\vec{a}\cdot\vec{d}=1\cdot 1+(-1)\cdot 1+1(1-k)=1-k\end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned}S(k)&=\sqrt{3(k^2-2k+3)-(1-k)^2}\\&=\sqrt{2(k-1)^2+6}\end{aligned}$$

よって，$S(k)$ は，$\boldsymbol{k=1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$ をとる．

別解　$\vec{a}$ と $\vec{d}$ のベクトル積 (外積) は　$\vec{a}\times\vec{d}=(k-2,\ k,\ 2)$

ゆえに　$S(k)=|\vec{a}\times\vec{d}|=\sqrt{(k-2)^2+k^2+4}=\sqrt{2(k-1)^2+6}$

注意　ベクトル積 (外積) は，高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．2018 年度の熊大入試において，四面体の体積についてベクトル積を用いた受験生の解答があったが，間違いではなかったため，減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会)．

(3) $k=1$ より，平行四辺形 $P(1)$ は，次の 2 つのベクトルに平行である．

$$\vec{a}=(1,-1,\ 1),\quad \vec{d}=(1,\ 1,\ 0)$$

これらに垂直な単位ベクトルの 1 つは (外積と平行なベクトル)

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)$$

$(*)$ より，$P(1)$ 上の 1 点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ をもとに $(s=1,\ t=0)$，点 O から $P(1)$ を含む平面に垂線 OH を引くと，$\vec{c}=(-1,\ 0,\ 1)$ より

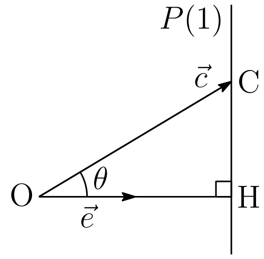
$$\vec{c}\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-1\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 2\}=\frac{3}{\sqrt{6}},$$
$$\mathrm{OH}=|\vec{c}\cdot\vec{e}|=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

求める四角錐の体積は　$\dfrac{1}{3}S(1)\cdot\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}\sqrt{6}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\mathbf{1}$

補足 右の図において

$$\vec{c}\cdot\vec{e}=|\vec{c}||\vec{e}|\cos\theta=|\vec{c}|\cos\theta,$$
$$\mathrm{OH}=|\vec{c}||\cos\theta|$$

ゆえに　　$\mathrm{OH}=|\vec{c}\cdot\vec{e}|$



例えば，$P(1)$ 上の位置ベクトル $-\vec{a}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ 0)$ でもよい．

$$(-\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-2\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 2\}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

別解 $\vec{f}=-\vec{a}+\vec{c}$ とおくと $(\vec{d}=\vec{b}-\vec{c})$，$(*)$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{f}+s\vec{a}+t\vec{d}\quad(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

$P(1)$ の頂点を $\mathrm{P_0}(\vec{f})$，$\mathrm{P_1}(\vec{f}+\vec{a})$，$\mathrm{P_2}(\vec{f}+\vec{d})$，$\mathrm{P_3}(\vec{f}+\vec{a}+\vec{d})$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0O}}=-\vec{f},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=\vec{d}$$

四面体 $\mathrm{OP_0P_1P_2}$ の体積 V は，$\vec{a}\times\vec{d}=(-1,\ 1,\ 2)$，$-\vec{f}=(2,-1,\ 0)$ より

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{d})\cdot(-\vec{f})\right|=\frac{1}{6}|(-1)\cdot 2+1\cdot(-1)+2\cdot 0|=\frac{1}{2}$$

よって，求める体積は　　$2V=2\times\dfrac{1}{2}=1$

ベクトル積

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積 (外積)** という．
2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のベクトル積は

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

であり，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立つ．また，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

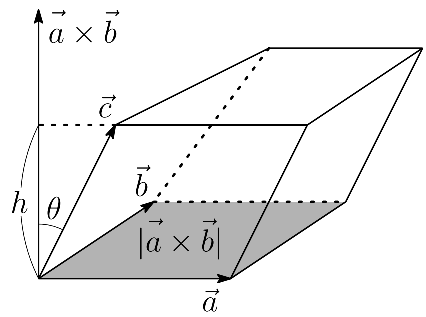
であるから，$\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい．

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

両辺の絶対値をとると

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$



$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の張る平行六面体について，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平面を底面とすると，$|\vec{c}||\cos\theta|$ は，その高さ h であるから，この平行六面体の体積 V_1 は

$$\boldsymbol{V_1=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると

四面体 OABC の体積 V は　$\boldsymbol{V=\dfrac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$

また，対称性により，$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|=|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$ が成り立つ．■

理系 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	熊本大学 理系	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式		1								
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式										
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法					1					
III	式と曲線	4									4
	複素数平面						3	2			2
	関数										
	極限				3	4					
	微分法とその応用		3	3	2		4	3			
	積分法	3	4	3		4			3·4		
	積分法の応用			4	4		4	3		3·4	3
A	場合の数と確率	1								2	
	整数の性質						2				1
	図形の性質										
B	平面上のベクトル	2									
	空間のベクトル			2	1	2	1	1	1		
	数列			1		3·4	2	4	2	1	
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2								

数字は問題番号

6.7　2015年 (理系)

1 $f(x)$ は x の3次多項式とし，x^3 の係数は1，定数項は0とする。2つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ が満たされているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ。

(2) 不等式 $\alpha<\beta<3\alpha$ が成り立つとき，3次方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数を求めよ。

2 p，q，r を実数とする。空間内の3点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,-1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は1でも -1 でもないことを示せ。

(2) q，r を p を用いて表せ。

(3) p'，q'，r' を実数とし，空間内の3点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,-1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4) (3) における3点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。

3 $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{B}$ と $\angle\mathrm{C}$ は鋭角とする。点Aを通り辺BCに直交する直線を引き，辺BCとの交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを1とする。また，$\mathrm{BX}_1=1$，$\mathrm{CX}_1=8$ とする．各 $n=1,2,3,\cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺BC上の点 X_n を通り辺ACに平行な直線を引き，辺ABとの交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺BCに平行な直線を引き，辺ACとの交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺BCに直交する直線を引き，辺BCとの交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を求めよ。

(2) l_{n+1} を l_n を用いて表せ。

(3) $l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてもよい。

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) x の 3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数が 1，$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2 - 3(\alpha+\beta)x + 3\alpha\beta$$

また，$f(x)$ の定数項は 0 であるから

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

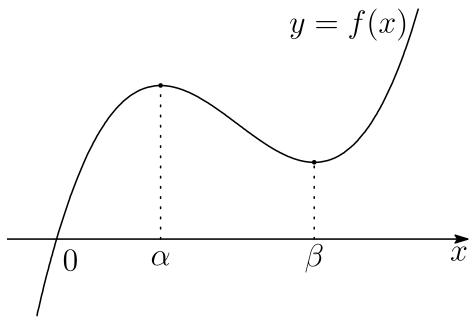
したがって

$$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = \boldsymbol{\frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{2}}$$
$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = \boldsymbol{\frac{\beta^2(3\alpha-\beta)}{2}}$$

(2) $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

$\alpha < \beta < 3\alpha$ より，$0 < \alpha < \beta$，$3\alpha - \beta > 0$ であるから，$f(\beta) > 0$
したがって，$y = f(x)$ のグラフの概形は，次のようになる．



よって，$y = f(x)$ および $y = -1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数は **1 個**.

解説

3 次式 $f(x)$ の x^3 の係数を a とし，$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ を満たすとすると $(\alpha<\beta)$

$$f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)=3a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$f''(x)=3a\{2x-(\alpha+\beta)\}$$
$$f'''(x)=6a$$

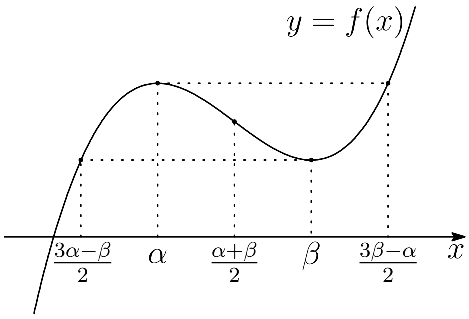
$f(x)$ を $x=\alpha$ を極として，テイラー展開[4] を行うと

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3$$

したがって
$$\begin{aligned}f(x)-f(\alpha)&=\frac{3a}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3\\&=a(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

同様にして
$$f(x)-f(\beta)=a(x-\beta)^2\left(x-\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)$$

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



とくに，数列 $\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$，α，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，β，$\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ は，等差数列をなす．

本題において，$f(0)=0$，$\alpha<\beta<3\alpha$ より，$0<\dfrac{3\alpha-\beta}{2}$ であるから

$$f\left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)>0$$

よって，$y=f(x)$ および $y=-1$ のグラフから，3 次方程式 $f(x)=-1$ の実数解の個数は 1 個． ■

---

[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf を参照．

$\boxed{2}$ (1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-q,\ p-1, -1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ p+1, -r),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-q-1, -2,\ r-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (q+1,\ 2,\ 1-r)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるから，$p=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$ となり，2 点 A，B が一致する．これら 2 点の z 座標は異なるので，不適．
また，$p=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$ となり，2 点 C，A が一致する．これら 2 点の x 座標は異なるので，不適．
よって，$p \neq \pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，これらの x 成分，y 成分により

$$2 \cdot 2 - (p+1)(q+1) = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{q = \frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの y 成分，z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2 - 2p + p'(1-p^2) = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{p' = -\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p) + 1 - p^2 + 1 + p = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = (-1, -1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p) - (1-p^2) + r'(1+p) = 0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から　$\mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right)$,

$\mathrm{B}'\left(-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right)$,

$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'} = \left(-2,\ \dfrac{-p+1}{p+1}, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}$ であるとき，これらの x 成分，y 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)} \cdot \frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1} \cdot (-2) = 0$$

整理すると　$p^2+5p+8=0 \quad \cdots (*)$

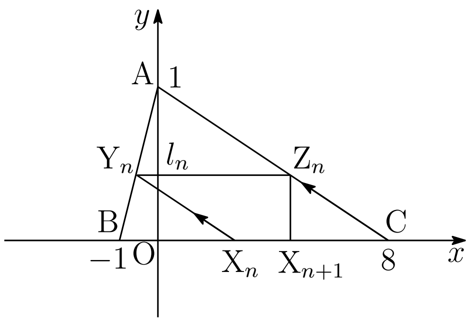
この方程式の判別式を D とすると

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．

よって，3 点 A′，B′，C′ は一直線上にない．■

3 (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 0)$，C$(8,\ 0)$，X$_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は



$$y=x+1 \quad \cdots①$$

直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}x+1 \quad \cdots②$$

直線 X$_n$Y$_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\frac{1}{8}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{8}(x-x_n) \quad \cdots③$$

点 Y$_n$ の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{1+x_n}{9} \quad \cdots④$

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{1}{9}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{8}+1 \quad これを解いて \quad x=8(1-l_n)$$

これが点 X$_{n+1}$ の x 座標であるから　$x_{n+1}=8(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{1+x_{n+1}}{9}=\frac{1+8(1-l_n)}{9}=\boldsymbol{-\frac{8}{9}l_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　$\boldsymbol{n=25}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$，

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt \\ &= e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = e^{-n\pi}a_1 \\ &= e^{-n\pi}\left[-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}} \end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=e^{-n\pi}a_1$，$a_1=\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) &= a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi} \\ a_n &= a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi} = a_1\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2}\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})} \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}}$$

■

6.8 2016年(理系)

$\boxed{1}$ 1辺の長さ1の正四面体OABCを考える。$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に対しOAを $s:(1-s)$ に内分する点をPとし，$0 < t < 1$ に対しOCを $t:(1-t)$ に内分する点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{BPQ} = 90^\circ$ であるとき，t を s を用いて表せ。

(3) (2)の条件の下で，t の最大値とそのときの s の値を求めよ。

(4) (3)で求めた s，t に対して，PQ^2 を求めよ。

$\boxed{2}$ 自然数 a に対して

$$S(a) = \sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 和 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が整数となる自然数 a を小さい順に並べた数列を

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$$

とする。一般項 a_n を求めよ。

(3) (2)の数列 $\{a_n\}$ について，a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を4で割った余りは0か3であることを示せ。

(4) (2)の数列 $\{a_n\}$ と自然数 N に対して和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

3 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

4 $x\geqq 1$ で定義された関数

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

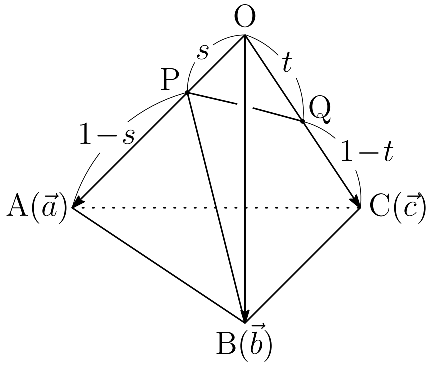
(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\vec{b} - s\vec{a}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{t\vec{c} - s\vec{a}}$$



(2) $\angle\mathrm{BPQ} = 90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ であるから，(1) の結果から

$$(\vec{b} - s\vec{a})\cdot(t\vec{c} - s\vec{a}) = 0 \quad \text{整理すると} \quad t\vec{b}\cdot\vec{c} - s\vec{a}\cdot\vec{b} - st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 = 0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot1\cos60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}| = 1$ であるから

$$\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}st + s^2\cdot1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (1-s)t = s(1-2s)$$

このとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して　　$\boldsymbol{t = \dfrac{s(1-2s)}{1-s}}$

(3) (2) の結果から

$$t = \frac{s(1-2s)}{1-s} = 2s + 1 - \frac{1}{1-s} = 3 - \left\{2(1-s) + \frac{1}{1-s}\right\} \quad \cdots①$$

$0 < s < \dfrac{1}{2}$ より $1-s > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2(1-s) + \frac{1}{1-s} \geqq 2\sqrt{2(1-s)\cdot\frac{1}{1-s}} = 2\sqrt{2} \quad \cdots②$$

上式で等号が成立するとき，$0 < s < \dfrac{1}{2}$ に注意して

$$2(1-s) = \frac{1}{1-s} \quad \text{すなわち} \quad s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

このとき，①，② より t の最大値は　　$\boldsymbol{3 - 2\sqrt{2}}$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |t\vec{c} - s\vec{a}|^2 = t^2|\vec{c}|^2 - 2st\vec{c}\cdot\vec{a} + s^2|\vec{a}|^2 \\ &= s^2 - st + t^2 \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{27-19\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{a} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{a}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \boldsymbol{\sqrt{a+1}-1}$

(2) $S(a)$ が整数 $n \geqq 1$ に等しいとき，(1) の結果から

$$\sqrt{a+1}-1 = n \quad \text{ゆえに} \quad a = n(n+2)$$

よって，求める数列の一般項は　$\boldsymbol{a_n = n(n+2)}$

(3) $n = 2m-1$ のとき (m は整数)

$$\begin{aligned}a_n &= (2m-1)\{(2m-1)+2\} = (2m-1)(2m+1) \\ &= 4m^2 - 1 = 4(m^2-1)+3\end{aligned}$$

$n = 2m$ のとき (m は整数)

$$a_n = 2m(2m+2) = 4m(m+1)$$

よって，a_n を 4 で割った余りは 0 か 3 である．

(4) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}}\end{aligned}$$

■

3 (1) $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n - 2\{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{n-1} \\ &= 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2^n\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\} \\ &= 2^n\{\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\} + 2^n i\{\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\} \\ &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} z_n &= -2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + 2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} \\ &= -2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2^n i\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

補足 $z_n = -2^n\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi + 2^n i\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi = 2^n i\left(\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi + i\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi\right)$

$$\begin{aligned} &= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi + i\sin\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\ &= 2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

別解 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha - 2) \quad \cdots①$

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= 2(\cos\theta + i\sin\theta) - 2 = 2(\cos\theta - 1 + i\sin\theta) \\ &= 4\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 4i\sin\frac{\theta}{2}\left(i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

上式および ① から

$$\begin{aligned} z_n &= 2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\}\cdot 4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2} + i\sin\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

これに $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すると　$z_n = 2^n\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n - 1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001} \sin \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2} + 2^{1001} i \cos \dfrac{1999}{2}\theta \sin \dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j - 1}{2}\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{2j - 1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　　**500** (個)　■

4 (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = (\log x)'\frac{1}{x^2} + \log x\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} + \log x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = \sqrt{e}$

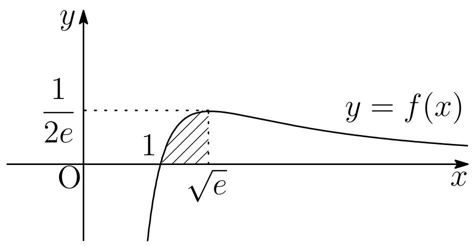
$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{x}\log x\right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{x}(\log x + 1)\right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}} \end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)'\,dx = \pi\Big[(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

6.9　2017 年 (理系)

$\boxed{1}$ 原点を O とする座標空間内に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ がある。ただし，$a>0$，$b>0$，$c>0$ とする。$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$，$\sin\theta$ を a，b，c を用いて表せ。

(2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直であるとき，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) の条件のもとで $a=3$ としたとき，面積 S の最小値とそのときの b，c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ $s>0$，$t>0$ とする。原点を O とする複素数平面において，$\alpha=2-i$，$\beta=s+ti$ を表す点をそれぞれ A，B とする。さらに，点 C を直線 OB に関して点 A と反対側にとり，$\triangle\mathrm{OBC}$ が正三角形になるようにする。点 C を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) z を s，t を用いて表せ。

(2) α，β が等式 $4\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0$ を満たすとき，β と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた β と z に対して，直線 AC と直線 OB の交点を D とし，$\angle\mathrm{CDB}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\log_2 x-x+1\ (x>0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ.

(2) 方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ を用いてもよい。

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 $f(x) = x^2 + x$ とし，j は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

> $a_1 = 2$ とする。a_n $(n \geqq 1)$ に対して，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $({a_n}^j,\ f({a_n}^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし，${a_n}^j$ は a_n の j 乗を表す。

以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ b,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a,\ 0,\ c)$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が θ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} = \boldsymbol{\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}}$$

また，$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} = \boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}}$$

(2) H$(x,\ y,\ z)$ とおくと，H は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点であるから

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = (a-x, -y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = (-x,\ b-y, -z)$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}} = (-x, -y,\ c-z)$ がいずれも $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x,\ y,\ z)$ に垂直であるから

$$\begin{aligned}(a-x)x - y^2 - z^2 &= 0\\ -x^2 + (b-y)y - z^2 &= 0\\ -x^2 - y^2 + (c-z)z &= 0\end{aligned}$$

$(*)$ に注意してこれらを整理すると　$ax = 1,\quad by = 1,\quad cz = 1$

上の 3 式から，$x = \dfrac{1}{a}$，$y = \dfrac{1}{b}$，$z = \dfrac{1}{c}$ を ① に代入して　$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} = 1$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\times\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\end{aligned}$$

上式および (2) の結果により

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} = \frac{1}{2}abc \quad \cdots(**)$$

(2) の結果および (∗∗) に $a = 3$ を代入することにより

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9} \quad \cdots ①$$
$$S = \frac{3}{2}bc$$

2 数 $\frac{1}{b^2}$，$\frac{1}{c^2} > 0$ について相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{8}{9} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}} = \frac{2}{bc} \quad \text{すなわち} \quad bc \geqq \frac{9}{4}$$

したがって $\quad S = \frac{3}{2}bc \geqq \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4} = \frac{27}{8}$

上式において，等号が成立するのは，$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ のときであるから，① より

$\boldsymbol{b = c = \frac{3}{2}}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{27}{8}}$ をとる．

補足 b^2 と c^2 の相乗平均・調和平均の関係により

$$\sqrt{b^2\cdot c^2} \geqq \frac{2}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad (\text{等号が成立するのは } b = c \text{ のとき})$$

これに $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}$ を代入すると $\quad bc \geqq \frac{9}{4}$

解説 n 個の正数 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$G = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$A \geqq G$ が成り立つから[5]，n 個の整数 $\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，$\cdots$，$\frac{1}{x_n}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}$$

したがって $\quad A \geqq G \geqq H$

なお，等号が成立するのは，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る． ■

[5] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf $\boxed{3}$ を参照

2 (1) 点 C は直線 OB に関して点 A と反対側にあり，△OBC が正三角形であるから

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(s+ti)$$
$$= \boldsymbol{\frac{s-\sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s+t}{2}i}$$

(2) $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ より $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) + 4 = 0$

2 点 A，B の位置関係に注意してこれを解くと

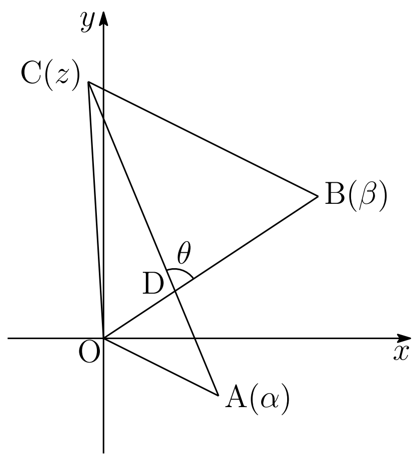
$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\beta}{\alpha} = 2w$，$\dfrac{z}{\beta} = w$ より

$$\beta = 2w\alpha = (1+\sqrt{3}i)(2-i) = \boldsymbol{2+\sqrt{3}+(-1+2\sqrt{3})i}$$
$$z = 2w^2\alpha = (-1+\sqrt{3}i)(2-i) = \boldsymbol{-2+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{z-\alpha}{\beta} = \frac{2w^2\alpha - \alpha}{2w\alpha}$$
$$= \frac{2w^2-1}{2w} = \frac{1}{2}\left(2w - \frac{1}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i)$$



上の図から，$\theta = \arg\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

■

3 (1) $f(x) = \log_2 x - x + 1$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{x\log 2} - 1 = \frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log_2 e}\right)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\log_2 e$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

極大値 $f(\log_2 e) = \log_2(\log_2 e) - \log_2 e + 1 = \boldsymbol{\log_2\left(\dfrac{2\log_2 e}{e}\right)}$

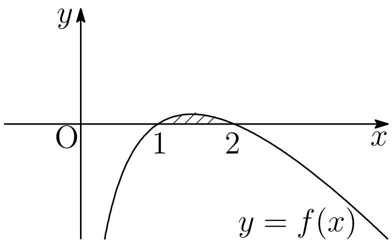
(2) (1) で示した増減表により，$f(x) = 0$ の解の個数は高々2 個．

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 0$$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x = 1，2}$

補足 $\log_2 x - x + 1 = 0$ の解は，$y = \log_2 x$ と $y = x - 1$ の交点の x 座標．
凸関数のグラフと直線の共有点は高々2 個．

(3) (1),(2) の結果から，求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(\frac{\log x}{\log 2} - x + 1\right) dx \\ &= \left[\frac{x(\log x - 1)}{\log 2} - \frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2} - \frac{1}{\log 2}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $f(x) = x^2 + x$ を微分すると $f'(x) = 2x + 1$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

すなわち $$y = (2t + 1)x - t^2$$

これと直線 $y = x$ の方程式から y を消去すると

$$(2t + 1)x - t^2 = x \quad ゆえに \quad 2t\left(x - \frac{1}{2}t\right) = 0$$

$t = a_n{}^j$ とすると，$a_n > 0$ のとき，$t \neq 0$ であるから

$$x = \frac{1}{2}t \quad すなわち \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n{}^j > 0$$

$a_1 = 2 > 0$ により，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$

(2) $a_n > 0$ より $(n \geqq 1)$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n{}^j$ の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{1}{2}a_n{}^j \quad ゆえに \quad \log_2 a_{n+1} = j\log_2 a_n - 1$$

$b_n = \log_2 a_n \cdots$ ① であるから $\boldsymbol{b_{n+1} = jb_n - 1}$

(3) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$，① から $a_n = 2^{b_n} \quad \cdots$ ②

(i) $j = 1$ のとき，(2) の結果から $b_{n+1} = b_n - 1$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公差 -1 の等差数列であるから

$$b_n = 1 + (-1)(n - 1) \quad すなわち \quad b_n = 2 - n$$

② から $\boldsymbol{a_n = 2^{2-n}}$

(ii) $j \geqq 2$ のとき，(2) の結果から $b_{n+1} - \dfrac{1}{j-1} = j\left(b_n - \dfrac{1}{j-1}\right)$

数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{j-1}\right\}$ は，初項 $b_1 - \dfrac{1}{j-1}$，公比 j の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{j-1} = \left(b_1 - \frac{1}{j-1}\right)j^{n-1} \quad すなわち \quad b_n = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

② から $\boldsymbol{a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1}+1}{j-1}}}$ ■

6.10 2018 年 (理系)

1 t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，$\angle\mathrm{BAC}$ が直角であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) t の値を求めよ。

(2) D から A，B，C を通る平面に垂線を下ろし，A，B，C を通る平面との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ を求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

2 初項が 1 である数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。$\{S_n\}$ が

$$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad (n \geqq 1)$$

をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n の式で表せ。

3 n を 2 以上の自然数とする。区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して，その両端と分点を順に $0 = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = 1$ とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0,\ b \geqq 0,\ c > 0)$ に対して，区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ を底辺とし，高さが $f(x_k)$ である長方形の面積を L_k とする。ただし，$k = 1, 2, \cdots, n$ である。すべての n に対して $L_1 + L_n = \dfrac{10}{n} + \dfrac{8}{n^3}$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a，b，c を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kL_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2L_k$ を求めよ。

4 $-3 \leqq x \leqq 0$ に対して，$F(x) = \displaystyle\int_x^{x+3} \sqrt{3t^2 + t^3}\,dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $-3 < x < 0$ に対して，$F'(x) = 0$ の解を求めよ。

(2) $F(x)$ の最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C(t, $2t$, $t-1$) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1)$$

$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{t=4}$$

(2) (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n}=(1,\ 1,-2)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\vec{n}$ であるから (k は実数)，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+k\vec{n}$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから $\qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k|\vec{n}|^2$

したがって $-1=6k$ 　ゆえに $k=-\dfrac{1}{6}$

よって $\qquad \overrightarrow{\mathrm{HD}}=-\dfrac{1}{6}\vec{n}=\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\vec{e}_1=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$，$\vec{e}_2=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$ とおくと，$\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2\\&=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 6,\ 1)-(1,\ 5,\ 0)=(0,\ 1,\ 1)$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=18$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=27$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HD}}=(0,\ 1,\ 1)+\frac{1}{6}(3,-3,0)-\frac{2}{9}(3,\ 3,\ 3)=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}\right)$$

(3) よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{HD}}| &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{HD}}| \\ &= \frac{1}{6}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

別解 D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h，$\vec{e} = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ とおくと

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h = \frac{3}{2}$$

補足 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ で表す[6]．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3, -3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-9, -9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,\ 1,\ 1)$ より

$$V = \frac{1}{6}|9| = \frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

■

[6] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) $S_1 = a_1 = 1$，$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$S_2 = 2S_1 + 1^2 + 2{\cdot}1 = 5$$
$$S_3 = 2S_2 + 2^2 + 2{\cdot}2 = 18$$

よって　$a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$，　$a_3 = S_3 - S_2 = 18 - 5 = \mathbf{13}$

(2) $(*)$ より　$S_{n+1} = 2S_n + n^2 + 2n$

$$S_n = 2S_{n-1} + (n-1)^2 + 2(n-1)$$

上の 2 式の辺々を引くと　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1}$

(3) 1 次関数 $f(n) = pn + q$ が，すべての n について，次式を満たすとき

$$f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 \quad \cdots ①$$

したがって　$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1$

整理すると　$pn + p + q = (2p + 2)n + 2q + 1$

上式は，n に関する恒等式であるから

$$p = 2p + 2,\quad p + q = 2q + 1 \quad これを解いて \quad p = -2,\quad q = -3$$

ゆえに　$f(n) = -2n - 3 \quad \cdots ②$

(2) の結果と ① の辺々を引くと

$$a_{n+1} - f(n+1) = 2\{a_n - f(n)\}$$

$f(2) = -2{\cdot}2 - 3 = -7$ であるから，$a_2 - f(2) = 4 - (-7) = 11$ より

$$a_n - f(n) = 11{\cdot}2^{n-2} \quad ゆえに \quad a_n = 11{\cdot}2^{n-2} + f(n)$$

これに ② を代入して　$\boldsymbol{a_n = 11{\cdot}2^{n-2} - 2n - 3}$　$(n \geqq 2)$　■

$\boxed{3}$ (1) $f(x)=ax^2+bx+c$，$x_k=\dfrac{k}{n}$，$L_k=\dfrac{1}{n}f(x_k)$ より

$$
\begin{aligned}
L_1&=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left\{a\left(\frac{1}{n}\right)^2+b\left(\frac{1}{n}\right)+c\right\}\\
&=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{n^2}+\frac{b}{n}+c\right),\\
L_n&=\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{n}(a+b+c)
\end{aligned}
$$

したがって　$L_1+L_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{n^2}+\dfrac{b}{n}+a+b+2c\right)$

条件式から　$L_1+L_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{8}{n^2}+10\right)$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a=8}$, $\boldsymbol{b=0}$, $a+b+2c=10$　ゆえに　$\boldsymbol{c=1}$

(2) $kL_k=k\cdot\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\dfrac{k}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\quad\cdots(*)$

(1) の結果より，$f(x)=8x^2+1$ であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kL_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 xf(x)\,dx\\
&=\int_0^1 x(8x^2+1)\,dx=\left[\,2x^4+\frac{x^2}{2}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

(3) $(*)$ に $\dfrac{k}{n}$ を掛けると　$\dfrac{k^2}{n}L_k=\left(\dfrac{k}{n}\right)^2f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2L_k&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}L_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2f\left(\frac{k}{n}\right)\\
&=\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\int_0^1 x^2(8x^2+1)\,dx\\
&=\left[\,\frac{8}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\,\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{29}{15}}
\end{aligned}
$$

■

4 (1) $f(t)=\sqrt{3t^2+t^3}$ とおくと，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x+3)-f(x) = \frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)} \\ &= \frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)} = \frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)} \end{aligned}$$

よって，$-3<x<0$ における $F'(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-2}$

(2) (1) で求めた $F'(x)$ により，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$，$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{x+3} f(t)\,dt \\ &= \int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt + \int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

まず
$$\begin{aligned} \int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt &= \int_0^x \left\{(t+3)^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{t+3}\right\} dt \\ &= \left[\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}} - 2(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x \\ &= \left[\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x \\ &= \frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表から，求める最小値は

$$F(-2) = \frac{2}{5}(-4-4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}$$

■

6.11　2019 年 (理系)

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

$\boxed{2}$ 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b = \dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b = \dfrac{1}{2}(a+3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。

(3) $S = \cos\dfrac{\pi}{a} + \sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく。$a > b$ であるとき，$S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2 \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $a_1 \neq 2$ であるから，第 $m+1$ 項で初めて $a_{m+1}=2$ になると仮定すると，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}+1\cdots(*)$ に $n=m$ を代入すると

$$2=\frac{2}{a_m}+1 \quad すなわち \quad a_m=2$$

第 m 項ですでに $a_m=2$ となり，矛盾を生じる．
よって，すべての自然数 n に対して　$a_n \neq 2$

(2) $b_n=\dfrac{3}{a_n-2}+1\cdots(**)$ より　$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　これと $(*)$ により

$$a_{n+1}+1=\frac{2}{a_n}+2=\frac{2(a_n+1)}{a_n}$$
$$a_{n+1}-2=\frac{2}{a_n}-1=\frac{-(a_n-2)}{a_n}$$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=-2\cdot\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$　すなわち　$b_{n+1}=-2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-2}=\dfrac{1+1}{1-2}=-2$，公比 -2 の等比数列であるから

$$b_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{(-2)^n}$$

補足 $\{a_n\}$ の特性方程式 $x=\dfrac{2}{x}+1$ の解が $2,-1$ であるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n-2}\right\}$ は等比数列である．

(3) $(**)$ より　$b_n-1=\dfrac{3}{a_n-2}$　ゆえに　$a_n-2=\dfrac{3}{b_n-1}$

上式および (2) の結果から　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{(-2)^n-1}+2}$

(4) (3) の結果を $a_n>\dfrac{5}{2}$ に代入すると

$$\frac{3}{(-2)^n-1}+2>\frac{5}{2} \quad ゆえに \quad \frac{3}{(-2)^n-1}>\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

したがって　$0<(-2)^n-1<6$　ゆえに　$1<(-2)^n<7$
これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=2}$

分数漸化式

p，q，$r \neq 0$，s を定数とする漸化式

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad \cdots(*)$$

の一般項について，以下に述べる．
$ps - qr = 0$ のとき，右辺は定数となるので，$ps - qr \neq 0$ とする．
$(*)$ の特性方程式

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \quad \text{すなわち} \quad rx^2 + (s - p)x - q = 0 \quad \cdots(**)$$

の解を α，β とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \cdots(***) \\ a_{n+1} - \beta &= \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)} \end{aligned}$$

i) $\alpha \neq \beta$ のとき，上の 2 式から

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{r\alpha + s}{r\beta + s} \cdot \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$$

したがって　$\dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \dfrac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}\left(\dfrac{r\alpha + s}{r\beta + s}\right)^{n-1}$

上式から，a_n が求まる．

ii) $\alpha = \beta$ のとき，$(*)$ の係数の係数について

$$(s - p)^2 + 4rq = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (p + s)^2 = 4(ps - qr) \quad \cdots ①$$

また，α は $(**)$ の重解であるから

$$\alpha = \frac{p - s}{2r} \quad \text{ゆえに} \quad r\alpha + s = \frac{1}{2}(p + s) \quad \cdots ②$$

①，② により，$(***)$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)\{r(a_n - \alpha) + r\alpha + s\}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(p + s)^2(a_n - \alpha)}{\frac{1}{2}(p + s)\{r(a_n - \alpha) + \frac{1}{2}(p + s)\}} \end{aligned}$$

逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha} = \dfrac{1}{a_n-\alpha} + \dfrac{2r}{p+s}$

このとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ は初項が $\dfrac{1}{a_1-\alpha}$，公差が $\dfrac{2r}{p+s}$ の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n-\alpha} = \frac{1}{a_1-\alpha} + \frac{2r}{p+s}(n-1)$$

これから，a_n が求まる．

例えば，大分大学 2001 年の漸化式[7]

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n+5}$$

の特性方程式 $x = \dfrac{2x}{3x+5}$ の解が $0, -1$ であるから

$$a_{n+1}+1 = \frac{5(a_n+1)}{3a_n+5}$$

したがって $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a_n}{a_n+1}$ ゆえに $\dfrac{a_n}{a_n+1} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

よって $$a_n = \frac{3{\cdot}2^{n-1}}{4{\cdot}5^{n-1}-3{\cdot}2^{n-1}}$$

次に，宮崎大学 2003 年の漸化式[8]

$$a_1 = \frac{q}{p}\ (p>q>0), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

の特性方程式 $x = \dfrac{1}{2-x}$，すなわち $x^2-2x+1=0$ は重解 1 をもつから

$$\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{a_n-1} - 1$$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n-1} = \dfrac{1}{\frac{q}{p}-1} - (n-1)$ よって $a_n = \dfrac{(n-1)p-(n-2)q}{np-(n-1)q}$ ■

---

[7] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2001.pdf $\boxed{1}$
[8] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2003.pdf $\boxed{12}$

2　(1) a に対する b の値は，次のようになる．

a	1	2	3	4	5	6
b	2	1	3	2	4	3

このとき，$a > b$ となるのは，次の 4 通り

a	2	4	5	6
b	1	2	4	3

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{6} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ より　$\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$

$\cos\dfrac{\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} < \sqrt{0.81} = 0.9$　ゆえに　$\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}$，$\sqrt{0.49} < \sqrt{0.5} < \sqrt{0.64}$ より

$$0.7 < \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} < 0.8$$

(2) および上の結果に注意すると，$a < b$ となる $(a,\ b)$ について

$(a,\ b) = (2,\ 1)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\pi = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (4,\ 2)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{2} > 0.7 + 1 = 1.7$

$(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{5} + \sin\dfrac{\pi}{4} < 0.9 + 0.8 = 1.7$

$(a,\ b) = (6,\ 3)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > \sqrt{1.7^2} = 1.7$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{2}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

補足　$a < b$ である事象を X，$S < 1.7$ である事象を Y とすると

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

$(a,\ b) = (1,\ 2)$ のとき　$S = \cos\pi + \sin\dfrac{\pi}{2} = 0 < 1.7$

$(a,\ b) = (3,\ 3)$ のとき　$S = \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1.7$

$P(Y) = \dfrac{4}{6}$ より，$P_X(Y) \neq P(Y)$ であるから，X と Y は独立ではない．■

3 (1) $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2 : y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad ゆえに \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \quad \cdots (*)$$

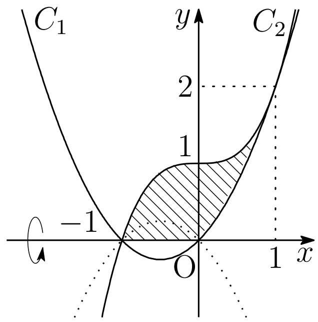
C_1 と C_2 の共有点がちょうど 2 個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は 2 個ある．$a \neq 0$ より，$x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2 - 2a = 0$ は $x = 1$ を解にもつ．したがって

$$1^2 - 2a = 0 \quad ゆえに \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(x-1)^2(x+1) = 0$

これは，条件を満たすから　$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y = x^2 + x$



$$\begin{aligned}
&|x^3 + 1|^2 - |x^2 + x|^2 \\
=&(x^3 + 1)^2 - (x^2 + x)^2 \\
=&(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1) \\
=&(x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geqq 0
\end{aligned}$$

したがって　$|x^3 + 1| \geqq |x^2 + x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{1} (x^3 + 1)^2\, dx - \int_0^1 (x^2 + x)^2\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^6 + 2x^3 + 1)\, dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\, dx \\
&= 2\int_0^1 (x^6 + 1)\, dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\, dx \\
&= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2)\, dx \\
&= \left[\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{263}{210}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \frac{263}{210}\pi}$ ■

4 (1) $y = x\sin 3x + 3x^2$ を微分すると　$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$
C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち　$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a)$　$\cdots$①

これが原点を通るから　$-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 3a < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果を ① に代入することにより　$\ell : y = \pi x$
C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots (*)$$

$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -3\cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leqq 0$$

したがって，$f(x)$ は単調減少であり，

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから，方程式 $(*)$ の解は　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi^2}{3}\right)}$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$x(\pi - \sin 3x - 3x) \geqq 0$ であるから，
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\frac{x}{3}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9}} \end{aligned}$$

■

6.12　2020 年 (理系)

1 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) 自然数 x，y，z が $x^2+5y=2z^2$ を満たすとき，x，y，z はすべて 5 の倍数であることを示せ。

(3) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) $\triangle$OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle$OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，曲線 $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸および直線 $x=t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\pi(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2 a}\leqq V(b)-V(a)\leqq \pi(b^2-a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

(2) (1) の不等式を用いて，$\dfrac{d}{dt}V(t)=2\pi t\dfrac{1}{\cos^2 t}$ を示せ。

(3) $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

4 正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{F}(t,\ 0)$，$\mathrm{F}'(3t,\ 0)$ からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ であるような点 P の軌跡を C とする。直線 $y=x-1$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，C と ℓ の 2 つの共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll} x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & \pmod 5 \\ x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & \pmod 5 \\ x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & \pmod 5 \\ x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & \pmod 5 \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2 + 5y = 2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x',\ z = 5z'$ (x'，z'は整数) を $x^2 + 5y = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z はすべて 5 の倍数である．

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する．
$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より，法 5 について

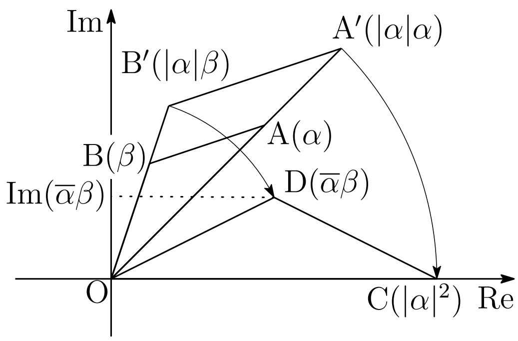
$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x = 5x',\ z = 5z'$ (x'，z'は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod 5$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x, y, z が 5 を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された．　■

2　(1)　2 点 $\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ は，それぞれ 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大，さらに原点を中心に $\arg\overline{\alpha}$ だけ回転 $\left(\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right)$ したものであるから



$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\boldsymbol{|\alpha|^2}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OCD}$ の底辺を $|\alpha|^2$，高さを $|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ とみると　$S_2=\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1) の結果から　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}\cdot\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解　$\theta=\angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\dfrac{\beta}{|\beta|}}{\dfrac{\alpha}{|\alpha|}}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S_1=\dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3)　(2) の結果から，3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z=a+bi\ (1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 3)$ であるから

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\dfrac{b}{a}}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$$

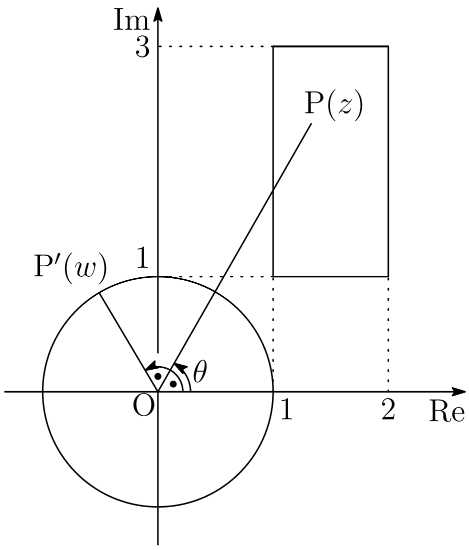
$\dfrac{b}{a}=u$，$\triangle\mathrm{OPQ}=S(u)$ とおくと　$S(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u)=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		$+$	0	$-$	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{10}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから



$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると

$$\begin{aligned} w &= \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1, \\ \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$

点 $\mathrm{P}'(w)$ は，点 $\mathrm{P}(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots (*)$

このとき　　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5}, \quad \sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

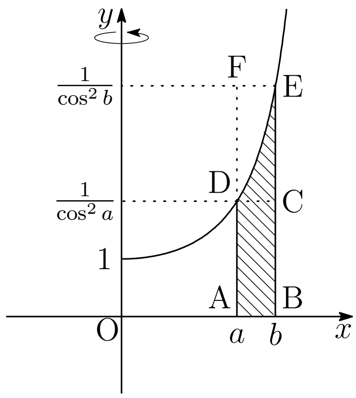
$(*)$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$ ■

3 (1) 曲線 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ が x 軸と区間 $a \leqq x \leqq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^a \frac{dx}{\cos^2 x} = V(b) - V(a)$$

右の図の長方形 ABCD，長方形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると



$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a}$$
$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leqq V(b) - V(a) \leqq V_2$ であるから

$$\pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq V(b) - V(a) \leqq \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\cos^2 b}$$

(2) (1) の結果から，$0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b + a)\frac{1}{\cos^2 a} \leqq \frac{V(b) - V(a)}{b - a} \leqq \pi(b + a)\frac{1}{\cos^2 b} \quad \cdots (*)$$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$(*)$ より

$0 < t < u < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 t} \leqq \frac{V(u) - V(t)}{u - t} \leqq \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 u} \quad \cdots ①$$

$0 < u < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 u} \leqq \frac{V(u) - V(t)}{u - t} \leqq \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ②$$

$\displaystyle\lim_{u \to t} \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t} \cdots ③$，$\displaystyle\lim_{u \to t} \pi(u + t)\frac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t} \cdots ④$

①〜④ から，$\dfrac{d}{dt}V(t) = \displaystyle\lim_{u \to t}\frac{f(u) - f(t)}{u - t}$ は，はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t\frac{1}{\cos^2 t}$$

(3)　(2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'\,dx \\ &= 2\pi\Big[\,x\tan x + \log\cos x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{2\pi\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2\right)} \end{aligned}$$

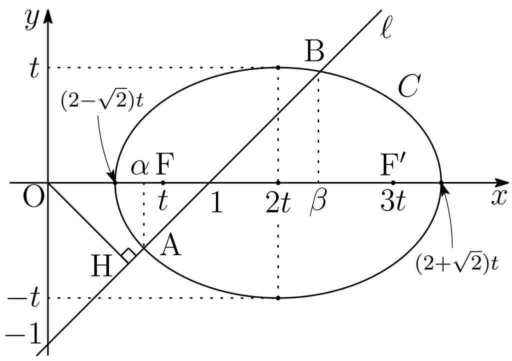
バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

補足　バウムクーヘン型求積法は，教科書では扱っていないが，問題集・参考書では重要公式として扱われている．熊大ではバウムクーヘン型求積法を用いる出題が目立ち，近年だけでも 2014 年 (理系)，2016 年 (理系・医医) で出題されている．2016 年では理系・医医の共通問題として出題され，理系の 5 割，医医の 7 割の受験生がバウムクーヘン型求積法を用いて解答したそうである (熊大入試連絡会)．本題 (3) は多くの受験生が，(1)，(2) の出来と関係なく独立して解答できたものと予想される．勿論，教科書にない公式 (バウムクーヘン型求積法) であるからということで減点されることはなかったそうである．熊大は発展的な解法に対しても寛大である．2018 年の空間のベクトルで四面体の体積をベクトル積 (外積) を用いた解答についても間違っていなかったため，正解として減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会)．2020 年文系でも外積を用いることができる問題が出題された．2020 年文系 4 番の解答にベクトル積 (外積) に関する解説を行っている．■

4 (1) 2点 F$(t,\ 0)$，F$'(3t,\ 0)$ からの距離の和が一定である点 P の描く軌跡 C は楕円で，その中心は $(2t,\ 0)$ である．楕円 C の直軸の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とすると $(a>b>0)$



$$2a=2\sqrt{2}t,\quad \sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{2}\mathrm{FF'}=t$$

これを解いて　$a=\sqrt{2}t$，$b=t$

したがって，楕円 C の方程式は　$\dfrac{(x-2t)^2}{2t^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1$

これと直線 $\ell: y=x-1$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{(x-2t)^2}{2t^2}+\frac{(x-1)^2}{t^2}=1 \quad ゆえに \quad 3x^2-4(t+1)x+2(t^2+1)=0 \quad \cdots(*)$$

C と ℓ が相異なる2つの共有点をもつとき，$(*)$ の係数について

$$D/4=\{-2(t+1)\}^2-3\cdot 2(t^2+1)=-2(t^2-4t+1)>0$$

これを解いて　$\boldsymbol{2-\sqrt{3}<t<2+\sqrt{3}}$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{2(t+1)+\sqrt{D/4}}{3}-\frac{2(t+1)-\sqrt{D/4}}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{D/4}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}$$

C と ℓ の2つの交点 A$(\alpha,\ \alpha-1)$，B$(\beta,\ \beta-1)$ を結ぶ線分の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}$$

原点 O から直線 $\ell: x-y-1=0$ に垂線 OH を引くと

$$\mathrm{OH}=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\triangle$OAB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{-2(t^2-4t+1)}=\frac{1}{3}\sqrt{-2(t-2)^2+6}$$

(1) の結果に注意して，$t=2$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる． ■

医学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	熊本大学 医学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式										
I	2 次関数										
	図形と計量					1					
	データの分析										
	式と証明										
	複素数と方程式										
II	図形と方程式			4						2	
	三角関数							1			
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	4									
	式と曲線	3									
	複素数平面						3	2	3		2
	関数										
III	極限					4		4			
	微分法とその応用				2·3	1	2·4	3			
	積分法		3	3		4	4		4		
	積分法の応用				4		2	3		1·3	1·4
	場合の数と確率		1	1					2	4	
A	整数の性質	1									3
	図形の性質										
	平面上のベクトル						1				
B	空間のベクトル	2	4	2	1	2			1		
	数列					3·4					
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)		2								

数字は問題番号

6.13　2015 年 (医学部)

1 △ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件

$$a+b+c=1, \quad 9ab=1$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。

2 p，q，r を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1, -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q，r を p を用いて表せ。

(3) p'，q'，r' を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1, -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4) (3) における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。

3 a と b を正の実数とする。$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1 = a$，$\mathrm{CX}_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して以下の操作を行う。

> 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a，b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてもよい。

4 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx}|\sin x|\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) 三角形の成立条件により

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b$$

$a+b+c=1$ より，$c=1-a-b$ を上の 3 式に代入すると

$$a+b>1-a-b,\quad b+(1-a-b)>a,\quad (1-a-b)+a>b$$

したがって　$a+b>\dfrac{1}{2},\quad a<\dfrac{1}{2},\quad b<\dfrac{1}{2}$

$9ab=1$ より，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$a+\frac{1}{9a}>\frac{1}{2}\quad\cdots①,\quad a<\frac{1}{2}\quad\cdots②,\quad \frac{1}{9a}<\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

ここで，$a>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により

$$a+\frac{1}{9a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}=\frac{2}{3}$$

ゆえに，$a>0$ について，① は成立する．

③ を解くと　$a>\dfrac{2}{9}$　よって，これと ② から　$\boldsymbol{\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}}$

(2) 余弦定理により　$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$c=1-a-b$，$ab=\dfrac{1}{9}$，$b=\dfrac{1}{9a}$ であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2ab}=\frac{2a+2b-2ab-1}{2ab}\\&=\frac{2a+2b-2\cdot\frac{1}{9}-1}{2\cdot\frac{1}{9}}=9(a+b)-\frac{11}{2}\\&=9\left(a+\frac{1}{9a}\right)-\frac{11}{2}=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}\end{aligned}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}\ \left(\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(a)&=9-\frac{1}{a^2}\\&=\frac{(3a+1)(3a-1)}{a^2}\end{aligned}$$

a	$\left(\frac{2}{9}\right)$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	(1)	↘	$\frac{1}{2}$	↗	(1)

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1}$　■

$\boxed{2}$ (1) A$(1,\ p,\ 0)$，B$(q,\ 1,\ 1)$，C$(-1, -1,\ r)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-q,\ p-1, -1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2,\ p+1, -r),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-q-1, -2,\ r-1), \qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (q+1,\ 2,\ 1-r)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるから，$p=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$ となり，2 点 A，B が一致する．これら 2 点の z 座標は異なるので，不適．

また，$p=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の y 成分に注意すると，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0}$ となり，2 点 C，A が一致する．これら 2 点の x 座標は異なるので，不適．

よって，$p \neq \pm 1$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ であるから，これらの x 成分，y 成分により

$$2{\cdot}2 - (p+1)(q+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q = \frac{3-p}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，これらの y 成分，z 成分により

$$(p-1)(r-1) - (-1)(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r = \frac{p+1}{p-1}}$$

(3) (2) の結果より，A$(1,\ p,\ 0)$，B$\left(\dfrac{3-p}{p+1},\ 1,\ 1\right)$ であるから

$$(p+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2-2p,\ 1-p^2,\ 1+p)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ p',\ 0)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$2 - 2p + p'(1-p^2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{p' = -\frac{2}{p+1}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (q',\ 1,\ 1)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$q'(2-2p) + 1 - p^2 + 1 + p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{q' = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = (-1, -1',\ r')$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直なので

$$-(2-2p) - (1-p^2) + r'(1+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{r' = -\frac{(p+3)(p-1)}{p+1}}$$

(4) (3) の結果から　　$\mathrm{A}'\left(1, -\dfrac{2}{p+1},\ 0\right)$,

$\mathrm{B}'\left(-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)},\ 1,\ 1\right)$,

$\mathrm{C}'\left(-1, -1, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \left(\dfrac{-p^2-p+4}{2(p-1)},\ \dfrac{p+3}{p+1},\ 1\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = \left(-2,\ \dfrac{-p+1}{p+1}, -\dfrac{(p+3)(p-1)}{p+1}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$ であるとき，これらの x 成分，y 成分から

$$\frac{-p^2-p+4}{2(p-1)} \cdot \frac{-p+1}{p+1} - \frac{p+3}{p+1} \cdot (-2) = 0$$

整理すると　　$p^2 + 5p + 8 = 0 \quad \cdots (*)$

この方程式の判別式を D とすると

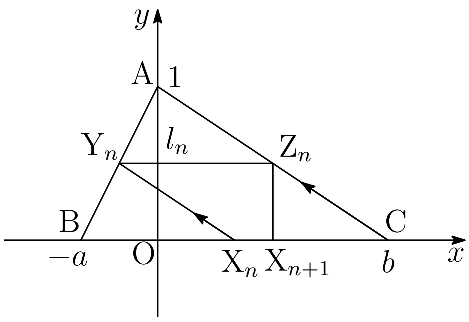
$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -7 < 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもたない．

よって，3 点 A'，B'，C' は一直線上にない．　■

3 (1) 座標平面上に点 A$(0,\ 1)$，B$(-a,\ 0)$，C$(b,\ 0)$，X$_n(x_n,\ 0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をとる．直線 AB の方程式は

$$y=\frac{1}{a}x+1 \quad \cdots ①$$



直線 AC の方程式は

$$y=-\frac{1}{b}x+1 \quad \cdots ②$$

直線 X$_n$Y$_n$ は点 $(x_n,\ 0)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{b}$ の直線であるから

$$y=-\frac{1}{b}(x-x_n) \quad \cdots ③$$

点 Y$_n$ の y 座標 l_n は，①，③ を解いて　$l_n=\dfrac{a+x_n}{a+b}$　$\cdots$ ④

このとき，$x_1=0$ であるから　$\boldsymbol{l_1=\dfrac{a}{a+b}}$

(2) 点 Z_n の y 座標が l_n であるから，その x 座標は，② より

$$l_n=-\frac{x}{b}+1 \quad \text{これを解いて} \quad x=b(1-l_n)$$

これが点 X$_{n+1}$ の x 座標であるから　$x_{n+1}=b(1-l_n)$

したがって，上式および ④ から

$$l_{n+1}=\frac{a+x_{n+1}}{a+b}=\frac{a+b(1-l_n)}{a+b}=\boldsymbol{-\frac{b}{a+b}l_n+1}$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)，(2) の結果から　$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$，$l_1=\dfrac{1}{9}$

この漸化式から　$l_n=\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$

$l_n>\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{9}{17}+\dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$

n は奇数であるから　$(-1)^n\left(\dfrac{8}{9}\right)^n>-\dfrac{1}{16}$　ゆえに　$\left(\dfrac{8}{9}\right)^n<\dfrac{1}{16}$

したがって　$n>\dfrac{4}{\log_2 9-3}$

このとき，$3.169<\log_2 9<3.17$ より

$$23.5\cdots=\frac{4}{3.17-3}<\frac{4}{\log_2 9-3}<\frac{4}{3.169-3}=23.6\cdots$$

よって，求める最小の奇数 n は　$\boldsymbol{n=25}$　■

4 (1) $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$

$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$$

$t=x-n\pi$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$，

x	$n\pi \longrightarrow (n+1)\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\int_0^{\pi}e^{-r(n\pi+t)}|\sin(t+n\pi)|\,dt\\&=e^{-rn\pi}\int_0^{\pi}e^{-rt}\sin t\,dt=e^{-rn\pi}a_1\\&=e^{-rn\pi}\left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(r\sin t+\cos t)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}e^{-nr\pi}}\end{aligned}$$

(2) $a_{n+1}-a_n=e^{-rn\pi}a_1$，$a_1=\dfrac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)&=a_1\sum_{k=1}^{n-1}e^{-rk\pi}\\a_n&=a_1\sum_{k=0}^{n-1}e^{-rk\pi}=a_1\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}\\&=\frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}\times\frac{1-e^{-rn\pi}}{1-e^{-r\pi}}=\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=\boldsymbol{\frac{(1+e^{-r\pi})(1-e^{-rn\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(3) $r>0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{-rn\pi}=0$ であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}}$$

(4) $rf(r)=\dfrac{r(1+e^{-r\pi})}{(1+r^2)(1-e^{-r\pi})}=\dfrac{1+e^{-r\pi}}{(1+r^2)\pi}\times\dfrac{-r\pi}{e^{-r\pi}-1}$ であるから

$$\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{\pi}\times 1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

■

6.14 2016 年 (医学部)

1 △ABC と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}| = 1$，$|\vec{c}| = 2$，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$，$m = -1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき，k の値を求めよ。

2 $x \geqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2) の図形 D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ。

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

4 a，b を実数とし，曲線 $C : y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

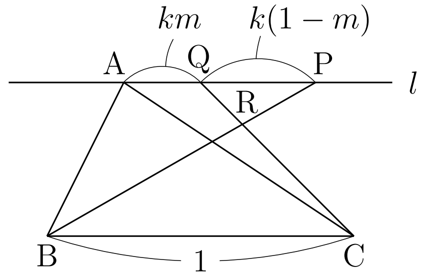
(2) C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。

解答例

1　(1)　BC : AP $= 1 : k$，AP : PQ $= 1 : 1-m$ より　　BC : PQ $= 1 : k(1-m)$

△RBC ∽ △RPQ より　　BR : PR $= 1 : k(1-m)$

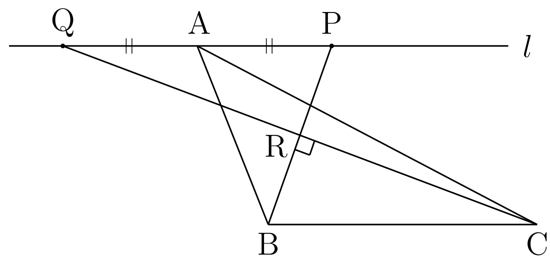


$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}} = k(\vec{c}-\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{k(1-m)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{1+k(1-m)} = \frac{k(1-m)\vec{b}+k(\vec{c}-\vec{b})}{1+k(1-m)} = \boldsymbol{\frac{-km\vec{b}+k\vec{c}}{1+k(1-m)}}$$

(2)　$m=-1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -k(\vec{c}-\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{b} = -(k+1)\vec{b}+k\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{c} = k\vec{b}-(k+1)\vec{c}$$



$\overrightarrow{\mathrm{BR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$ であるから

$$\{-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}\}\cdot\{k\vec{b}-(k+1)\vec{c}\}=0$$
$$-k(k+1)|\vec{b}|^2+\{k^2+(k+1)^2\}\vec{b}\cdot\vec{c}-k(k+1)|\vec{c}|^2=0$$

$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}=1\cdot2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ であるから

$$-k(k+1)\cdot1^2+\{k^2+(k+1)^2\}\cdot\frac{3}{2}-k(k+1)\cdot2^2=0$$

整理すると　$4k^2+4k-3=0$　ゆえに　$(2k-1)(2k+3)=0$

$k>0$ であるから　　$\boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$　■

$\boxed{2}$ (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると

$$f'(x) = (\log x)'\frac{1}{x^2} + \log x\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2} + \log x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ とすると　　$x = \sqrt{e}$

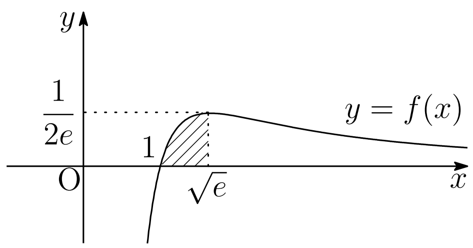
$f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x \geqq 1)$ の増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2e}}$

(2) 求める面積を S とすると，(1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{x}\log x\right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{x}(\log x + 1)\right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}} \end{aligned}$$



(3) 求める立体の体積を V とすると

$$V = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)(\log x)'\,dx = \pi\Big[(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

3 (1) $\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ より

$$\begin{aligned}z_n&=\alpha^n-2\alpha^{n-1}=\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n-2\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{n-1}\\&=2^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)-2^n\{\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta\}\\&=2^n\{\cos n\theta-\cos(n-1)\theta\}+2^ni\{\sin n\theta-\sin(n-1)\theta\}\\&=-2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}+2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\qquad\cdots(*)\end{aligned}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}z_n&=-2^{n+1}\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6}+2^{n+1}i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6}\\&=-2^n\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+2^ni\cos\left(\frac{n+1}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)}\end{aligned}$$

補足 $z_n=-2^n\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi+2^ni\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi=2^ni\left(\cos\dfrac{2n-1}{6}\pi+i\sin\dfrac{2n-1}{6}\pi\right)$

$$\begin{aligned}&=2^n\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi+i\sin\frac{2n-1}{6}\pi\right)\\&=2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

別解 $z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}(\alpha-2)\qquad\cdots①$

$$\begin{aligned}\alpha-2&=2(\cos\theta+i\sin\theta)-2=2(\cos\theta-1+i\sin\theta)\\&=4\left(-\sin^2\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)=4i\sin\frac{\theta}{2}\left(i\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

上式および ① から

$$\begin{aligned}z_n&=2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\}\cdot4\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right)\\&=2^{n+1}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}+i\sin\frac{(2n-1)\theta+\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

これに $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ を代入すると $\quad z_n=2^n\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi+i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right)$

(2) (1) の結果より，$|z_k| = 2^k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 2(2^n - 1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ のとき　$2(2^n - 1) > 500$　ゆえに　$2^n > 251$

これを満たす最小の整数 n は　**8**

(3) $(*)$ より　$z_{1000} = -2^{1001}\sin\dfrac{1999}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2} + 2^{1001}i\cos\dfrac{1999}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$

z_{1000} が実数であるとき，自然数 j を用いて

$$\frac{1999}{2}\theta = \frac{2j-1}{2}\pi \quad ゆえに \quad \theta = \frac{2j-1}{1999}\pi$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$1 \leqq j \leqq 500$

よって，求める θ の個数は　**500** (個)　■

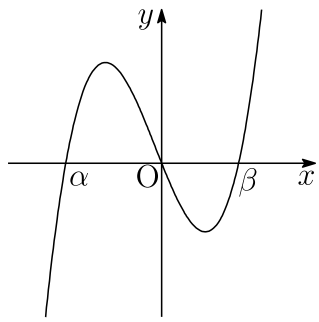
4 (1) $y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6ax + b = 3(x-a)^2 - 3a^2 + b$$

y' の最小値が -3 であるから

$$-3a^2 + b = -3 \quad よって \quad \boldsymbol{b = 3a^2 - 3}$$

(2) $y = x(x^2 - 3ax + b)$ より，このグラフの x 軸の負の部分，正の部分で交わる点の x 座標をそれぞれ α，β とすると $(\alpha < 0 < \beta)$，α，β は 2 次方程式 $x^2 - 3ax + b = 0$ の解であるから，解と係数の関係により



$$\alpha + \beta = 3a, \quad \alpha\beta = b \quad \cdots (*)$$

このとき，$b < 0$ であるから，(1) の結果から

$$3a^2 - 3 < 0 \quad よって \quad \boldsymbol{-1 < a < 1}$$

(3) $(*)$ から，$y = x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x$．図形の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^0 \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx - \int_0^\beta \{x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\}dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_\alpha^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(\alpha+\beta)x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2\right]_0^\beta \\
&= \frac{1}{12}(\alpha^4+\beta^4) - \frac{1}{6}\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)
\end{aligned}
$$

ここで，(1) の結果および $(*)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta &= b = 3a^2 - 3 \\
\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (3a)^2 - 2(3a^2-3) = 3a^2+6 \\
\alpha^4+\beta^4 &= (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\
&= (3a^2+6)^2 - 2(3a^2-3)^2 = -9a^4 + 72a^2 + 18
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{12}(-9a^4+72a^2+18) - \frac{1}{6}(3a^2-3)(3a^2+6) \\
&= -\frac{9}{4}a^4 + \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2} \\
\frac{dS}{da} &= -9a^3 + 9a = -9a(a+1)(a-1)
\end{aligned}
$$

S の増減表は次のようになる．

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小 $\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

$\boldsymbol{a=0}$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ をとる． ■

6.15　2017 年 (医学部)

1 半径 1 の円に外接する △ABC について，$\angle\mathrm{CAB} = 2x$，$\angle\mathrm{ABC} = 2y$，$\angle\mathrm{BCA} = 2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S = \dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\tan y} + \dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x，y を求めよ。

2 $s > 0$，$t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$，$\beta = 2 - 2i$，$\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A，B，C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D を表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) z を s，t を用いて表せ。

(2) α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2 + (\gamma-\alpha)^2 - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2) で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC} = \theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

3 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x > 0)$ とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t > 0)$ における曲線 C の接線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $\ell_k : y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) (2) の直線 ℓ_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 ℓ_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n} に対して，分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{2n}} \quad \cdots (*)$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

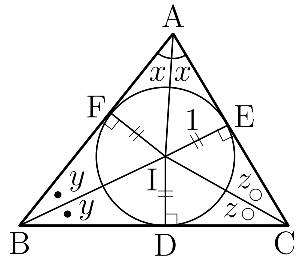
(1) S_2 を求めよ。

(2) S_n を与える順列 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。

解答例

1 (1) 右の図のように △ABC の内心を I とし，この内接円と 3 辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ D，E，F とする．△AEI について



$$\tan x = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{AE}} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AE} = \frac{1}{\tan x}$$

AE = AF であるから

$$\triangle\mathrm{AEI} = \triangle\mathrm{AFI} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot 1 = \frac{1}{2\tan x}$$

同様に　$\triangle\mathrm{BDI} = \triangle\mathrm{BFI} = \dfrac{1}{2\tan y}$，　$\triangle\mathrm{CDI} = \triangle\mathrm{CEI} = \dfrac{1}{2\tan z}$

S はこれらの三角形の面積の和であるから

$$S = 2\left(\frac{1}{2\tan x} + \frac{1}{2\tan y} + \frac{1}{2\tan z}\right) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

(2) $2x + 2y + 2z = \pi$ より，$z = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x + y = \dfrac{\pi}{3} \cdots$ ① であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\cos x\sin y + \sin x\cos y}{\sin x\sin y} + \sqrt{3} = \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} + \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\cos(x-y) - \frac{1}{2}} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

① より，$0 < x, y < \dfrac{\pi}{3}$ であるから

S は $\boldsymbol{x = y = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

補足　$x,\ y,\ z>0$，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める．

$z=\theta$ (θは定数) に対し，S が最小となるときの x，y の値は

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{1}{\tan\theta}\\ &=\frac{\cos x\sin y+\sin x\cos y}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\tan\theta}\\ &=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}+\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

$0\leqq|x-y|<x+y=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ に注意すると，S が最小となるのは，$y=x$，$z=\dfrac{\pi}{2}-2x>0$ のときであるから

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}\qquad\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\frac{2}{\tan x}+\tan 2x=\frac{2}{\tan x}+\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

ここで，$t=\tan x$，$f(t)=\dfrac{2}{t}+\dfrac{2t}{1-t^2}\ \ (0<t<1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\\ f'(t)&=-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{2(3t^2-1)}{t^2(t+1)^2(t-1)^2}\end{aligned}$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	極小 $3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

S が最小となるのは，$\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，すなわち，$x=y=z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

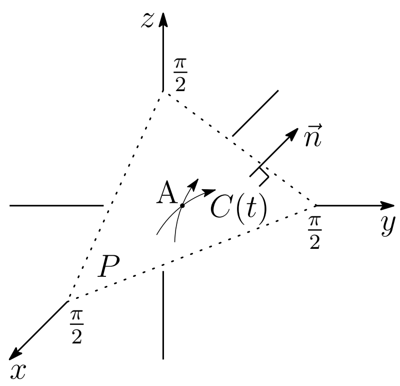
最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．

発展 $x,\ y,\ z > 0$，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

の最小値を求める．

束縛条件を平面



$$P : x+y+z=\frac{\pi}{2}\ (x,\ y,\ z>0)$$

とし，P 上の正則な平面曲線

$$\begin{aligned} C(t) &= (x,\ y,\ z) \\ &= (x(t),\ y(t),\ z(t)) \end{aligned}$$

が $t=t_0$ で極値をとり，その点 A を

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))$$

とする．$C(t)$ は P 上にあるから，$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=0, \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}=0 \quad \cdots(*)$$

上の第 1 式から

$$(1,\ 1,\ 1)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0 \quad \cdots(**)$$

$C(t)$ の接方向は，常に P の法ベクトル $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直である．

$C(t)$ 上の点 $(x,\ y,\ z)$ について，S は t の関数であるから

$$f(t) = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{1}{\sin^2 y}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{dz}{dt}, \\ f''(t) &= \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{2\cos y}{\sin^3 y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{2\cos z}{\sin^3 z}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ &\qquad - \frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\sin^2 y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

$t=t_0$ で S が極値をとるための必要条件は，$f'(t_0)=0$ であるから

$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{\sin^2\beta}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin^2\gamma}\frac{dz}{dt}=0$$
$$\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},-\frac{1}{\sin^2\beta},-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0$$

A を通る $C(t)$ の任意の接方向に対して上式が成り立つので，$(**)$ より

$$\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},-\frac{1}{\sin^2\beta},-\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)//(1,\ 1,\ 1)$$

$0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma\quad\text{すなわち}\quad\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$$

このとき，$C(t)$ は正則であるから　$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dz}{dt}\right)\neq\vec{0}$

また，$(*)$ の第 2 式に注意して

$$\begin{aligned}f''(t_0)&=8\sqrt{3}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-4\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}\right)\\&=8\sqrt{3}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}>0\end{aligned}$$

$f'(t_0)=0$，$f''(t_0)>0$ より，$f(t)$ は極小値 $f(t_0)$ をとる．

よって，点 A$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ で S は極小値，すなわち，最小値 $3\sqrt{3}$ をとる．　■

2 (1) 点 D は直線 AC に関して点 B と反対側にあり，△ACD が正三角形であるから

$$z = \alpha + \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma - \alpha) = -i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{s + (t+1)i\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{s - \sqrt{3}(t+1)}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t - 1}{2}i}$$

(2) $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ より

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right) + 4 = 0$$

2 点 A，B の位置関係に注意してこれを解くと

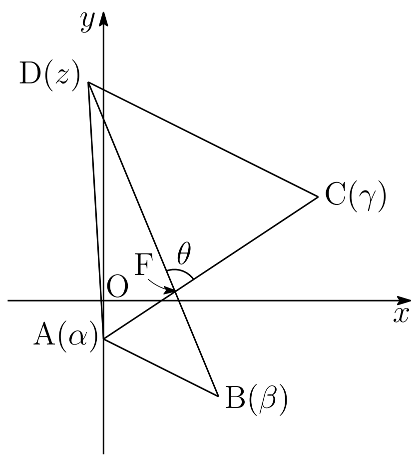
$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 2w$，$\dfrac{z - \alpha}{\gamma - \alpha} = w$ より

$$\gamma - \alpha = 2w(\beta - \alpha) = (1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = 2 + \sqrt{3} + (-1 + 2\sqrt{3})i$$
$$z - \alpha = 2w^2(\beta - \alpha) = (-1 + \sqrt{3}i)(2 - i) = -2 + \sqrt{3} + (1 + 2\sqrt{3})i$$

$\alpha = -i$ より　　$\boldsymbol{\gamma = 2 + \sqrt{3} + (-2 + 2\sqrt{3})i}$
$\boldsymbol{z = -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i}$

(3) (2) の結果から



$$\frac{z - \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{z - \alpha - (\beta - \alpha)}{\gamma - \alpha}$$
$$= \frac{2w^2(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)}{2w(\beta - \alpha)}$$
$$= \frac{2w^2 - 1}{2w} = \frac{1}{2}\left(2w - \frac{1}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i)$$

上の図から，$\theta = \arg\dfrac{z - \beta}{\gamma - \alpha}$ であるから

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{14}}$$

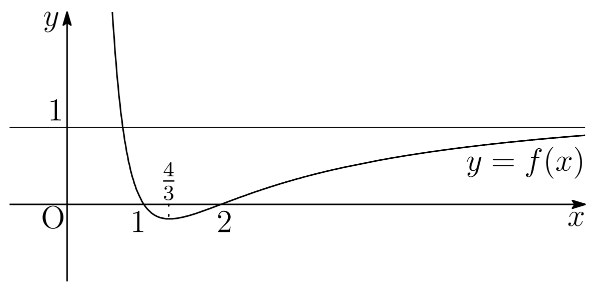
■

3 (1) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x-4}{x^3},$$
$$f''(x)=-\frac{6}{x^3}+\frac{12}{x^4}=-\frac{6(x-2)}{x^4},$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

$f(x)$ の増減表 $(x>0)$ および $y=f(x)$ のグラフは，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	極小 $-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	変曲点 0	$\nearrow$



曲線 $C:y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における接線 ℓ が点 P 以外に共有点をもたない t の値は

$$0<t\leqq\frac{4}{3},\quad t=2$$

よって，求める t の最大値は　　$\boldsymbol{t=2}$

別解 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ より，$f'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$ であるから

$$
\begin{aligned}
&f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}\\
=&1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\left(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\right)(x-t)-\left(1-\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\\
=&-3\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}(x-t)\right\}+2\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}(x-t)\right\}\\
=&-3\left\{-\frac{x-t}{xt}+\frac{1}{t^2}(x-t)\right\}+2\left\{\frac{-(x^2-t^2)}{x^2t^2}+\frac{2}{t^3}(x-t)\right\}\\
=&-3(x-t)\left(-\frac{1}{xt}+\frac{1}{t^2}\right)+2(x-t)\left(-\frac{x+t}{x^2t^2}+\frac{2}{t^3}\right)\\
=&-3(x-t)\cdot\frac{-t+x}{xt^2}+2(x-t)\cdot\frac{-t(x+t)+2x^2}{x^2t^3}\\
=&-3(x-t)^2\cdot\frac{1}{xt^2}+2(x-t)\cdot\frac{(x-t)(2x+t)}{x^2t^3}\\
=&(x-t)^2\left\{-\frac{3}{xt^2}+\frac{2(2x+t)}{x^2t^3}\right\}=\frac{(x-t)^2\{(-3t+4)x+2t\}}{x^2t^3}
\end{aligned}
$$

方程式 $f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}=0$ の解 $x>0$ が 1 個であるのは

$$
\begin{aligned}
-3t+4\geqq 0 \quad &\text{すなわち} \quad 0<t\leqq\frac{4}{3}\text{のとき} \quad x=t\text{ の 1 個}\\
\frac{2t}{3t-4}=t \quad &\text{すなわち} \quad t=2\text{ のとき} \quad x=2\text{ の 1 個}
\end{aligned}
$$

よって，求める t の最大値は　　$\boldsymbol{t=2}$

補足 $y=f(x)$ と $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ は，$x=t$ で 1 次の接触をなす．$f(x)$ は有理関数であるから，$f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}$ は $(x-t)^2$ を因数にもつ．別解では関数 $h_0(x)=1$，$h_1(x)=\dfrac{1}{x}$，$h_2(x)=\dfrac{1}{x^2}$ を考え，

$$h_i(x)-\{h_i'(t)(x-t)+h_i(t)\}$$

は $(x-t)^2$ を因数にもつことに注意し $(i=1,2)$，

$$f(x)=h_0(x)-3h_1(x)+2h_2(x)$$

として計算した．

(2) (1) の結果から，変曲点 $(2,\ 0)$ における接線の傾きは　$f'(2)=\dfrac{1}{4}$
直線 $l_k: y=k(x-2)$ と曲線 C の共有点の個数は，(1) のグラフから

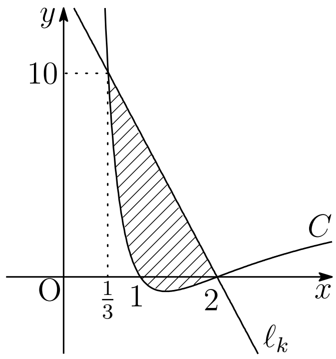
$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{k\leqq 0}\text{ のとき} && \textbf{2 個}\\
&\boldsymbol{0<k<\frac{1}{4}}\text{のとき} && \textbf{3 個}\\
&\boldsymbol{\frac{1}{4}\leqq k}\text{ のとき} && \textbf{1 個}
\end{aligned}
$$

(3) $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 10$

k は 2 点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 10\right)$，$(2,\ 0)$ を結ぶ直線の傾きであるから

$$k = \frac{0-10}{2-\frac{1}{3}} = \mathbf{-6}$$

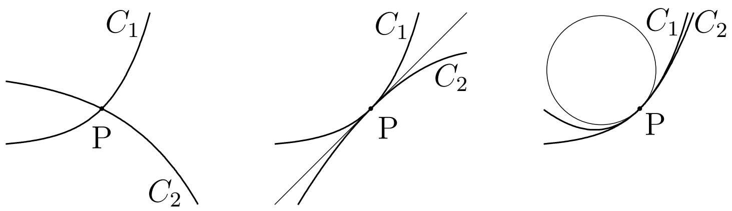
求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$S = \int_{\frac{1}{3}}^{2} \left\{ -6(x-2) - \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \right\} dx$$
$$= \left[-3(x-2)^2 - x + 3\log x + \frac{2}{x} \right]_{\frac{1}{3}}^{2} = \mathbf{\frac{5}{3} + 3\log 6}$$

解説　2 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標を α とする．

1. $f(\alpha) = g(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 0 次の接触をなすという．
2. $f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 1 次の接触をなすといい，P における C_1 および C_2 の接線が一致する．
3. $f(\alpha) = g(\alpha)$，$f'(\alpha) = g'(\alpha)$，$f''(\alpha) = g''(\alpha)$ であるとき，C_1 と C_2 は P で 2 次の接触をなすといい，P における C_1 および C_2 の接触円 (曲率円)[9] が一致する．



0 次の接触　　1 次の接触　　2 次の接触

一般に，$f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ が成り立つとき，C_1 と C_2 は P で n 次の接触をなすという．

準備　ライプニッツの公式 (Leibniz formula)

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

証明は，数学的帰納法により示すことができる．

[9] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf $\boxed{3}$ 解説を参照．

補題 2 つの有理関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=\alpha$ で 1 次の接触をなすとき，有理関数 $\varphi_1(x)$ を用いて

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)\varphi_1(x)$$

これを微分して　$f'(x)-g'(x)=\varphi_1(x)+(x-\alpha)\varphi_1'(x)$

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$ であるから，有理関数 $\varphi_2(x)$ を用いて

$$\varphi_1(x)+(x-\alpha)\varphi_1'(x)=(x-\alpha)\varphi_2(x)$$

ゆえに　$\varphi_1(x)=(x-\alpha)\{\varphi_2(x)-\varphi_1'(x)\}$

したがって　$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\{\varphi_2(x)-\varphi_1'(x)\}$

よって，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ を因数にもつ．

定理

2 つの有理関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=\alpha$ で n 次の接触をなすとき，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^{n+1}$ を因数にもつ．

証明 $n=0$ のとき，明らか．$n=1$ のとき，補題により示された．

n 次の接触をなすとき，$0\leqq k\leqq n$ について，k 次の接触をなす．

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，有理関数 $\varphi(x)$ を用いて

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^{k+1}\varphi(x)$$

と表せる．ライプニッツの公式を用いてこれを $k+1$ 回微分すると

$$f^{(k+1)}(x)-g^{(k+1)}(x)=(k+1)!\varphi(x)+\sum_{j=1}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_j\{(x-\alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}\varphi^{(j)}(x)$$

$f^{(k+1)}(\alpha)=g^{(k+1)}(\alpha)$ であるから，上式は $x-\alpha$ を因数にもつ．

また，$1\leqq j\leqq k+1$ のとき $\{(x-\alpha)^{k+1}\}^{(k+1-j)}$ は $x-\alpha$ を因数にもつので，$\varphi(x)$ は有理関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\varphi(x)=(x-\alpha)\phi(x)$$

したがって，$n=k+1$ のとき，次式が成り立つ．

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^{k+2}\phi(x)$$

このとき，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^{k+2}$ を因数にもつ．

よって，数学的帰納法により，定理は示された．■

4 (1) S_2 は分母が 1 と 2 の組合せについて調べればよいので

$$\frac{4}{1}+\frac{3}{2}=\frac{11}{2},\quad \frac{3}{1}+\frac{4}{2}=5 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S_2=\frac{11}{2}}$$

(2) 1 から $2n$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\dfrac{2n}{1}$

2 から $2n-1$ までの自然数を分母と分子にもつ分数で最大のものは $\dfrac{2n-1}{2}$

順次この法則によりできる分数の和

$$\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

が S_n である．この法則に従わない部分和

$$\frac{c}{a}+\frac{d}{b} \quad (a<b<c<d)$$

をもつ S_n が存在すると仮定すると

$$\left(\frac{d}{a}+\frac{c}{b}\right)-\left(\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\right)=\frac{(b-a)(d-c)}{ab}>0$$

すなわち $\quad \dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{b}<\dfrac{d}{a}+\dfrac{c}{b}$

これは，S_n であることに反する．よって

$$S_n=\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$

となり，求める順列の例の 1 つは

$$\boldsymbol{a_1=2n,\ a_2=2n-1,\ \cdots,\ a_n=n+1,}$$
$$\boldsymbol{a_{n+1}=1,\ a_{n+2}=2,\ \cdots,\ a_{2n}=n}$$

(3) (2) の結果から，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1-k}{k}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n\log n}&=\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1-k}{k}\\&=\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{k}-1\right)\\&=\frac{1}{\log n}\left(-1+\frac{2n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\quad\cdots ①\end{aligned}$$

ここで，自然数 k について，$\dfrac{1}{k} > \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) > \log n$$

次に，2 以上の自然数 k について，$\dfrac{1}{k} < \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dx}{x}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} = 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{x} = \log n + 1$$

上の 2 式から　$\displaystyle \log n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + 1 \quad \cdots ②$

①，② から

$$\frac{1}{\log n}\left(-1 + \frac{2n+1}{n}\log n\right) < \frac{S_n}{n\log n} < \frac{1}{\log n}\left\{-1 + \frac{2n+1}{n}(\log n + 1)\right\}$$
$$-\frac{1}{\log n} + 2 + \frac{1}{n} < \frac{S_n}{n\log n} < -\frac{1}{\log n} + \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n} = \mathbf{2}$$

補足　② はオイラーの定数 γ に関係している．

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) \fallingdotseq 0.5772156649\cdots$$

は無理数であるかどうかさえ分かっていない．　■

6.16　2018年(医学部)

1 t を実数とする。空間の4点 A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C(t, $2t$, $t-1$)，D(1, 6, 1) について，以下の問いに答えよ。

(1) △ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A，B，C，D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) ∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

2 m，n を整数とする。xy 平面上の4点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,n)}$ と表す。初めに1辺の長さが1のさいころが $R_{(1,1)}$ に1の目を上に置かれている。1枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は7であるとする。

(1) 硬貨を5回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を2回投げたあとにさいころの6の目が上にあるという条件の下で，硬貨を5回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を5回投げたとき，初めから5回目の移動までにさいころの6通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

3 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ をみたす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w = \dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

4 関数 $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ $(x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x) = \displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C(t, $2t$, $t-1$) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

(i) $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$3(t-1)-3(2t-5)+0(t-1)=0 \quad これを解いて \quad t=4$$

(ii) $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$3(t-4)-3(2t-2)+0(t-1)=0 \quad これを解いて \quad t=-2$$

(iii) $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ であるから

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0$$

整理すると　$2t^2-7t+5=0$　これを解いて　$t=1,\ \dfrac{5}{2}$

(i)〜(iii) から　$\boldsymbol{t=4,-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2}}$

(2) $\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと　$\vec{b}=(1,-1,\ 0)$，$\vec{d}=(0,\ 1,\ 1)$

A，B，C，D が同一平面上にあるとき，定数 x，y を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=x\vec{b}+y\vec{d}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}(t-1,\ 2t-5,\ t-1)&=x(1,-1,\ 0)+y(0,\ 1,\ 1)\\&=(x,-x+y,\ y)\end{aligned}$$

したがって
$$(*)\begin{cases}t-1=x\\2t-5=-x+y\\t-1=y\end{cases}$$

$(*)$ の第 1，第 3 式から　$x=y$　これを第 2 式に代入すると

$$2t-5=0 \quad よって \quad \boldsymbol{t=\frac{5}{2}}$$

別解 $\vec{b}$，$\vec{d}$ に垂直なベクトルの 1 つは　$\vec{n}=(1,\ 1,-1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$1(t-1)+1(2t-5)-1(t-1)=0 \quad これを解いて \quad t=\frac{5}{2}$$

(3) (1)(i) より，$t=4$ であるから　C$(4,\ 8,\ 3)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ に垂直な単位ベクトルの 1 つを

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,-2)$$

とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ であるから，D から平面 ABC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\vec{e}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

よって，求める四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot h&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|h\\&=\frac{1}{6}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

補足　2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**と言い，$\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}$ で表す [10]．本題において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 3,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-9,-9,\ 18)$$

四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$V=\frac{1}{6}|9|=\frac{3}{2}$$

ベクトル積 (外積) は高校数学の範囲外であるが，検算として利用できる．

■

[10] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf (p.10 を参照)

2 (1) さいころが $R_{(m,n)}$ から $R_{(m+i,n+j)}$ の位置に移る確率を $P_{(i,j)}$ とすると

$$P_{(i,j)} = {}_{i+j}\mathrm{C}_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \frac{{}_{i+j}\mathrm{C}_i}{2^{i+j}} \quad \cdots (*)$$

である (i, j は 0 以上の整数).

$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,4)}$ に移る確率であるから，$(*)$ に $i=2$，$j=3$ を代入して

$$P_{(2,3)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) 事象 A，B を，次のように定める

A : 硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にある.

B : 硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,4)}$ の位置にある.

$P(A)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置に移る確率であるから，$(*)$ により

$$P(A) = P_{(2,0)} + P_{(0,2)} = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$P(A\cap B)$ は，$R_{(1,1)}$ から $R_{(3,1)}$ または $R_{(1,3)}$ の位置を通って，$R_{(3,4)}$ の位置に移る確率であるから

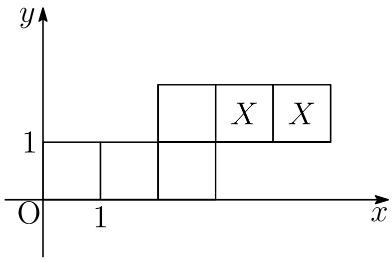
$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P_{(2,0)}P_{(0,3)} + P_{(0,2)}P_{(2,1)} \\ &= \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} + \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率は

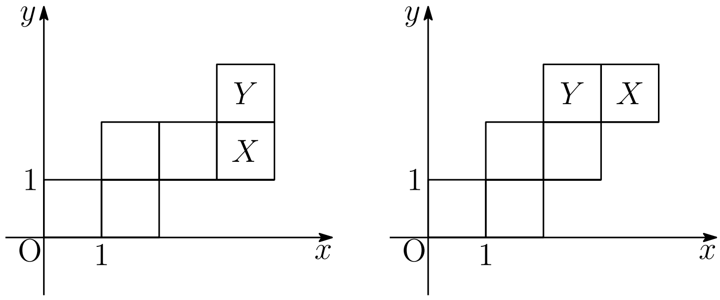
$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(3) 1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る事象をそれぞれ X，Y とする．5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて出るには，最初の 3 回目までに X と Y が少なくとも 1 回ずつ起こる．最初の 3 回で 1 回目が X であるのは，次の (i)〜(iii) である．

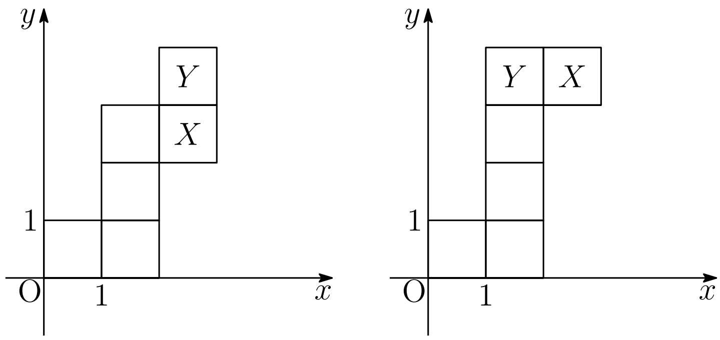
(i) 最初の 3 回が X, X, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, X の順に起こる．



(ii) 最初の 3 回が X, Y, X の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, Y または Y, X の順に起こる．



(iii) 最初の 3 回が X, Y, Y の順に起こるとき，さいころの展開図により，4, 5 回目は X, Y または Y, X の順に起こる．



(i)〜(iii) より，1 回目が X であるのは，5 通りである．また，1 回目が Y であるのは，(i)〜(iii) の展開図を直線 $y = x$ に関して対称移動したものであるから，5 通りである．このとき，X，Y が起こる確率はともに $\dfrac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$(5+5)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$ ■

3 (1) $z = x + yi$ とおき (x, y は実数)，これを $|z+i| - |z-i| = 1$ に代入すると

$$|x + (y+1)i| - |x + (y-1)i| = 1$$
$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$

両辺を 2 乗すると

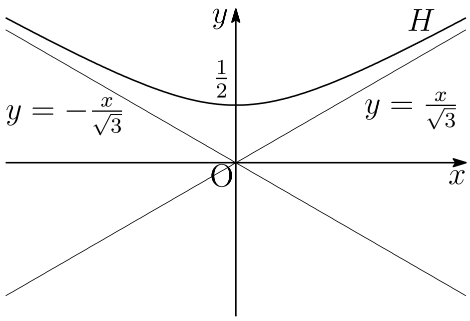
$$x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 + 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1$$
$$4y - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

上式から $4y - 1 \geqq 0$ であり，再び両辺を 2 乗すると

$$(4y-1)^2 = 4\{x^2 + (y-1)^2\}$$
$$-4x^2 + 12y^2 = 3$$

ゆえに　$$-\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \left(y \geqq \frac{1}{2}\right)$$

したがって，H の概形は次のようになる．



上の概形から，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{5}{6}\pi}$

補足 与えられた方程式から，H は双曲線で，焦点は y 軸上の 2 点 $(0, \pm 1)$ で，2 頂点が $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$ であるから，離心率 $e = 2$ より，$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと [11]

$$b = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

なお，楕円 (ellipse)，放物線 (parabola)，双曲線 (hyperbola)．

[11] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf (p.11 を参照)

(2) (1) で求めた概形から　$|z| \geqq \dfrac{1}{2}$,　　$r_2 = \dfrac{1}{|z|}$ であるから　$\mathbf{0 < r_2 \leqq 2}$

また，$\theta_2 = -\arg z$ であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して

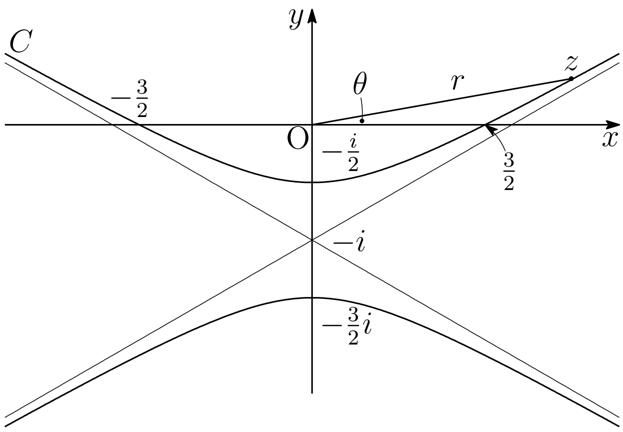
$$-\frac{5}{6}\pi + 2\pi < \theta_2 < -\frac{\pi}{6} + 2\pi \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi < \theta_2 < \frac{11}{6}\pi}$$

解説 2 次曲線の極方程式の極は 2 次曲線の焦点であるから，2 次曲線の焦点を複素数平面の原点とする出題もある [12]．

例えば，$|z+2i| - |z| = \pm 1$ に対し，$r = |z|$，$\theta = \arg z$ とおくと，前ページで調べたように，離心率 $e = 2$ および点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$C : r = \frac{\frac{3}{2}}{1 - 2\sin\theta} \qquad \cdots (*)$$

となる．C を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると，$1 - 2\sin\theta = 0$，すなわち，$\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ のとき，漸近線と平行となり，これに対応する C 上の点は存在しない．なお，$\theta = \frac{\pi}{6} - 0$ のとき，C は第 1 象限の無限遠点あり，$\theta = \frac{\pi}{6} + 0$ のとき，C は第 3 象限の無限遠点にある．また，$\theta = \frac{5}{6}\pi - 0$ のとき，C は第 4 象限の無限遠点にあり，$\theta = \frac{5}{6}\pi + 0$ のとき，C は第 2 象限の無限遠点にある．



$(*)$ から，C を複素数平面上の点 z を

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{3(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1 - 2\sin\theta)}$$

と表すことができる． ■

[12] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_kou_2002.pdf $\boxed{3}$

4 (1) $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ より $\quad f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{2\sqrt{3x^2+x^3}}$

したがって $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

増減表から，求める極大値は $\quad \boldsymbol{f(-2)=2}$

(2) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ より $(-3 \leqq x \leqq 0)$

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x+3)-f(x)=\frac{\{f(x+3)\}^2-\{f(x)\}^2}{f(x+3)+f(x)}\\&=\frac{3(x+3)^2+(x+3)^3-(3x^2+x^3)}{f(x+3)+f(x)}=\frac{9(x+3)(x+2)}{f(x+3)+f(x)}\end{aligned}$$

$f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ であるから，$F(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$-3 \leqq x \leqq 0$ に注意して，$F(x)$ を求める．

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+3} f(t)\,dt\\&=\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt \quad \cdots ①\end{aligned}$$

まず
$$\begin{aligned}\int_0^x t\sqrt{t+3}\,dt&=\int_0^x\left\{(t+3)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{t+3}\right\}dt\\&=\left[\,\frac{2}{5}(t+3)^{\frac{5}{2}}-2(t+3)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^x\\&=\left[\,\frac{2}{5}(t-2)(t+3)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^x\\&=\frac{2}{5}(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{12}{5}\sqrt{3} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$F(x) = \frac{2}{5}\{(x-2)(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+1)(x+6)^{\frac{3}{2}}\} + \frac{24}{5}\sqrt{3}$$

増減表の x の値から

$$\begin{aligned}
F(-3) &= \frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}\sqrt{3} \\
F(-2) &= \frac{2}{5}(-4 - 4^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{24}{5}(\sqrt{3}-1) \\
F(0) &= \frac{2}{5}(-2\cdot 3^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}) + \frac{24}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})
\end{aligned}$$

よって　**最大値** $\boldsymbol{F(0) = \frac{12}{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})}$，

最小値 $\boldsymbol{F(-2) = \frac{24}{5}(\sqrt{3}-1)}$ ■

6.17　2019 年 (医学部)

1 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

2 座標平面上の直線 ℓ を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1, -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) △APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

3 座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2 \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

解答例

$\boxed{1}$ (1) $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ と $C_2 : y = x^3 + 1$ から y を消去すると

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(x^2 - 2a) = 0 \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 の共有点がちょうど2個のとき，方程式 $(*)$ の実数解は2個ある．$a \neq 0$ より，$x^2 - 2a = 0$ は重解をもたないから，方程式 $x^2 - 2a = 0$ は $x = 1$ を解にもつ．したがって

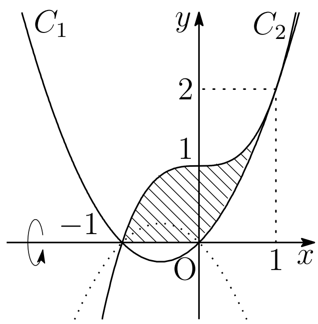
$$1^2 - 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると　$(x-1)^2(x+1) = 0$

これは，条件を満たすから　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$C_1 : y = x^2 + x$

$$\begin{aligned} & |x^3 + 1|^2 - |x^2 + x|^2 \\ =& (x^3 + 1)^2 - (x^2 + x)^2 \\ =& (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 1) \\ =& (x+1)^2(x-1)^2(x^2+1) \geqq 0 \end{aligned}$$



したがって　$|x^3 + 1| \geqq |x^2 + x|$

求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させたものであるから，その体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{1} (x^3 + 1)^2\, dx - \int_0^1 (x^2 + x)^2\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^6 + 2x^3 + 1)\, dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\, dx \\ &= 2\int_0^1 (x^6 + 1)\, dx - \int_0^1 (x^4 + 2x^3 + x^2)\, dx \\ &= \int_0^1 (2x^6 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 2)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{263}{210} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{263}{210}\pi}$　■

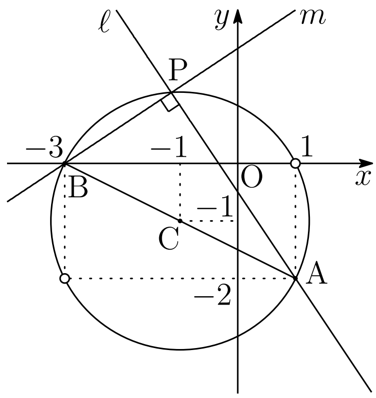
2　(1) $\ell: y = ax - a - 2$ は $y + 2 = a(x - 1)$ より，点 A$(1, -2)$ を通り，傾き a の直線．

$m: y = bx + 3b$ は $y = b(x + 3)$ より，点 B$(-3,\ 0)$ を通り，傾き b の直線．

ℓ と m は直交するから，ℓ と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円周上を動く．

線分 AB の中点を C とすると　C$(-1, -1)$

$$\mathrm{CA} = \sqrt{(1 + 1)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{5}$$



求める点 P の軌跡は，2 直線 ℓ，m が x 軸と垂直ではないことに注意して

$$\boldsymbol{(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5,\quad (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (-3, -2)}$$

(2) $\ell \perp m$ より，$ab = -1$ であるから

$$\ell: ax - y - a - 2 = 0,\quad m: x + ay + 3 = 0$$

線分 AP の長さは，点 A$(1, -2)$ と直線 m の距離であるから

$$\mathrm{AP} = \frac{|1 + a\cdot(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \boldsymbol{\frac{2|a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}}$$

線分 BP の長さは，点 B$(-3,\ 0)$ と直線 ℓ の距離であるから

$$\mathrm{BP} = \frac{|a\cdot(-3) + 0 - a - 2|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \boldsymbol{\frac{2|2a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}}$$

(3) △APB の面積が最大となるとき，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，AP = BP より

$$\frac{2|a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2|2a + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}\quad \text{ゆえに}\quad |a - 2| = |2a + 1|$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, -3}$

別解　直線 AB の傾きは，その偏角を θ とすると　$\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$

△APB の面積が最大となるとき，ℓ の傾き a は

$$a = \tan(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\tan\theta \pm \tan 45^\circ}{1 \mp \tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} \pm 1}{1 \pm \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 2}{2 \pm 1} = \frac{1}{3}, -3$$

■

3 (1) $y = x\sin 3x + 3x^2$ を微分すると　$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$

C 上の x 座標が a である点における接線の方程式は

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

すなわち　　$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(1 + \cos 3a)$　$\cdots$①

これが原点を通るから　$-3a^2(1 + \cos 3a) = 0$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < 3a < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3a = \pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{\pi}{3}}$$

(2) (1) の結果を ① に代入することにより　　$\ell : y = \pi x$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x(\pi - \sin 3x - 3x) = 0 \quad \cdots(*)$$

$f(x) = \pi - \sin 3x - 3x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$f'(x) = -3\cos 3x - 3 = -3(1 + \cos 3x) \leqq 0$$

したがって，$f(x)$ は単調減少であり，

$$f(0) = \pi > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

であるから，方程式 $(*)$ の解は　　$x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，求める共有点の座標は　　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{3}\right)}$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$x(\pi - \sin 3x - 3x) \geqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\pi - \sin 3x - 3x)\,dx \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\,dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left[\frac{x}{3}\cos 3x - \frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{54} - \frac{\pi}{9}} \end{aligned}$$

■

4 (1) $2n$ 個の球から n 個取り出すとき，n 個の赤球から k 個取り出し，n 個の白球から $n-k$ 個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2) 取り出した n 個の球のうち赤球が k 個取り出されるとき，勝つ確率は $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であるから，(1) の結果により

$$\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{k}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_k\right)^2 \quad \cdots(*)$$

がゲームに勝つ確率である．ここで

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\
{}_{2n}\mathrm{C}_n &= \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1)}{n^2}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}
\end{aligned}$$

上の 2 式をそれぞれ変形すると

$$\frac{k}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}, \qquad \frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

これらを $(*)$ に代入することにより

$$(*) = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2 = \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$

(3) $n \geqq 2$ および $k \geqq 1$ の整数について，

$$(1+x)^{n-1}(1+x)^{n-1} = (1+x)^{2n-2}$$

上式の両辺の x^{n-1} の係数を比較することにより

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k} = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

すなわち　$$\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2 = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

これと (2) の結果により，ゲームに勝つ確率は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} &= \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{1}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)^2 \\
&= \frac{n}{2(2n-1)}\cdot\frac{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} = \frac{n}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

■

6.18　2020 年 (医学部)

1 xy 平面上において，媒介変数 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 - \cos 3t \end{cases}$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$) を考える．3 点 O，A，B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) △OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a，b に対し，複素数 z を $z = a + bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする △OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0，1，4 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しないことを示せ。

4 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式

$$L-\frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を示せ。

解答例

1 (1) $x = f(t) = \sin t$，$y = g(t) = 1 - \cos 3t$ とおくと $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$

$$f'(t) = \cos t, \qquad g'(t) = 3\sin 3t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

上の増減表から　点 P は　$\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$　すなわち　$\boldsymbol{(1,\ 1)}$

点 Q は　$\left(f\left(\dfrac{\pi}{3}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$　すなわち　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 2\right)}$

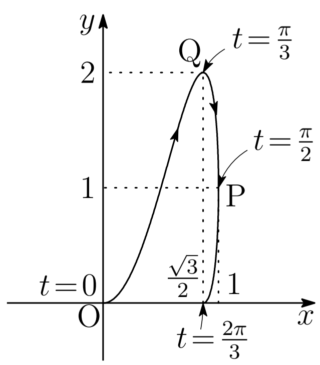
(2) C の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，すなわち，点 $\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(\frac{\pi}{6})}{f'(\frac{\pi}{6})} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

求める接線は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通り，傾き $2\sqrt{3}$ の直線の方程式であるから

$$y - 1 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1}$$

(3) 求める面積を S とすると，(1) の結果に注意して

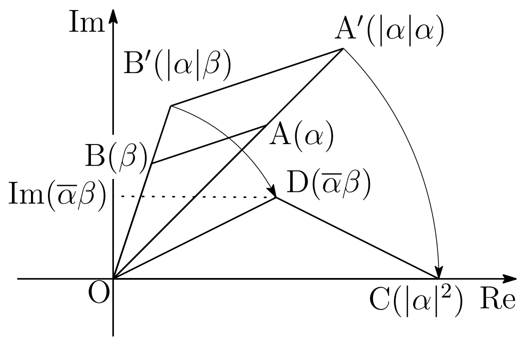


$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx - \int_{f(\frac{2}{3}\pi)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx \\
&= \int_{f(0)}^{f(\frac{2}{3}\pi)} y\,dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(t)f'(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 3t)\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos t - \frac{1}{2}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt \\
&= \left[\sin t - \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \boldsymbol{\frac{9}{16}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 2 点 C$(|\alpha|^2)$，D$(\overline{\alpha}\beta)$ は，それぞれ 2 点 A(α)，B(β) を原点を中心に $|\alpha|$ 倍の相似拡大，さらに原点を中心に $\arg\overline{\alpha}$ だけ回転 $\left(\times\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\right)$ したものであるから

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{OCD}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\boldsymbol{|\alpha|^2}$$



(2) △OCD の底辺を $|\alpha|^2$，高さを $|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$ とみると　$S_2=\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(1) の結果から　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}S_2$　よって　$S_1=\dfrac{1}{|\alpha|^2}\cdot\dfrac{1}{2}|\alpha|^2|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

別解　$\theta=\angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\dfrac{\beta}{|\beta|}}{\dfrac{\alpha}{|\alpha|}}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}}=\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S_1=\dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) (2) の結果から，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|$$

$z=a+bi\ (1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 3)$ であるから

$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i,$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\dfrac{b}{a}}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$$

$\dfrac{b}{a}=u$，$\triangle\mathrm{OPQ}=S(u)$ とおくと　$S(u)=\dfrac{u}{1+u^2}$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 3\right)$

ゆえに　$S'(u)=\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$

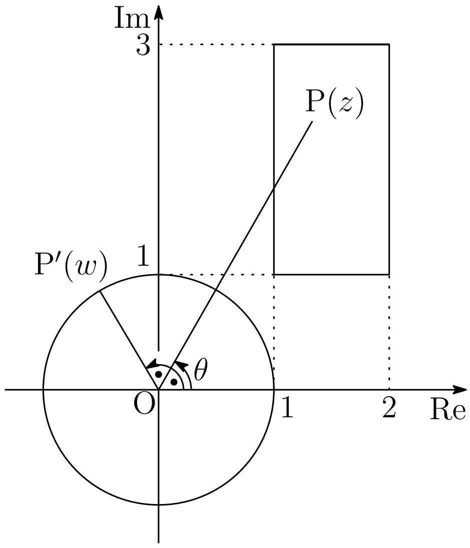
u	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(u)$		$+$	0	$-$	
$S(u)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{10}$

よって　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

別解 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)$ であるから

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\right|$$

$\theta = \arg(z)$，$w = \dfrac{z}{\overline{z}}$ とすると



$$w = \left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned}\arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)\\ &= \arg(z) - \arg(\overline{z})\\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta\end{aligned}$$

点 $\mathrm{P}'(w)$ は，点 $\mathrm{P}(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で，その偏角について

$$\arg(w) = 2\arg(z)$$

が成立する．$z = a + bi$ $(1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 3)$ より，$\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ とすると，上の図から

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{2},\quad \tan\theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

したがって　　$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad \cdots(*)$

このとき　　$\sin 2\theta_1 = \dfrac{2\tan\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \dfrac{4}{5},\quad \sin 2\theta_2 = \dfrac{2\tan\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \dfrac{3}{5}$

$(*)$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$\theta = \theta_2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$ ■

3 (1) 法 5 について

$$
\begin{array}{lll}
x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & \pmod 5 \\
x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & \pmod 5 \\
x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & \pmod 5 \\
x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & \pmod 5 \\
x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & \pmod 5
\end{array}
$$

よって，題意は成立する．

(2) $x^2+5y^2=2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x=5x'$，$z=5z'$ (x'，z'は整数) を $x^2+5y^2=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y^2=2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=5(2z'^2-x'^2)$$

$y^2 \equiv 0$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$y=5y'$ (y'は整数) とおける．
このとき，$x=5x'$，$y=5y'$，$z=5z'$ より，$x'<x$，$y'<y$，$z'<z$
$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組が存在するとき，

$$(x',\ y',\ z') \quad (x'<x,\ y'<y,\ z'<z)$$

が存在し，無限に小さい数の組が存在することになり (無限降下)，このことは自然数が下に有限であることに反する．よって，$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z の組は存在しない．

別解 $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x，y，z が存在し，これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する．
$x^2+5y^2=2z^2$ より，法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod 5$$

(1) の結果から，$(*)$ の左辺は法 5 について，0，1，4 のいずれかに等しい．
一方，右辺は 0，2，$8 \equiv 3 \pmod 5$ のいずれかに等しい．
したがって，$x^2 \equiv 0,\ 2z^2 \equiv 0 \pmod 5$，すなわち，$x \equiv z \equiv 0 \pmod 5$
$x=5x'$，$z=5z'$ (x'，z'は整数) を $x^2+5y^2=2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2+5y^2=2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2=5(2z'^2-x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod 5$ より，$y \equiv 0 \pmod 5$ であるから，x，y，z が 5 を共通因数にもつことになり，仮定に反する．よって，題意は証明された． ■

$\boxed{4}$ (1) $1 < 2^y < \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ より　$0 < y < n\log_2\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

$U = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ とし，U の部分集合 A，B を

$$A = \left\{k \,\middle|\, n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \text{は整数である},\ k \in U\right\}$$
$$B = \left\{k \,\middle|\, n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \text{は整数でない},\ k \in U\right\}$$

とすると ([a] は a を超えない最大の整数)

$$P(n) = \sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} + \sum_{k\in B}\left[n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

したがって

$$\begin{aligned} P(n) &< \sum_{k\in A} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \sum_{k\in B} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right), \\ P(n) &\geqq \sum_{k\in A}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} + \sum_{k\in B}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \cdots ① \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \end{aligned}$$

が成立する (① は $B = \phi$ のとき等号)．上の 2 式から

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{n-1}{n^2} \leqq \frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots (*)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2} = 0,$$

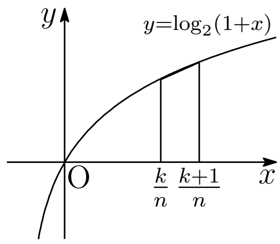
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx \\ &= \frac{1}{\log 2}\Big[\,(1+x)\log(1+x) - x\,\Big]_0^1 = 2 - \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

$(*)$ にはさみうちの原理を適用すると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2} = \mathbf{2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{log\,2}}$

(3) (1) の結果から　$P(n) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots ②$$

(2) の結果および $y=\log_2(1+x)$ が上に凸であるから



$$L = \int_0^1 \log_2(1+x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \log_2(1+x)\,dx$$
$$> \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\}$$

上式および ② から

$$L-\frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\right\} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\log_2\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2n}(\log_2 2 - \log_2 1) = \frac{1}{2n}$$

解説　$a \leqq x \leqq b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x) < 0$ であるとき

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

とおくと，$g(a)=g(b)=0$ であるから，平均値の定理 (ロルの定理) により

$$g'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

を満たす c が存在する．このとき，$g''(x)=f''(x)<0$ であるから，$g'(x)$ は単調減少により，c は唯一存在する．したがって，$g(x)$ の増減表は

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	極大	↘	0

$a \leqq x \leqq b$ において，$g(x) \geqq 0$ が成立する．なお，等号は，$x=a,\ b$ のときに限る．

よって，$a<x<b$ において，関数 $f(x)$ が $f''(x)<0$ のとき

$$f(x) \geqq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

が成立する．なお，等号は，$x=a,\ b$ のときに限る．

$f(x)=\log_2(1+x)$ とおくと，$f''(x)<0$ より，$\dfrac{k}{n}<x<\dfrac{k+1}{n}$ において

$$f(x)>f\left(\frac{k}{n}\right)+n\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

これから

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \\
&> \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \\
&\qquad + n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\left[\ \frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\ \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

② より　$L>\dfrac{P(n)}{n^2}+\dfrac{1}{2n}$　よって　$L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ ■

第 7 章　大分大学

出題分野

(工学部　経済学部　教育学部　医学部)

工学部 出題分野 (2011-2020) 100 分

◀	大分大学 工学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明							2			
	複素数と方程式										
	図形と方程式	2	2			1					
	三角関数								2		
	指数関数と対数関数								1	1	
	微分法と積分法	1			1	3	2		2		
III	式と曲線					4					
	複素数平面										
	関数										
	極限										
	微分法とその応用			4			4	4			
	積分法	4			3						
	積分法の応用		4	4			4		4	3	4
A	場合の数と確率			1	4		3				
	整数の性質										
	図形の性質		3	2						2	1
B	平面上のベクトル	3		3		2	1				2
	空間のベクトル				2			1	3		
	数列		1					3		4	3
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)					数字は問題番号					

経済学部 出題分野 (2011-2020) 80 分

◀	大分大学 経済学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量								5		
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式		6			1					
	三角関数								2		
	指数関数と対数関数				5				1	1	
	微分法と積分法	1	5	6	1	3	2	5	2	5	5
A	場合の数と確率			1	4		3				
	整数の性質										
	図形の性質	2	3	2				6		2	1
B	平面上のベクトル	3		3		2	1				2
	空間のベクトル				2			1	3		
	数列	5	1			5	5	3		4	
	確率分布と統計										

2019 年度までは 4 題 (100 分)，2020 年度は 3 題 (80 分)

教育学部 出題分野 (2011-2020) 80 分

◀	大分大学 教育学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量								5		
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式	2	7			1					
	三角関数								2		
	指数関数と対数関数								1		
	微分法と積分法	1	5	5	1	3	2	5	2	5	5
A	場合の数と確率				6		3				
	整数の性質										
	図形の性質			2						2	1
B	平面上のベクトル	3		3		2	1				2
	空間のベクトル				2			1			
	数列		1		6			3		4	
	確率分布と統計										

数字は問題番号

医学部 出題分野 (2011-2020) 80 分

◀	大分大学 医学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式	6	8	7							
	2 次関数										
	図形と計量	6									
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式		8								
	図形と方程式										
	三角関数				7						
	指数関数と対数関数	8									
	微分法と積分法				7						
III	式と曲線										
	複素数平面					7		8			
	関数										
	極限		10				6·7		6	6	
	微分法とその応用	7		7							6
	積分法			7	9	8				8	
	積分法の応用			9		6	8	9	8		
A	場合の数と確率		8		7				7		8
	整数の性質										
	図形の性質										
B	平面上のベクトル		9								
	空間のベクトル									7	
	数列			8	8						7
	確率分布と統計							7			
C	行列 (旧課程)										

数字は問題番号

7.1 2015年

- 工学部 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100分)
- 経済学部 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100分)
- 教育福祉科学部 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80分)
- 医学部 $\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80分)

1 a を実数とする．円 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ と直線 $y=ax+1$ が異なる2点A，Bで交わっている．

(1) a の値の範囲を求めなさい．

(2) 弦ABの長さが最大になるときの a の値を求めなさい．

(3) 弦ABの長さが2になるときの a の値を求めなさい．

2 △ABCにおいて，辺ABを2 : 1に内分する点をP，辺ACを1 : 2に内分する点をQとし，辺BC上に点Rがあるとする．

(1) 線分PQの中点をMとし，点A，M，Rが一直線上にあるとき，BR : RCを求めなさい．

(2) △ABCの重心Gと△PRQの重心Hが一致するとき，BR : RCを求めなさい．

(3) 直線AR，BQ，CPが一点で交わるとき，BR : RCを求めなさい．

3 k を実数とする．関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる3点を共有している．これらで囲まれた2つの部分の面積の和を S とする．

(1) k の値の範囲を求めなさい．

(2) S を k の式で表しなさい．

(3) S が最小になるときの k の値を求めなさい．

4 曲線 $C: 4x^2+9y^2=36\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ が第1象限にある．点 P における曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) y_1 の値を求めなさい．

(2) 接線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標を求めなさい．

(4) 曲線 C，接線 ℓ，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

5 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = n^4+6n^3+11n^2+6n$$

で表されるとする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n=4n(n+1)(n+2)$ であることを示しなさい．

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}\ (n=1,2,3,\cdots)$ によって定まる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を n の式で表しなさい．

6 方程式 $y^2 = x^6(1 - x^2)$ が表す図形で囲まれた面積を求めなさい．

7 方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解で，実部と虚部がともに正のものを x_1，実部が負で虚部が正のものを x_2，実部と虚部がともに負のものを x_3，実部が正で虚部が負のものを x_4 とする．

(1) この方程式を解きなさい．

(2) ${x_1}^k$ $(k = 1, 2, \cdots, 6)$ を計算しなさい．

(3) 与方程式の解 x_i と自然数 n に対して，${x_i}^{4n} + {x_i}^{2n} + 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

8 正の実数 p_i，q_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい．

(1) 不等式 $\log x \leqq x - 1$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$ が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle F = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ の最小値を求めなさい．

(4) 正の実数 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，$\displaystyle G = \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i$ の最小値を求めなさい．

解答例

1 (1) $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ より $(x-2)^2+(y-4)^2=5 \quad \cdots(*)$

円 $(*)$ の中心 $(2,\ 4)$ から直線 $ax-y+1=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|\,a\cdot 2-4+1\,|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}} \quad \cdots①$$

また，円 $(*)$ の半径 r は $r=\sqrt{5}$

円と直線が異なる2点で交わるとき，$d<r$ であるから

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{5} \quad 整理すると \quad a^2+12a-4>0$$

これを解いて $\boldsymbol{a<-6-2\sqrt{10},\ \ -6+2\sqrt{10}<a}$

(2) 直線 $y=ax+1$ が円の中心 $(2,\ 4)$ を通るときであるから

$$4=a\cdot 2+1 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$$

(3) $d^2+\left(\dfrac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2=r^2$ であるから

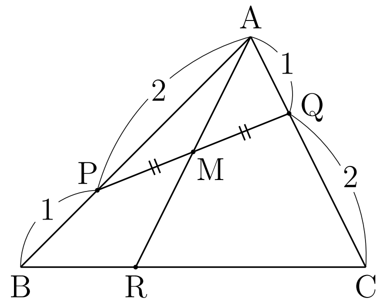
$$d^2+1^2=(\sqrt{5})^2 \qquad ゆえに \qquad d=2$$

これを ① に代入すると

$$\frac{|\,2a-3\,|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \qquad よって \qquad \boldsymbol{a=\frac{5}{12}}$$

■

2 (1) M は線分 PQ の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

条件から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 A，M，R が一直線上にあるから，実数 k を用いて

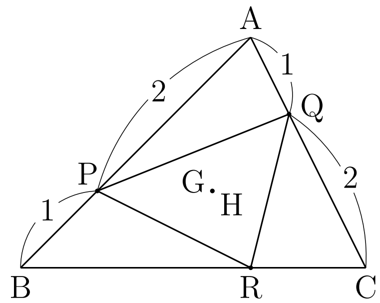
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad ゆえに \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{6}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

R は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1 \quad これを解いて \quad k = 2$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　**BR : RC = 1 : 2**

(2) G は △ABC の重心であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

H は △PQR の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right)$$

これに $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を代入すると

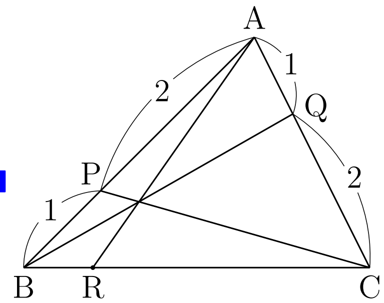
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}\right) = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　**BR : RC = 2 : 1**

(3) チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = 1$



したがって　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{2}{1}$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}} = \dfrac{1}{4}$

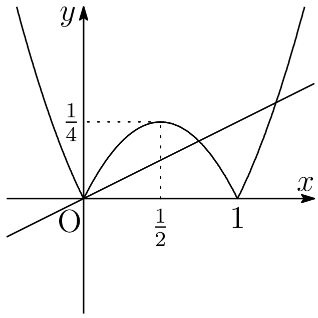
よって　**BR : RC = 1 : 4**　■

3　(1) $|x(x-1)| = \begin{cases} x^2 - x & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \\ -x^2 + x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$

したがって

$$y = |x(x-1)| \quad \cdots (*)$$

のグラフは，右の図のようになる．



$y = -x^2 + x$ を微分すると　$y' = -2x + 1$

$y = -x^2 + x$ の $x = 0$ における接線の傾きは　　$y' = 1$

$(*)$ グラフと直線 $y = kx$ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

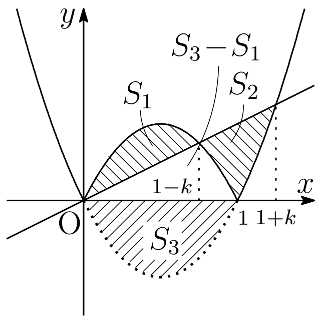
$$\boldsymbol{0 < k < 1}$$

(2) $(*)$ のグラフと直線 $y = kx$ の共有点の x 座標は

$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$ のとき　$x(x-1) = kx$　これを解いて　$x = 1 + k$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$-x(x-1) = kx$　これを解いて　$x = 1 - k$

右の図について，求める面積 S は



$$S = S_1 + S_2, \quad S_1 = \frac{1}{6}(1-k)^3, \quad S_3 = \frac{1}{6},$$

$$S_3 + (S_3 - S_1) + S_2 = \frac{1}{6}(1+k)^3 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \frac{1}{6}(1+k)^3 + 2S_1 - 2S_3 \\ &= \frac{1}{6}(1+k)^3 + 2 \times \frac{1}{6}(1-k)^3 - 2 \times \frac{1}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(-k^3 + 9k^2 - 3k + 1)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{dS}{dk} = -\dfrac{1}{2}(k^2 - 6k + 1)$　$\dfrac{dS}{dk} = 0$ とすると　$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$

ここで　$0 < 3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$

したがって，$0 \leqq k \leqq 1$ における S の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$3 - 2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dk}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 3 - 2\sqrt{2}}$　■

4 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y_1\right)$ は $C : 4x^2+9y^2=36$ 上の点であるから

$$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+{y_1}^2=36 \quad \text{ゆえに} \quad {y_1}^2=1$$

P は第 1 象限にあるから，$y_1>0$ に注意して $\boldsymbol{y_1=1}$

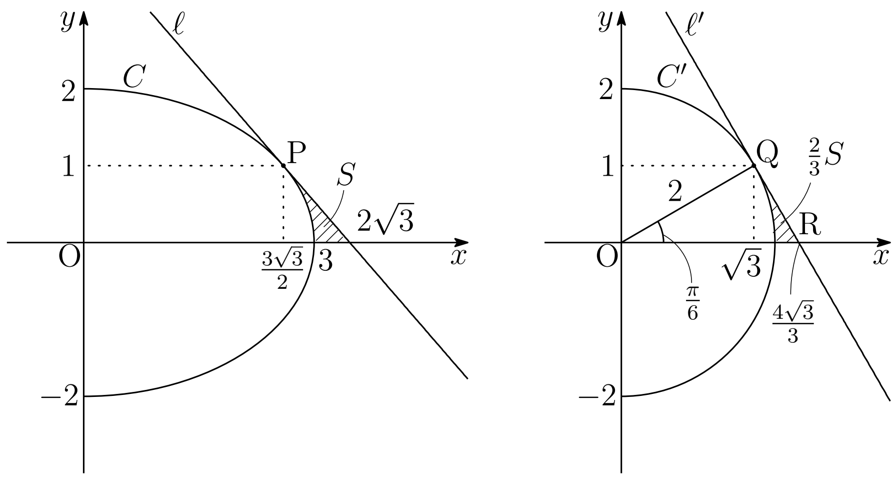
(2) (1) の結果から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ における C の接線 ℓ は

$$4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x+9\cdot1y=36 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{2\sqrt{3}x+3y=12}$$

(3) (2) で求めた ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると

$$2\sqrt{3}x=12 \qquad \text{よって，求める } x \text{ 座標は} \qquad \boldsymbol{x=2\sqrt{3}}$$

(4) 曲線 C および接線 ℓ を y 軸をもとに x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ だけ縮小したものを，それぞれ C'，ℓ' とすると，C'，ℓ'，x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2}{3}S$ である．



したがって，右上の図から

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S &= \triangle\mathrm{OQR}-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot1-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{S=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ より　$S_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$

$n = 1$ のとき　$a_1 = S_1 = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)\{(n+3) - (n-1)\} \\ &= 4n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つ．

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n = 4n(n+1)(n+2)$

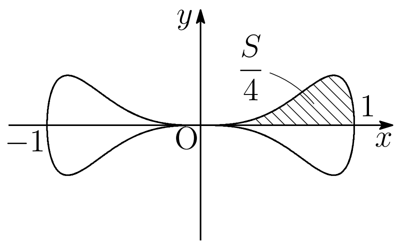
(2) (1) の結果から　$b_k = \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{1}{4k(k+1)(k+2)}$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+3)}{16(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

■

6 曲線 $y^2 = x^6(1-x^2)$ は，x 軸および y 軸に関して対称である．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において

$$y = x^3\sqrt{1-x^2}$$



よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \{-x(1-x^2)+x\}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \{-x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

よって　$S = \mathbf{\dfrac{8}{15}}$ ■

7 (1) 方程式 $x^6 = 1 \cdots ①$ の解は

$$x = \cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

方程式 ① から

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1) = 0$$

方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解は $x \neq \pm 1$ であるから，この方程式の解は

$$x = \cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi \quad (j = 1, 2, 4, 5) \qquad \cdots (*)$$

条件から

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ x_2 &= \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ x_3 &= \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ x_4 &= \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$x_1{}^k = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k = \cos\frac{k}{3}\pi + i\sin\frac{k}{3}\pi$$

よって　$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$x_1{}^2 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$x_1{}^3 = \cos\pi + i\sin\pi = \boldsymbol{-1}$

$x_1{}^4 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$x_1{}^5 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$x_1{}^6 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \boldsymbol{1}$

(3) $(*)$ から，方程式 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ の解について，$x^6 = 1$ に注意して

$$x^{4n} = (x^6)^n x^{-2n} = \left(\cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{-2n} = \cos\frac{2nj}{3}\pi - i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

$$x^{2n} = \left(\cos\frac{j}{3}\pi + i\sin\frac{j}{3}\pi\right)^{2n} = \cos\frac{2nj}{3}\pi + i\sin\frac{2nj}{3}\pi$$

したがって　$x^{4n} + x^{2n} + 1 = 2\cos\frac{2nj}{3}\pi + 1$

このとき，$j = 1,\ 2,\ 4,\ 5$ であるから $(2 = 3 - 1,\ 4 = 3 + 1,\ 5 = 6 - 1)$

$$x^{4n} + x^{2n} + 1 = 2\cos\frac{2n}{3}\pi + 1$$

すなわち　$x_i{}^{4n} + x_i{}^{2n} + 1 = 2\cos\frac{2n}{3}\pi + 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

よって　$x_i{}^{4n} + x_i{}^{2n} + 1 = \begin{cases} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{(n \equiv 0 \pmod{3}\ \text{のとき})} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n \not\equiv 0 \pmod{3}\ \text{のとき})} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

■

8 (1) $f(x) = x - 1 - \log x$ とおくと　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$f(x) \geqq 0$　すなわち　$x - 1 - \log x \geqq 0$

よって　　$\log x \leqq x - 1$

(2) (ギブスの不等式 (Gibbs' inequality))

(1) の結果から

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i) = 0$$

よって
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \cdots ①$$

また，① の等号が成立するのは，

$$\frac{q_i}{p_i} = 1 \quad \text{すなわち} \quad p_i = q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(3) $c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i - \log c = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{c} - 1 \right) = 0$$

したがって　$\log c \geqq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i \quad \cdots ②$

また，② の等号が成立するのは

$$\frac{q_i}{c} = 1 \quad \text{すなわち} \quad q_i = c = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

このとき，①，② から　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqq \log \frac{1}{n} \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$

よって，F は，$p_i = \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\log \dfrac{1}{n}}$ をとる．

(4) $A=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$p_i=\dfrac{a_i}{A}$ とおくと，(3) の結果から

$$\begin{aligned}G&=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i=\sum_{i=1}^{n}Ap_i\log Ap_i\\&=A\sum_{i=1}^{n}p_i(\log A+\log p_i)\\&=A\log A+A\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\\&\geqq A\log A+A\log\frac{1}{n}=A\log\frac{A}{n}\end{aligned}$$

よって $\qquad G\geqq A\log\dfrac{A}{n}\quad\cdots(*)$

(3) の結果から，$(*)$ で等号が成立するのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき．

ここで，$g(x)=x\log x$ とおくと $\quad g'(x)=1+\log x$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

したがって

$$\begin{aligned}A\log\frac{A}{n}&=n\times\frac{A}{n}\log\frac{A}{n}\\&=n\times g\left(\frac{A}{n}\right)\geqq n\times g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{n}{e}\end{aligned}$$

よって $\qquad A\log\dfrac{A}{n}\geqq-\dfrac{n}{e}\quad\cdots(**)$

$(**)$ で等号が成立するのは，$\dfrac{A}{n}=\dfrac{1}{e}$ のとき．

$(*)$，$(**)$ から $\qquad G\geqq A\log\dfrac{A}{n}\geqq-\dfrac{n}{e}$

とくに，$G=-\dfrac{n}{e}$ となるのは，$a_1=a_2=\cdots=a_n$，$\dfrac{A}{n}=\dfrac{1}{e}$ より

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は $\qquad \boldsymbol{-\dfrac{n}{e}}$

別解 (4) で用いた $g(x)$ により

$$G = \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i = \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{n}{e}$$

よって $$G \geqq -\frac{n}{e}$$

上式において，等号が成立するのは

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{e}$$

のときである．よって，求める G の最小値は $\boldsymbol{-\frac{n}{e}}$ ■

7.2　2016年

- 工学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

1　大きさ1のベクトル $\vec{a}$ と，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{b}$ のなす角を θ とする．

(1) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となるような実数 t の値を $|\vec{b}|$，θ を用いて表しなさい．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる．$|\vec{b}|$ および $\cos\theta$ の値を求めなさい．

2　a を0でない実数とする．2つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ がある．

(1) 2つの放物線は異なる2点で交わることを示しなさい．

(2) 2つの放物線の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\beta-\alpha$ を a の式で表しなさい．

(3) 2つの放物線で囲まれた部分の面積 S を a の式で表しなさい．

(4) (3) で定めた面積 S の最小値を求めなさい．

3　AとBの2つの箱がある．箱Aには，赤玉が1個，青玉が4個，黄玉が5個入っている．箱Bには，当りくじが3本，はずれくじが7本入っている．
　箱Aから玉を1つ取り出し，それが赤玉のときは箱Bからくじを5本，青玉のときは3本，黄玉のときは2本引くとする．

(1) 青玉を取り出し，当たりくじを少なくとも1本引く確率を求めなさい．

(2) 当たりくじを少なくとも1本引く確率を求めなさい．

(3) 当たりくじをちょうど1本引く確率を求めなさい．

$\boxed{4}$ 2 つの曲線 $y = x + 2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ と $y = x - 2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をつないでできる曲線を C とする．

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい．

(2) k を実数とする．曲線 C と直線 $y = k$ が異なる 2 点で交わるための k の値の範囲を求めなさい．

(3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

$\boxed{5}$ 初項 3 の数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列である．

(1) $c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とするとき，$c_{n+1} - c_n$ を求めなさい．

(2) a_n を n の式で表しなさい．

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき，S_n を n の式で表しなさい．

6 0 でない実数 r が $|r|<1$ のとき，以下の問いに答えなさい．ただし，自然数 n に対して $\lim_{n\to\infty} nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty} n(n-1)r^n=0$ である．

(1) $R_n=\sum_{k=0}^{n} r^k$ と $S_n=\sum_{k=0}^{n} kr^{k-1}$ を求めなさい．

(2) $T_n=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^{k-2}$ を求めなさい．

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k$ を求めなさい．

7 自然数 n に対して関数 $y=2nx-x^2$ のグラフと x 軸で囲まれた領域 (境界線を含む)R_n を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 R_n に含まれる格子点 (x 座標と y 座標がともに整数である点) の数 S_n を求めなさい．

(2) 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2n,\ 0)$，および関数 y の頂点を結ぶ線分で囲まれた領域 (境界を含む) に含まれる格子点の数 T_n を求めなさい．

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}$ を求めなさい．

8 中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する．円 C_2 上の点 P は最初に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるとする．円 C_2 の中心を B とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表しなさい．

(3) $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めなさい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}|3\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2+6t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2\\ &= |\vec{b}|^2t^2+6t|\vec{b}|\cos\theta+9\\ &= |\vec{b}|^2\left(t+\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}\right)^2-9\cos^2\theta+9\end{aligned}$$

$|3\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき，$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる．

よって，$\boldsymbol{t=-\dfrac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}}$ のとき，$|3\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる．

(2) $|3\vec{a}+t\vec{b}|$ が $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}$ をとるから，(1) の結果より

$$-\frac{3\cos\theta}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{2},\quad -9\cos^2\theta+9=(2\sqrt{2})^2$$

ゆえに　$|\vec{b}|=6\cos\theta>0$，$9\cos^2\theta=1$　よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{|\vec{b}|=2}$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ の共有点の x 座標は

$$x^2=-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\quad ゆえに\quad 2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}=0\quad\cdots(*)$$

方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=(-a)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}\right)=a^2+\frac{1}{a^2}>0$$

よって，2 つの放物線は，異なる 2 点で交わる．

(2) 方程式 $(*)$ の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4a^2}$　$\cdots(**)$

したがって　$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &=a^2-4\left(-\frac{1}{4a^2}\right)=a^2+\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

$\alpha<\beta$ より，$\beta-\alpha>0$ であるから　$\boldsymbol{\beta-\alpha=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$

(3) $(*)$，$(**)$ より

$$\begin{aligned}2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}&=2\left(x^2-ax-\frac{1}{4a^2}\right)\\&=2\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}\\&=2(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$ は $y=x^2$ の上側にあるから

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{\left(-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\right)-x^2\right\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta\left(2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}\right)dx\\&=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\&=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(4) 相加平均・相乗平均の関係により

$$a^2+\frac{1}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2$$

上式において等号が成立するのは　$a^2=\dfrac{1}{a^2}$　すなわち　$a=\pm 1$

したがって　　$S=\dfrac{1}{3}\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq\dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$a=\pm1$ のとき，S は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとる． ■

3 (1) 箱 A から青玉を取り出す確率は　$\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

箱 B からくじ 3 本引くとき，少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$1-\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{17}{24}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{17}{24}=\boldsymbol{\dfrac{17}{60}}$

(2) (1) と同様に，箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}\right)=\frac{11}{120}$$

また，箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から少なくとも当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\left(1-\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{4}{15}$$

よって，求める確率は，これと (1) の結果により

$$\frac{11}{120}+\frac{17}{60}+\frac{4}{15}=\boldsymbol{\frac{77}{120}}$$

(3) 箱 A から赤玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{1}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{24}$$

箱 A から青玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{4}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{21}{100}$$

箱 A から黄玉を取り出し，箱 B から当たりくじを 1 本引く確率は

$$\frac{5}{10}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{30}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{24}+\dfrac{21}{100}+\dfrac{7}{30}=\boldsymbol{\dfrac{97}{200}}$　■

4　(1) 2 つの曲線を次のようにおく．

$$C_1 : y = x + 2\cos x \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$
$$C_2 : y = x - 2\cos x \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

C_1 について　$y' = 1 - 2\sin x$，$y'' = -2\cos x \geqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↘	極小	↗	$\frac{3\pi}{2}$

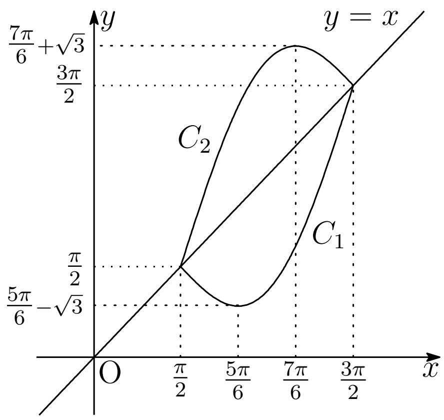
$x = \dfrac{5\pi}{6}$ で極小値 $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ をとる．下に凸．

また，C_2 について　$y' = 1 + 2\sin x$，$y'' = 2\cos x \leqq 0$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↗	極大	↘	$\frac{3\pi}{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{6}$ で極大値 $\dfrac{7\pi}{6} + \sqrt{3}$ をとる．上に凸．

以上の結果から，グラフの概形は次のようになる．



(2) C の概形から，$y = k$ が異なる 2 点で交わるための k の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} < k < \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}}$$

(3) $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3} > 0$ であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\{(x-2\cos x)^2-(x+2\cos x)^2\}\,dx \\ &= 8\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-x\cos x)\,dx \\ &= 8\pi\Big[-x\sin x-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \boldsymbol{16\pi^2} \end{aligned}$$

補足 C_1 と C_2 で囲まれ部分の面積 S は　　$S=8$

C_1 と C_2 は点 $(\pi,\ \pi)$ に関して対称で，この図形の重心である．

したがって，x 軸から重心までの距離 h は　　$h=\pi$

よって，求める回転体の体積 V は，パップス・ギュルダンの定理[1] により

$$V = 2\pi hS = 2\pi\cdot\pi\cdot 8 = 16\pi^2$$

■

$\boxed{5}$ (1) $\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = 6\cdot 3^{n-1} = 2\cdot 3^n$$

$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ に上の結果を代入すると

$$2\cdot 3^n = a_{n+1} - 3a_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3}$$

$c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ であるから　　$c_{n+1} - c_n = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) $c_1 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$，および (1) の結果から，$\{c_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列であるから

$$c_n = 1 + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{1}{3}(2n+1)$$

$c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ より，$a_n = 3^n c_n$ であるから

$$a_n = 3^n\cdot\frac{1}{3}(2n+1) = \boldsymbol{(2n+1)\cdot 3^{n-1}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) $b_n = 6{\cdot}3^{n-1}$ および $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ より

$$\sum_{k=1}^{n} 6{\cdot}3^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - 3a_k)$$

$$3(3^n - 1) = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - 3\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \cdots (*)$$

このとき，条件および (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = S_n + a_{n+1} - a_1$$

$$= S_n + (2n+3){\cdot}3^n - 3$$

上の 2 式を $(*)$ に代入すると

$$3(3^n - 1) = \{S_n + (2n+3){\cdot}3^n - 3\} - 3S_n$$

これを S_n について解くと　　$\boldsymbol{S_n = n{\cdot}3^n}$ ■

6 (1) $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$ より，$|r| < 1$ のとき

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \boldsymbol{\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$$

次に，S_n について

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} \quad \cdots ①, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2} \quad \cdots ②$$

とおくと，① − ② × r より $(r \neq 1)$

$$S_n - rS_n = \sum_{k=0}^{n} kr^{k-1} - r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}$$

$$(1-r)S_n = -nr^n + \sum_{k=1}^{n}\{kr^{k-1} - r(k-1)r^{k-2}\}$$

$$= -nr^n + \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = -nr^n + \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

よって　　$\boldsymbol{S_n = -\frac{nr^n}{1-r} + \frac{1 - r^n}{(1-r)^2}}$

(2) T_n について

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)r^{k-2} \quad \cdots ③,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3} \quad \cdots ④$$

とおくと，③ − ④ $\times r$ より，② に注意して $(r \neq 1)$

$$\begin{aligned}
T_n-rT_n&=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)r^{k-2}-r\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(k-2)r^{k-3}\\
(1-r)T_n&=-n(n-1)r^{n-1}+2\sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-2}\\
&=-n(n-1)r^{n-1}-2nr^{n-1}+2\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-2}\\
&=-n(n+1)r^{n-1}+2S_n\\
&=-n(n+1)r^{n-1}-\frac{2nr^n}{1-r}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^2}
\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{T_n=-\frac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r}-\frac{2nr^n}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}}$$

(3) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$，$\lim_{n\to\infty}n(n-1)r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}n(n+1)r^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)r^n+2nr^n}{r}=0$$

上の諸式により

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{nr^n}{1-r}+\frac{1-r^n}{(1-r)^2}\right\}=\frac{1}{(1-r)^2}\\
\lim_{n\to\infty}T_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n(n+1)r^{n-1}}{1-r}-\frac{2nr^n}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r^n)}{(1-r)^3}\right\}=\frac{2}{(1-r)^3}
\end{aligned}$$

よって $$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}k^2r^k&=r^2\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)r^{k-2}+r\sum_{k=0}^{\infty}kr^{k-1}\\
&=r^2\times\frac{2}{(1-r)^3}+r\times\frac{1}{(1-r)^2}=\boldsymbol{\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}}
\end{aligned}$$

別解 $f(r)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}$ とおくと $(0<|r|<1)$

$$f'(r)=\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2},\quad f''(r)=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2}=\frac{2}{(1-r)^3}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^2r^k&=\sum_{k=0}^{\infty}\{k(k-1)+k\}r^k\\&=r^2\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)r^{k-2}+r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}\\&=r^2f''(r)+rf'(r)=\frac{2r^2}{(1-r)^3}+\frac{r}{(1-r)^2}=\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}\end{aligned}$$

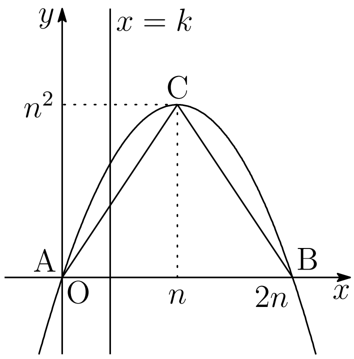
■

7 (1) 関数 $y=2nx-x^2=-(x-n)^2+n^2$ のグラフの頂点を C とすると　C$(n,\ n^2)$

R_n に含まれる直線 $x=k$ (k は整数) 上の格子点の個数は，

$$-(k-n)^2+n^2+1$$

グラフは直線 $x=n$ に関して対称であるから



$$\begin{aligned}S_n&=2\sum_{k=0}^{n-1}\{-(k-n)^2+n^2+1\}+n^2+1\\&=2\sum_{k=1}^{n}(-k^2+n^2+1)+n^2+1\\&=2\left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n(n^2+1)\right\}+n^2+1\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}n^3+\frac{5}{3}n+1}\end{aligned}$$

(2) 直線 AC の傾きは n であるから，(1) と同様に直線 $x = k$ (k は整数) 上の格子点の個数は，$nk + 1$ であるから

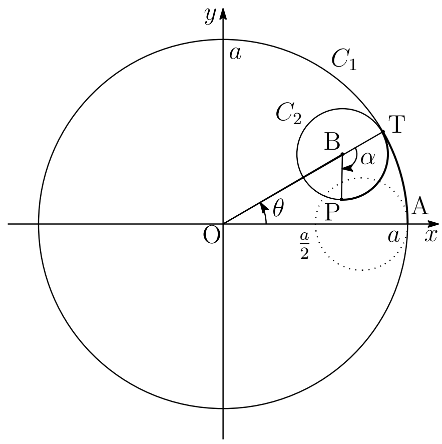
$$\begin{aligned}
T_n &= 2\sum_{k=0}^{n-1}(nk+1) + n^2 + 1 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\{n(k-1)+1\} + n^2 + 1 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}(nk-n+1) + n^2 + 1 \\
&= 2\left\{n \times \frac{1}{2}n(n+1) + (-n+1)n\right\} + n^2 + 1 \\
&= \boldsymbol{n^3 + 2n + 1}
\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+1}{\frac{4}{3}n^3+\frac{5}{3}n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{3n^2}+\frac{1}{n^3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

■

8 (1) C_1 と C_2 の接点を T，$\alpha = \angle\mathrm{PBT}$ とする．C_1 および C_2 上の弧について，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから



$$a\theta = \frac{a}{4} \times \alpha \quad ゆえに \quad \alpha = 4\theta$$

BT の x 軸のなす角が θ であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \frac{a}{4}(\cos(\theta-\alpha), \sin(\theta-\alpha)) \\
&= \frac{a}{4}(\cos(-3\theta),\ \sin(-3\theta)) \\
&= \boldsymbol{\frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)}
\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{OB} = \mathrm{OT} - \mathrm{BT} = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \frac{3}{4}a(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{a}{4}(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)\\ &= \boldsymbol{\frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta - \sin 3\theta)}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと，(2) の結果から

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{3}{4}a(\sin\theta + \sin 3\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{4}a(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

したがって

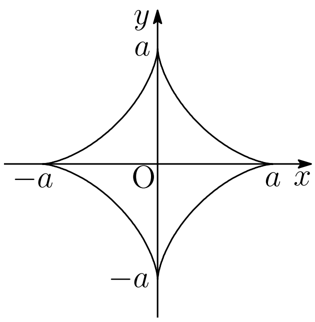
$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)\\ &= \frac{9}{8}a^2(1 - \cos 4\theta) = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

求める距離を s とすると，$\dfrac{3}{2}a|\sin 2\theta|$ の周期が $\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a|\sin 2\theta|\,d\theta\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = \Big[-3a\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{6a}\end{aligned}$$

解説　(2) の結果は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$



となり，その軌跡はアステロイドである．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) &= a\left(-3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cos\theta\right)\\ &= 3a\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\\ &= \frac{3}{2}a\sin 2\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)\end{aligned}$$

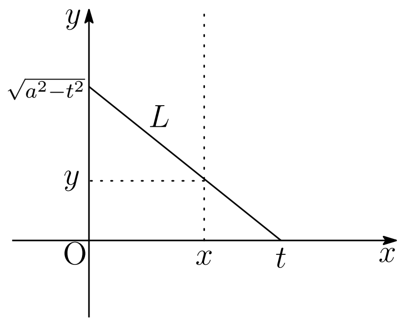
ゆえに

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \frac{3}{2}a|\sin 2\theta|$$

アストロイド (astroid) の x 軸および y 軸に関する対称性により

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}a\sin 2\theta\,d\theta = 3a\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

補足 長さ a の線分 L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，L の包絡線 (L の通る領域と通らない領域の境界線) を求める．



右の図のように L が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ にあるとき，L 上の点 $(x,\ y)$ について

$$y = -\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}x + \sqrt{a^2-t^2} \quad \cdots (*)$$

が成立する．ここで，x を固定し，y を t の関数とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a^2}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}x - \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{a^2x-t^3}{t^2\sqrt{a^2-t^2}}$$

点 $(x,\ y)$ が包絡線上にあるとき，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるから　$t = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$
これを $(*)$ に代入すると

$$y = -x^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

したがって

$$\begin{aligned} y^2 &= x^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) - 2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \end{aligned}$$

よって　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一般に，L の両端が x 軸上および y 軸上を動くとき，上式は成立する．■

7.3　2017 年

- 工学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

1 1 辺の長さが 1 の正四面体 PABC において，辺 PA，BC，PB，AC の中点をそれぞれ K，L，M，N とする．線分 KL，MN の中点をそれぞれ Q，R とし，△ABC の重心を G とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表し，点 Q と R が一致することを示しなさい．

(2) 3 点 P，Q，G が同一直線上にあることを示しなさい．また，PQ : QG を求めなさい．

(3) $\mathrm{PG} \perp \mathrm{AB}$ を示しなさい．

2 a，b を 1 より大きい定数とし，$\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2$ とする．

(1) xy を a，b の式で表しなさい．

(2) $ax + by$ の最小値を a，b の式で表しなさい．

(3) $(ax-1)^2 + (by-1)^2$ の最小値を a，b の式で表しなさい．

3 $a_1 = 3$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，a_{n+1} を a_n，a_{n-1} で表しなさい．

(2) $a_{n+1} - 2a_n$ を n の式で表しなさい．

(3) a_n を n の式で表しなさい．

4 $f(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，極値，変曲点を求めなさい．また，そのグラフをかきなさい．

(2) k を定数とする．方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めなさい．

(3) すべての実数 x に対して，不等式 $f(x) \leqq 1 + \dfrac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示しなさい．

5 $0 \leqq t \leqq 1$ とし，関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ に対して，

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) $S(t)$ を求めなさい．

(3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい．

6 △ABC において AB $= 5$，AC $= 3$ とし ∠A の二等分線と辺 BC との交点を P とする．頂点 C から直線 AP に下ろした垂線と，直線 AP，AB との交点をそれぞれ D，E とする．

(1) 線分 BE の長さを求めなさい．

(2) 辺 BC の中点を M とするとき，線分 MD の長さを求めなさい．

(3) AD : DP を求めなさい．

7 同じ大きさと重さの白石と黒石がそれぞれ m 個と n 個ある．これらの石から k 個を無作為に抽出し，その中の白石の数を X とする．ただし m，n，k は自然数で $1 \leqq k < m$，$1 \leqq k < n$ である．以下の問いに答えなさい．

(1) 整数 i に対して $X = i$ の確率 $p(i,\ k \mid m,\ n)$ を求めなさい．ただし，組合せの記号 ${}_q\mathrm{C}_r$ を用いて結果を表現しなさい．

(2) $m = 4$，$n = 6$，$k = 3$ のときの X の期待値を求めなさい．

(3) 一般の m，n，k に対して X の期待値を求めなさい．

8 複素数 $x = 1 - \sqrt{3}\,i$ について以下の問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $x = 1 - \sqrt{3}\,i$ を解とする実数係数の2次方程式を作りなさい．

(2) x^n $(n = 1, 2, \ldots)$ を求めなさい．

(3) 自然数 m に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{3m} (-2)^{-k} x^k$ を求めなさい．

9 放物線 $y = -x^2$ と $y = x^2 - 2x$ のそれぞれの上を動く点をPとQとする．現在時刻 $t = 0$ で $\mathrm{P} = (0,\ 0)$，$\mathrm{Q} = (1, -1)$ にあり，それぞれの放物線上を速さ1でPは x 座標が増加する方向に，Qは x 座標が減少する方向に動く．以下の問いに答えなさい．

(1) 点 $\mathrm{P} = (x, -x^2)$ とするとき，Qの座標を求めなさい．

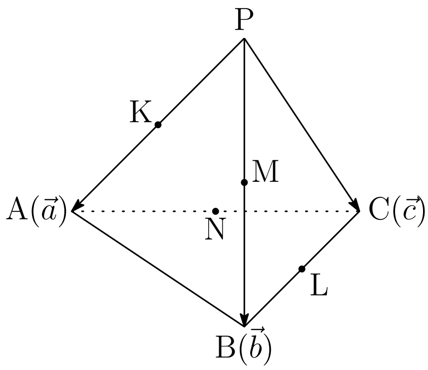
(2) 動点PとQの距離の2乗の最小値とそのときのPの座標を求めなさい．

(3) 関数 $g(x) = \dfrac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}$ を x で微分しなさい．

(4) 動点PとQの距離の2乗が最小となる時刻 t を求めなさい．ただし，(2)のPの x 座標を a として，求める時刻を表現してもよい．

解答例

1 (1) 4 点 K，L，M，N は，辺 PA，BC，PB，AC の中点であるから，右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PK}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PL}} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2}\vec{b}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PN}} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$$

2 点 Q，R は線分 KL，MN の中点であるから，上の諸式より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PK}}+\overrightarrow{\mathrm{PL}}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{PN}}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

上の 2 式から，点 Q と R は一致する．

(2) 点 G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}) = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \quad \cdots ①$$

上式および (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{PG}}$

よって，3 点 P，Q，G は同一直線上にある．また　**PQ : QG = 3 : 1**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}-\vec{a}$ であるから，これと ① より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \\ &= \frac{1}{3}(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

このとき，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

これらを ② に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$　よって　**PG⊥AB**　■

2 (1) $\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2 \cdots ①$ より　$\log_{ab} xy = 2$

よって　　$xy = (ab)^2 = \boldsymbol{a^2b^2}$

(2) ① の真数により，$x,\ y > 0$．また，$a,\ b > 1$ であるから　$ax > 0$，$by > 0$

したがって，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$ax + by \geqq 2\sqrt{ax \cdot by} = 2\sqrt{abxy}$$

これに ① の結果を代入すると　$ax + by \geqq 2ab\sqrt{ab}$　$\cdots ②$

② において，等号が成立するのは，$ax = by$ のときで，$k > 0$ を用いて

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a} = k \quad \text{ゆえに} \quad x = bk,\ \ y = ak$$

とおき，(1) の結果に代入すると　$ak \cdot bk = a^2b^2$　ゆえに　$k = \sqrt{ab}$

よって　　$ax + by$ は，$x = b\sqrt{ab}$，$y = a\sqrt{ab}$ のとき，

最小値 $\boldsymbol{2ab\sqrt{ab}}$ をとる．

(3) $\vec{u} = (1,\ 1)$，$\vec{v} = (ax-1,\ by-1)$ とおくと，$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ であるから

$$(1^2+1^2)\{(ax-1)^2 + (by-1)^2\} \geqq \{1(ax-1) + 1(by-1)\}^2$$

したがって　　$(ax-1)^2 + (by-1)^2 \geqq \dfrac{1}{2}(ax+by-2)^2$　$\cdots ③$

③ において，等号が成立するのは，$\vec{u} /\!/ \vec{v}$ のときで，

$$ax - 1 = by - 1 \quad \text{ゆえに} \quad ax = by$$

(2) と同様の議論により　$x = b\sqrt{ab},\ y = a\sqrt{ab}$

②，③ により，$a,\ b > 1$ であるから $2ab\sqrt{ab} - 2 > 0$ に注意して

$$(ax-1)^2 + (by-1)^2 \geqq \frac{1}{2}(2ab\sqrt{ab} - 2)^2 = 2(ab\sqrt{ab} - 1)^2$$

よって　　$(ax-1)^2 + (by-2)^2$ は，$x = b\sqrt{ab}$，$y = a\sqrt{ab}$ のとき，

最小値 $\boldsymbol{2(ab\sqrt{ab} - 1)^2}$ をとる．

■

3　(1)　(∗)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1$ $(n = 1, 2, 3)$ より

$n \geqq 2$ のとき
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= (4a_n + 1) - (4a_{n-1} + 1) \\ &= \boldsymbol{4a_n - 4a_{n-1}} \end{aligned}$$

(2)　$n = 1$ を (∗) に代入すると

$$a_1 + a_2 = 4a_1 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_2 = 3a_1 + 1 = 3{\cdot}3 + 1 = 10$$

(1) の結果から　$a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1})$　$(n \geqq 2)$

したがって，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は，初項が $a_2 - 2a_1$，公比が 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1){\cdot}2^{n-1} = (10 - 2{\cdot}3){\cdot}2^{n-1} = \boldsymbol{2^{n+1}}$$

(3)　(2) の結果から　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{a_n}{2^n} = 1$

したがって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項が $\dfrac{a_1}{2}$，公差が 1 の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + (n-1){\cdot}1 = \frac{3}{2} + n - 1 = \frac{2n+1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{a_n = (2n+1){\cdot}2^{n-1}}$　■

4　(1)　$f(x) = 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ f''(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x)(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

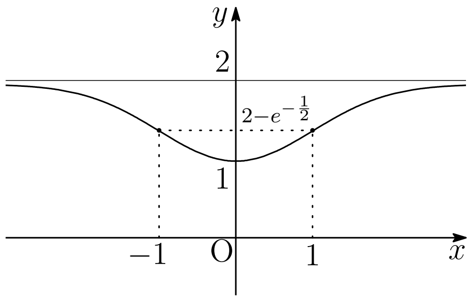
$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	変曲点 $2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↘	極小 1	↗	変曲点 $2 - e^{-\frac{1}{2}}$	↗

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

よって，極小値 $\boldsymbol{f(0) = 1}$，変曲点 $\boldsymbol{(\pm 1,\ 2 - e^{-\frac{1}{2}})}$

グラフの概形は次のようになる．



(2) 方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数であるから，(1) の結果より

$\boldsymbol{k<1,\ 2 \leqq k}$ のとき	**0個,**
$\boldsymbol{k=1}$ のとき	**1個,**
$\boldsymbol{1<k<2}$ のとき	**2個**

(3) $g(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2-f(x)$ とおくと

$$g(0)=1-f(0)=1-1=0,$$
$$g'(x)=x-f'(x)=x-xe^{-\frac{1}{2}x^2}=x(1-e^{-\frac{1}{2}x^2})$$

$x>0$ のとき，$g'(x)>0$ であるから，$g(0)=0$ より

$$g(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0)$$

これから，$x \leqq 0$ のとき，$g(-x) \geqq 0$ となり，$g(x)=g(-x)$ であるから

$$g(x) \geqq 0 \quad (x \leqq 0)$$

よって，すべての実数 x に対して

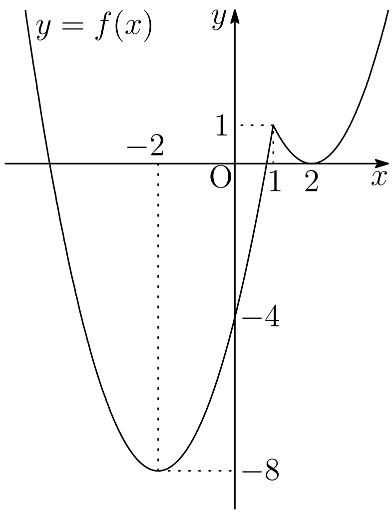
$$g(x) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \leqq 1+\frac{1}{2}x^2$$

解説 凸関数 $y=e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は　$y=x+1$
したがって，すべての実数 x に対して

$$e^x \geqq x+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2-e^x \leqq 1-x$$

x を $-\dfrac{x^2}{2}$ に置き換えることにより　　$2-e^{-\frac{x^2}{2}} \leqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$ ■

5　(1) $y = x^2 - 4|x-1|$



(i) $x \geqq 1$ のとき，$|x-1| = x-1$ より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(x-1) \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

(ii) $x < 1$ のとき，$|x-1| = -x+1$ より

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4(-x+1) \\ &= x^2 + 4x - 4 \\ &= (x+2)^2 - 8 \end{aligned}$$

したがって，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．

(2) $S(t) = \displaystyle\int_t^{2t} f(x)\,dx$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ より

(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{2t} (x^2 + 4x - 4)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\right]_t^{2t} = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} < t \leqq 1$ のとき，(i) の結果に注意して

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^1 (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} (x^2 - 4x + 4)\,dx \\ &= \int_t^1 (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} \{(x^2 + 4x - 4) + (-8x + 8)\}\,dx \\ &= \int_t^{2t} (x^2 + 4x - 4)\,dx + \int_1^{2t} (-8x + 8)\,dx \\ &= \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t + \left[-4x^2 + 8x\right]_1^{2t} = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4 \end{aligned}$$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4 & \left(\dfrac{1}{2} < t \leqq 1\right) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から

$$0 < t < \frac{1}{2} \text{ のとき}\quad S'(t) = 7t^2 + 12t - 4 = (7t-2)(t+2)$$

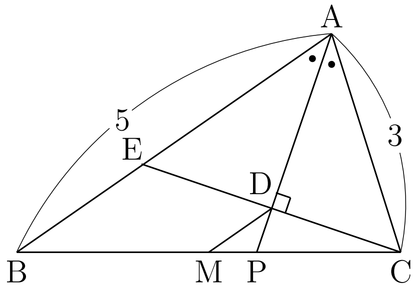
$$\frac{1}{2} < t < 1 \text{ のとき}\quad S'(t) = 7t^2 - 20t + 12 = (7t-6)(t-2)$$

したがって，$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{7}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{6}{7}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	↘	極小 $-\frac{88}{147}$	↗	$-\frac{5}{24}$	↗	極大 $\frac{20}{49}$	↘	$\frac{1}{3}$

よって　最大値 $\boldsymbol{S\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{49}}$，　最小値 $\boldsymbol{S\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{88}{147}}$ ■

6 (1) $\triangle$ACD と $\triangle$AED において，AD は共通．



条件より　　$\angle$CAD $= \angle$EAD

AD$\perp$CD より　$\angle$ADC $= \angle$ADE

したがって　$\triangle$ACD $\equiv \triangle$AED

AC $=$ AE $= 3$ より　BE $=$ AB $-$ AE $= 5 - 3 = \mathbf{2}$

(2) 2 点 M，D はそれぞれ CB，CE の中点であるから，中点連結定理により

$$\mathrm{MD} = \frac{1}{2}\mathrm{BE} = \frac{1}{2}\cdot 2 = \mathbf{1}$$

(3) AP は $\angle$A の二等分線であるから　BP : PC $=$ AB : AC $= 5 : 3$

$\triangle$APB と直線 CE にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DP}}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DP}}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = 1$$

よって　　**AD : DP = 4 : 1** ■

7 (1) 白玉 m 個と黒玉 n 個から k 個取り出すとき，白玉を i 個，黒玉を $k-i$ 個取り出す確率であるから

$$\boldsymbol{p(i,\ k \mid m,\ n) = \frac{{}_m\mathrm{C}_i\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-i}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k}}$$

(2) $m=4$，$n=6$，$k=3$ のとき，(1) の結果を利用することにより，X の期待値 (確率変数 X の平均) は

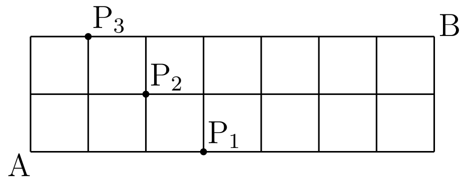
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} i\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_i\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}}{{}_{10}\mathrm{C}_3} \\ &= \frac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}(1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_2 + 2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_1 + 3\cdot{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_0) \\ &= \frac{1}{120}(1\cdot4\cdot15 + 2\cdot6\cdot6 + 3\cdot4\cdot1) = \frac{144}{120} = \boldsymbol{\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

別解　$i\cdot{}_4\mathrm{C}_i = 4\cdot{}_3\mathrm{C}_{i-1}$ であるから $(i=1,2,3)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} i\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_i\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{4}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\sum_{i=1}^{3} {}_3\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}$$

${}_3\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i}$ は，下図の地点 A から地点 P_i を通って地点 B へ行く道順の総数に等しいから $(i=1,2,3)$，次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{3} {}_3\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_6\mathrm{C}_{3-i} = {}_9\mathrm{C}_2$$



よって　$E(X) = \dfrac{4}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\times{}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{4}{120}\times36 = \boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$

(3) $1 \leqq i \leqq k$ のとき，$i\cdot{}_m\mathrm{C}_i = m\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{i-1}$ であるから，(1) の結果より

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{{}_m\mathrm{C}_i\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-i}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k} = \frac{m}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k}\sum_{i=1}^{k} {}_{m-1}\mathrm{C}_{i-1}\cdot{}_n\mathrm{C}_{k-i} \\ &= \frac{m}{{}_{m+n}\mathrm{C}_k}\times{}_{m+n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= \frac{m\cdot k!(m+n-k)!}{(m+n)!}\times\frac{(m+n-1)!}{(k-1)!(m+n-k)!} \\ &= \boldsymbol{\frac{mk}{m+n}} \end{aligned}$$

■

8 (1) $1+\sqrt{3}\,i$ と $1-\sqrt{3}\,i$ を解にもつ2次方程式は

$$x^2-\{(1+\sqrt{3}\,i)+(1-\sqrt{3}\,i)\}x+(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)=0$$

よって　$\boldsymbol{x^2-2x+4=0}$

(2) $x=1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$x^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=\boldsymbol{2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)}$$

(3) $t=(-2)^{-1}x$ とおくと，(1) の結果から，$t^2+t+1=0$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k&=\sum_{k=1}^{3m}t^k=\sum_{j=0}^{m-1}(t^{3j+1}+t^{3j+2}+t^{3j+3})\\&=\sum_{j=0}^{m-1}t^{3j+1}(1+t+t^2)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

別解 $t=(-2)^{-1}x$ とおくと　$t=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

したがって　$t^{3m}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k=\sum_{k=1}^{3m}t^k=\frac{t(t^{3m}-1)}{t-1}=\mathbf{0}$ ■

9 (1) 放物線 $y=-x^2$ と $y=x^2-2x$ は点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ に関して対称であり，現在時刻 $t=0$ で，$\mathrm{P}=(0,\ 0)$ と $\mathrm{Q}=(1,-1)$ は，点Aに関して対称である．このとき，動点P，Qは，点Aに関して対称であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(x,-x^2)\\&=(1-x,\ x^2-1)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}=(1-x,\ x^2-1)}$

(2) $\mathrm{P}(x, -x^2)$，$\mathrm{Q}(1-x,\ x^2-1)$ より，$f(x) = \mathrm{PQ}^2$ とおくと

$$f(x) = (1-2x)^2 + (2x^2-1)^2 = 4x^4 - 4x + 2$$
$$f'(x) = 16x^3 - 4 = 4(4x^3 - 1)$$

$f'(x) = 0$ の解を a とすると　　$a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，求める最小値は

$$\begin{aligned} f(a) &= 4a^4 - 4a + 2 = 4a^3 \cdot a - 4a + 2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} a - 4a + 2 = -3a + 2 = \boldsymbol{-\frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 2} \end{aligned}$$

そのときの P の座標は

$$(a, -a^2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)}$$

(3) $g(x) = \dfrac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}$ より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1+x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = \boldsymbol{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

(4) 放物線 $y = -x^2$ 上の原点から $(a, -a^2)$ までの弧長が t に等しいから

$$\begin{aligned} t &= \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + (-2x)^2}\, dx \\ &= \int_0^a \sqrt{4x^2+1}\, dx = \int_0^a g'(2x)\, dx \\ &= \left[\ \frac{1}{2} g(2x)\ \right]_0^a = \frac{1}{2}\{g(2a) - g(0)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\log(2a + \sqrt{4a^2+1}) + \frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1}} \end{aligned}$$

■

7.4　2018 年

- 工学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

1 a を定数，x を実数とし，

$$y = 9^x + \frac{1}{9^x} - 4a\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)$$

とする．$t = 3^x + \dfrac{1}{3^x}$ とおく．

(1) t のとり得る値の範囲を求めなさい．

(2) y を t の式で表しなさい．

(3) y の最小値とそのときの x の値を，a を用いてそれぞれ表しなさい．

2 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とし，

$$f(\theta) = \sin 3\theta - \cos 3\theta - 3\sin 2\theta + 3(\sin\theta + \cos\theta)$$

とする．

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とするとき，t のとり得る値の範囲を求めなさい．

(2) (1) のとき，$f(\theta)$ を t を用いて表しなさい．

(3) 方程式 $f(\theta) = k$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めなさい．

3 p，q，u，v を正の実数とする．空間に 5 点 O(0, 0, 0)，P(p, 0, 0)，Q(0, q, 0)，R，S がある．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ はともに $\vec{n} = (-u, -v, 1)$ に垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ はともに $\vec{e} = (0, 0, 1)$ に平行である．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角を θ とする．

(1) 2 点 R，S の座標を p，q，u，v を用いて表しなさい．

(2) $\cos\theta$ の値を u，v を用いて表しなさい．

(3) △OPQ と △ORS の面積の比を u，v を用いて表しなさい．

4 $x > 0$ とし，

$$f(x) = \log x, \quad g(x) = \log x^2$$

とする．

(1) a を正の定数とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線の方程式を求めなさい．

(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および (2) で求めた直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

5 $\mathrm{AB} = 8$，$\mathrm{AC} = 5$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ がある．

(1) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心であるとき，$\angle\mathrm{BPC}$ の大きさを求めなさい．

(2) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心であるとき，線分 BP の長さを求めなさい．

(3) 点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるとき，$\triangle\mathrm{PBC}$ の面積を求めなさい．

6 次の初項と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えなさい．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 一般項 a_n を求めなさい．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を調べなさい．

7 5枚の硬貨を表を上にして横一列に並べる．1個のサイコロを投げて出た目が $k(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ のとき，左から k 番目の硬貨の表裏を入れ替え，6の目が出たら何もしない．この操作を続けて行うとき，以下の問いに答えなさい．ただし，サイコロの目はいずれも同様な確からしさで出るとする．

(1) サイコロを n 回投げた時点で裏になっている硬貨が n 枚である確率を求めなさい．ただし，n は5以下の正の整数とする．

(2) サイコロを4回投げた時点で硬貨がすべて表である確率を求めなさい．

(3) サイコロを4回投げた時点で裏になっている硬貨が t 枚である確率を $P(t)$ とする．このとき，$\displaystyle\sum_{t=1}^{4} tP(t)$ の値を求めなさい．

8 原点 O(0, 0) と点 A(0, 2) を直径の両端とする円 C がある．円 C の周上を動く点 Q と原点 O を通る直線を l とし，点 A における円 C の接線を m として，l と m の交点を R とする．そして，点 R と x 座標が等しく，かつ点 Q と y 座標が等しい点を P とする．ただし，点 Q は原点 O とは異なるとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) 点 P の軌跡の方程式を求め，$y = f(x)$ の形で表しなさい．

(2) 上の (1) で得られた $y = f(x)$ について増減や凹凸を調べ，概形を描きなさい．

(3) 曲線 $y = f(x)$，x 軸，直線 $x = -2$ および直線 $x = 2\sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 相加・相乗平均の大小関係により

$$t = 3^x + \frac{1}{3^x} \geqq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{t \geqq 2}$$

なお，等号が成立するのは　$3^x = \dfrac{1}{3^x}$　すなわち　$x = 0$

(2) $y = 9^x + \dfrac{1}{9^x} - 4a\left(3^x + \dfrac{1}{3^x}\right)$

$$= \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 - 2 - 4a\left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) = \boldsymbol{t^2 - 4at - 2}$$

(3) (1), (2) の結果から　$y = t^2 - 4at - 2 = (t - 2a)^2 - 4a^2 - 2 \ (t \geqq 2)$

(i) $2a < 2$，すなわち，$a < 1$ のとき

$$t = 2 \text{ で最小値 } \boldsymbol{2 - 8a}$$

このとき，(1) の結果から　$\boldsymbol{x = 0}$

(ii) $2 \leqq 2a$，すなわち，$1 \leqq a$ のとき

$$t = 2a \text{ で最小値 } \boldsymbol{-4a^2 - 2}$$

このとき　$3^x + \dfrac{1}{3^x} = 2a$　ゆえに　$(3^x)^2 - 2a \cdot 3^x + 1 = 0$

これを解いて　$3^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$　ゆえに　$\boldsymbol{x = \log_3(a \pm \sqrt{a^2 - 1})}$

■

2 (1) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(2) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=t^2-1 \quad \cdots ①$

$\sin 3\theta+\sin\theta=2\sin 2\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta-\cos\theta=-2\sin 2\theta\sin\theta$ より

$$\sin 3\theta=2\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta,$$
$$\cos 3\theta=-2\sin 2\theta\sin\theta+\cos\theta$$

ゆえに
$$\begin{aligned}\sin 3\theta-\cos 3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(2\sin 2\theta-1)\\&=t\{2(t^2-1)-1\}=2t^3-3t \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より
$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sin 3\theta-\cos 3\theta-3\sin 2\theta+3(\sin\theta+\cos\theta)\\&=2t^3-3t-3(t^2-1)+3t=\boldsymbol{2t^3-3t^2+3}\end{aligned}$$

別解 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ より

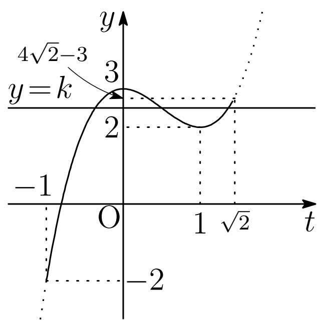
$$\begin{aligned}\sin 3\theta-\cos 3\theta&=3(\sin\theta+\cos\theta)-4(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)\{3-4(1-\sin\theta\cos\theta)\}\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(2\sin 2\theta-1)\\&=t\{2(t^2-1)-1\}=2t^3-3t\end{aligned}$$

(3) $g(t)=2t^3-3t^2+3$ $(-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおくと

$$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$g(t)$ の増減は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$4\sqrt{2}-3$



$y=g(t)$ のグラフは，右の図のようになる．

$f(\theta)=k$ が異なる3つの実数解をもつとき，$y=g(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる3つの共有点をもつときであるから

$$\boldsymbol{2<k\leqq 4\sqrt{2}-3}$$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = s\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = t\vec{e}$ とおくと (s，t は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\vec{e} = (p,\ 0,\ 0) + s(0,\ 0,\ 1) = (p,\ 0,\ s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\vec{e} = (0,\ q,\ 0) + t(0,\ 0,\ 1) = (0,\ q,\ t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ はともに $\vec{n} = (-u, -v,\ 1)$ に垂直であるから

$$p\cdot(-u) + s\cdot 1 = 0, \quad q\cdot(-v) + t\cdot 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = pu, \quad t = qv$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (p,\ 0,\ pu)$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (0,\ q,\ qv)$

よって　R$(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{pu})$，S$(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{qv})$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = p(1,\ 0,\ u)$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = q(0,\ 1,\ v)$

$p > 0$，$q > 0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ のなす角 θ は，2 つのベクトル

$$\vec{r} = \frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1,\ 0,\ u), \quad \vec{s} = \frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (0,\ 1,\ v)$$

のなす角であるから

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}||\vec{s}|} = \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}} = \boldsymbol{\frac{uv}{\sqrt{(1+u^2)(1+v^2)}}}$$

(3) O(0, 0, 0)，P(p, 0, 0)，Q(0, q, 0) を頂点とする △OPQ の面積は $\dfrac{1}{2}pq$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = p\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = q\vec{s}$ より

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ORS} &= \frac{1}{2}pq\sqrt{|\vec{r}|^2|\vec{s}|^2 - (\vec{r}\cdot\vec{s})^2} \\ &= \frac{1}{2}pq\sqrt{(1+u^2)(1+v^2) - (uv)^2} \\ &= \frac{1}{2}pq\sqrt{1+u^2+v^2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\triangle\mathrm{OPQ} : \triangle\mathrm{ORS} = 1 : \sqrt{1+u^2+v^2}}$　■

4 (1) $f(x)=\log x$ より $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

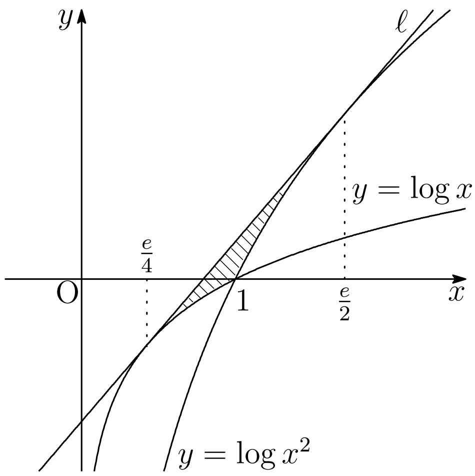
$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{x}{a}+\log a-1}$$

(2) $g(x)=\log x^2$ より $g'(x)=\dfrac{2}{x}$

$y=g(x)$ 上の点 $(b,\ g(b))$ における接線の方程式は

$$y-\log b^2=\frac{2}{b}(x-b)$$

すなわち $y=\dfrac{2x}{b}+2\log b-2$



これと (1) で求めた接線が一致するとき

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}, \quad \log a-1=2\log b-2$$

上の第1式から $b=2a$ これを第2式に代入して整理すると

$$2\log 2a-\log a=1 \quad \text{ゆえに} \quad \log 4a=1 \quad \text{すなわち} \quad a=\frac{e}{4}$$

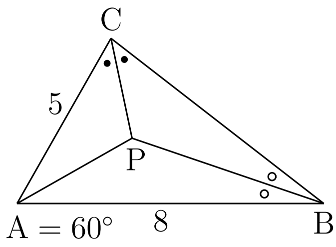
$a=\dfrac{e}{4}$ を (1) の結果に代入して $\boldsymbol{y=\dfrac{4x}{e}-\log 4}$

(3) $b=2a=\dfrac{e}{2}$，求める面積は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}}\left(\frac{4x}{e}-\log 4\right)dx-\int_{\frac{e}{4}}^{1}\log x\,dx-\int_{1}^{\frac{e}{2}}\log x^2\,dx\\&=\left[\frac{2x^2}{e}-x\log 4\right]_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}}-\Big[x(\log x-1)\Big]_{\frac{e}{4}}^{1}-\Big[2x(\log x-1)\Big]_{1}^{\frac{e}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{8}e-1}\end{aligned}$$

■

5 (1) PA，PB，PC はそれぞれ ∠A，∠B，∠C の二等分線であるから，$B = 2\beta$，$C = 2\gamma$ とおくと



$$2\beta + 2\gamma = 180^\circ - A = 120^\circ$$

ゆえに　$\beta + \gamma = 60^\circ$

よって　$\angle \mathrm{BPC} = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \mathbf{120^\circ}$

(2) 余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot5\cdot8\cos 60^\circ = 49 \quad \text{よって} \quad \mathrm{BC} = 7$$

BP は △ABC の外接円の半径であるから，正弦定理により

$$2\mathrm{BP} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$

よって　$\mathrm{BP} = \dfrac{7}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{7}{3}\sqrt{3}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot5\cdot8\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$

辺 BC の中点を M とすると，P は AM を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\triangle\mathrm{PBC} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \boldsymbol{\frac{10}{3}\sqrt{3}}$$

■

$\boxed{6}$ (1) 特性方程式 $x=1+\dfrac{1}{x}$，すなわち，$x^2-x-1=0$

の2つの解を $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n},\quad \alpha=1+\frac{1}{\alpha}$$

上の2式から　$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{a_n-\alpha}{\alpha a_n}$　$\cdots$①

同様に　$a_{n+1}-\beta=-\dfrac{a_n-\beta}{\beta a_n}$　$\cdots$②

①，②から　$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　ゆえに　$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$

$\alpha+\beta=1$ より　$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\dfrac{\beta^n}{\alpha^n}$　したがって　$a_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$　$\cdots(*)$

よって　$a_n=\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=\boldsymbol{\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2\{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\}}}$

(2) $(*)$ より　$a_n=\dfrac{\alpha\{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$　■

$\boxed{7}$ (1) n 回投げたとき，5 以下の異なる目が n 回出る確率であるから

$$\boldsymbol{\frac{{}_5\mathrm{P}_n}{6^n}}$$

(2) 4 回投げたとき，硬貨がすべて表であるのは，次の (i)〜(iii) の場合である．

(i) 6 の目が 4 回出るとき $\cdots$ 6666 の 1 通り

(ii) 6 の目が 2 回出るとき (A は 5 以下の正の整数)

「A,A,6,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{4!}{2!2!} = 5\cdot 6 = 30$ (通り)

(iii) 6 の目が出ないとき (A，B は 5 以下の異なる正の整数)

「A,A,B,B」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{4!}{2!2!} = 10\cdot 6 = 60$ (通り)

「A,A,A,A」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1 = 5$ (通り)

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$(1+30+65)\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{96}{1296} = \boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

(3) 4 回投げた時点で裏になっている枚数と確率について，次のようになる．

(a) 裏になっている硬貨が 1 枚のとき (A,B は 5 以下の異なる正の整数)

「A,6,6,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{4!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$ (通り)

「A,A,B,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{P}_2\cdot\dfrac{4!}{2!} = 20\cdot 12 = 240$ (通り)

「A,A,A,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{4!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$ (通り)

よって　$(20+240+20)\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{280}{1296}$

(b) 裏になっている硬貨が 2 枚のとき (A,B,C は 5 以下の異なる正の整数)

「A,B,6,6」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{4!}{2!} = 10\cdot 12 = 120$ (通り)

「A,A,B,C」$\cdots$ $\quad 5\cdot{}_4\mathrm{C}_2\dfrac{4!}{2!} = 5\cdot 6\cdot 12 = 360$ (通り)

「A,A,A,B」$\cdots$ $\quad {}_5\mathrm{P}_2\cdot\dfrac{4!}{3!} = 20\cdot 4 = 80$ (通り)

よって　$(120+360+80)\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{560}{1296}$

(c) 裏になっている硬貨が 3 枚のとき (A,B,C は 5 以下の異なる正の整数)

「A,B,C,6」$\cdots$　${}_5\mathrm{C}_3 \cdot 4! = 10 \cdot 24 = 240$ (通り)

よって　$240\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{240}{1296}$

(d) 裏になっている硬貨が 4 枚のとき (A,B,C,D は 5 以下の異なる正の整数)

「A,B,C,D」$\cdots$　${}_5\mathrm{C}_4 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$ (通り)

よって　$120\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{120}{1296}$

(a)〜(d) から，求める値は

$$\sum_{t=1}^{4} tP(t) = 1 \cdot \frac{280}{1296} + 2 \cdot \frac{560}{1296} + 3 \cdot \frac{240}{1296} + 4 \cdot \frac{120}{1296} = \frac{2600}{1296} = \boldsymbol{\frac{325}{162}}$$

注意　(3) は確率変数 t の平均 (期待値) を求める問題.

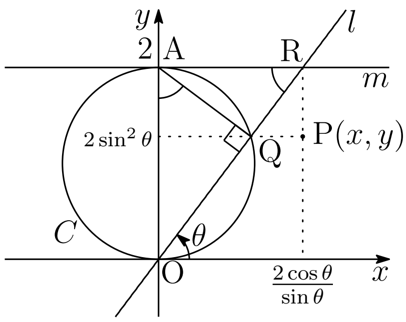
$$\sum_{t=0}^{4} P(t) = 1$$

上式を満たすことを確認して計算する必要がある.

t	0	1	2	3	4	計
$P(t)$	$\frac{96}{1296}$	$\frac{280}{1296}$	$\frac{560}{1296}$	$\frac{240}{1296}$	$\frac{120}{1296}$	1

■

$\boxed{8}$ (1) l と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $(0<\theta<\pi)$，右の図から



$$\mathrm{OQ}=2\sin\theta,\quad \mathrm{OR}=\frac{2}{\sin\theta}$$

したがって，$\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標は

$$x=\mathrm{OR}\cos\theta=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta},$$
$$y=\mathrm{OQ}\sin\theta=2\sin^2\theta$$

上の 2 式から

$$2\sin^2\theta=\frac{2\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{8}{4+\left(\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{y=\frac{8}{4+x^2}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-16(4+x^2)^2-(-16x)\cdot2(4+x^2)\cdot2x}{(4+x^2)^4}=\frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$$

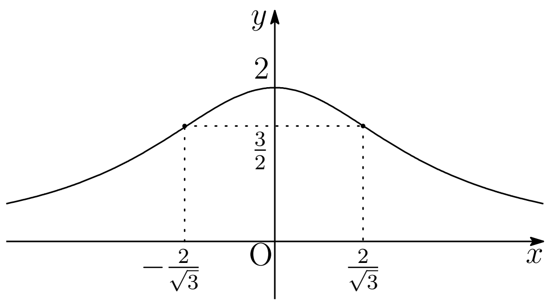
$y=f(x)$ の増減・凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{3}{2}$	↷	2	↘	$\frac{3}{2}$	⤷

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

よって　極大値 $f(0)=\boldsymbol{2}$，変曲点 $\boldsymbol{\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{2}\right)}$

また，グラフの概形は次のようになる．



(3) (1) の結果から，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{8}{4+x^2}\,dx$$

$x = 2\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2}{\cos^2\theta}$

x	$-2 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって $S = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{4+(2\tan\theta)^2} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\,d\theta = \Big[\, 4\theta \,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{7}{3}\pi}$ ■

7.5　2019 年

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)
- 教育学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を 1 でない正の定数，x，y を $5^x = 2^y = a$ を満たす実数とする．

(1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ とするとき，a の値を求めなさい．

(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = b$ とするとき，a^b の値を求めなさい．

(3) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2$ とするとき，a の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ △ABC において，点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろす．線分 AH を直径とする円 O と辺 AB，AC の交点をそれぞれ D，E とし，円 O の半径を 1，BH $= 1$，CE $= 3$ とする．

(1) 線分 DB の長さを求めなさい．

(2) 線分 HC と線分 CA の長さをそれぞれ求めなさい．

(3) ∠EDH の大きさを求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C_1 : y = -\dfrac{1}{x}\ (x > 0)$，曲線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{x}\ (x < 0)$，直線 $\ell : y = -x$，点 $\mathrm{P}\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$ とし，点 Q は C_2 上を動くとする．

(1) 曲線 C_1 と 2 つの直線 ℓ，$x = 2$ で囲まれた部分の面積 S_1 を求めなさい．

(2) 線分 PQ の長さが最小になる点 Q の x 座標を a とするとき，a の値を求めなさい．

(3) (2) で求めた a について，曲線 C_2 と 2 つの直線 ℓ，$x = a$ で囲まれた部分の面積 S_2 を求めなさい．

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある.

$$a_1 = 3,\ b_1 = 1$$
$$2a_{n+1} = 5a_n + b_n + 2^{n+1} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$2b_{n+1} = a_n + 5b_n - 2^{n+1} + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $c_n = a_n + b_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を n の式で表しなさい.

(2) $d_n = a_n - b_n$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項 d_n を n の式で表しなさい.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n の式で表しなさい.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. S_n を n の式で表しなさい.

5 $t \geqq 1$ とし,

$$f(t) = \int_0^1 |(x+t)(x-t+1)|\,dx$$

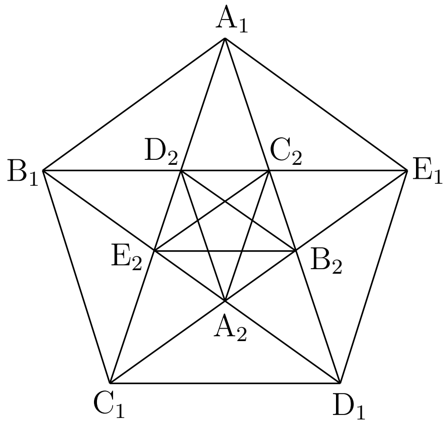
とする.

(1) $f(3)$ の値を求めなさい.

(2) $f(t)$ を t を用いて表しなさい.

(3) $f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めなさい.

6 一辺の長さが a の正五角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1}$ がある．対角線を結んで，内部に正五角形 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2}$ を図のように作る．さらに正五角形 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2E_2}$ の対角線を結んで，内部に正五角形 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3E_3}$ を作る．この操作を繰り返し，正五角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k\mathrm{E}_k$ の内部に正五角形 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{D}_{k+1}\mathrm{E}_{k+1}$ を作るとき，以下の問いに答えなさい．



(1) 正五角形 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1}$ の対角線 $\mathrm{B_1E_1}$ の長さを求めなさい．

(2) 正五角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k\mathrm{E}_k$ の一辺の長さを l_k とする．無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ の収束，発散について調べ，収束するならば和を求めなさい．

7 三角形 ABC を底面とする四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = 3$，$\mathrm{OB} = \mathrm{CA} = \sqrt{13}$，$\mathrm{OC} = \mathrm{AB} = 4$ とし，外接球面 (4 頂点 O，A，B，C のすべてを通る一つの球面) の中心を P とする．このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の形で表しなさい．ただし，x，y，z は実数とする．

8 微分可能な x の関数 $f(x)$，$g(x)$ について以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，$f'(x) - f(x) = 0$ が任意の実数 x に対して成り立つとき，関数 $f(x) \cdot e^{-x}$ は定数関数であることを示しなさい．ただし，e は自然対数の底とする．

(2) $g(x)$ とその導関数 $g'(x)$ について，$g'(x) - g(x) = x^2$ が任意の実数 x に対して成り立ち，さらに $g(0) = 0$ とする．このとき，$x > 0$ においてつねに $g(x) > 0$ となることを示しなさい．

解答例

1 (1) $5^x = 2^y = a$ より

$$x = \log_5 a = \frac{1}{\log_a 5},\quad y = \log_2 a = \frac{1}{\log_a 2} \quad \cdots(*)$$

したがって　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \log_a 5 + \log_a 2 = \log_a 10 \quad \cdots①$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ より　$\log_a 10 = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$a^{\frac{1}{2}} = 10$　よって　$\boldsymbol{a = 100}$

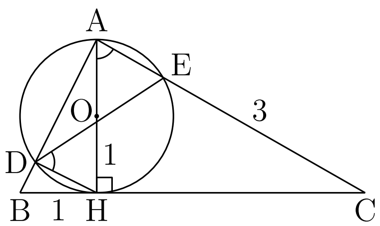
(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = b$ より，① から　$\log_a 10 = b$ よって　$\boldsymbol{a^b = 10}$

(3) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2$ より，$(*)$ から

$$\log_a 5 - \log_a 2 = 2 \quad ゆえに \quad \log_a \frac{5}{2} = 2$$

したがって　$a^2 = \dfrac{5}{2}$　　$a > 0$ であるから　$a = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$　■

2 (1) $\triangle$ABH に三平方の定理を適用すると



$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

方べきの定理により　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DB} = \mathrm{BH}^2$

$\sqrt{5}\cdot\mathrm{DB} = 1^2$　よって　$\mathbf{DB} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

(2) $\mathrm{CA} = x$ とおくと　$\mathrm{HC}^2 = \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AH}^2 = x^2 - 4$

方べきの定理により　$\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CE} = \mathrm{HC}^2$

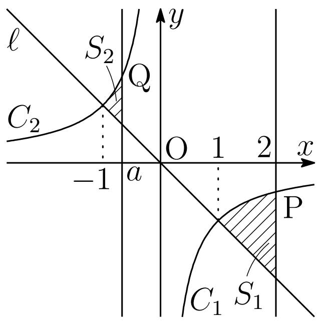
$$x\cdot 3 = x^2 - 4 \quad ゆえに \quad (x+1)(x-4) = 0$$

$x > 0$ より　$x = 4$，$\mathrm{HC}^2 = 4^2 - 2^2$　よって　$\mathbf{CA = 4}$，$\mathbf{HC} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$

(3) (2) の結果から　$\cos\angle\mathrm{CAH} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{CA}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{CAH} = 60^\circ$

円周角の定理により　$\angle\mathrm{EDH} = \angle\mathrm{EAH} = \mathbf{60^\circ}$　■

3 (1) S_1 は右の図の斜線部分の面積であるから



$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_1^2 \left\{-\frac{1}{x} - (-x)\right\} dx \\
&= \left[\ \frac{x^2}{2} - \log x\ \right]_1^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{2} - \log 2}
\end{aligned}
$$

(2) C_2 上の点を $\mathrm{Q}\left(t, -\dfrac{1}{t}\right)$ とし $(t < 0)$，$g(t) = \mathrm{PQ}^2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g(t) &= (t-2)^2 + \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 \\
g'(t) &= 2(t-2) + 2\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{t^2} = 2(t-2) + \frac{t-2}{t} \cdot \frac{1}{t^2} \\
&= (t-2)\left(2 + \frac{1}{t^3}\right) = \frac{(t-2)(2t^3+1)}{t^3}
\end{aligned}
$$

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$	(0)
$g'(t)$	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$t = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき，$g(t)$ は最小，すなわち，PQ は最小であるから　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

解説 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ と点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を $g(t) = \mathrm{PQ}^2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g(t) &= (t - x_0)^2 + (f(t) - y_0)^2, \\
g'(t) &= 2(t - x_0) + 2(f(t) - y_0)f'(t)
\end{aligned}
$$

C 上の点 Q における接ベクトルを $\vec{v} = (1,\ f'(t))$ とすると，$g'(t) = 2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}$.
$g'(t) = 0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \vec{v}$ となるから，直線 PQ は Q における法線である．
したがって，C 上の点 Q の法線で点 P を通るものとして求めてもよい．

(3) $-1 < a$ に注意して

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_{-1}^a \left\{-\frac{1}{x} - (-x)\right\} dx = \left[\ \frac{x^2}{2} - \log|x|\ \right]_{-1}^a \\
&= \frac{1}{2}(a^2 - 1) - \log|a| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1\right) - \log 2^{-\frac{1}{3}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{2}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log 2}
\end{aligned}
$$

■

4　(1)　　$a_1=3,\ b_1=1$

$$(*)\begin{cases} 2a_{n+1}=5a_n+b_n+2^{n+1}+4 & (n=1,2,3,\cdots) \\ 2b_{n+1}=a_n+5b_n-2^{n+1}+4 & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式の辺々を加えて整理すると

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)+4$$

$c_n=a_n+b_n$ より　$c_{n+1}=3c_n+4$　ゆえに　$c_{n+1}+2=3(c_n+2)$

$\{c_n+2\}$ は，初項 $c_1+2=(a_1+b_1)+2=6$，公比 3 の等比数列であるから

$$c_n+2=6\cdot3^{n-1}\quad よって\quad \boldsymbol{c_n=2\cdot3^n-2}$$

(2)　$(*)$ の第 1 式と第 2 式の辺々の差をとり，整理すると

$$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)+2^{n+1}$$

$d_n=a_n-b_n$ より　$d_{n+1}=2d_n+2^{n+1}$　ゆえに　$\dfrac{d_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{d_n}{2^n}+1$

$\left\{\dfrac{d_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{d_1}{2}=\dfrac{a_1-b_1}{2}=1$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{d_n}{2^n}=1+(n-1)\cdot1\quad よって\quad \boldsymbol{d_n=n\cdot2^n}$$

(3)　(1)，(2) の結果から　$a_n+b_n=2\cdot3^n-2$

$a_n-b_n=n\cdot2^n$

上の 2 式から，b_n を消去して整理すると　$\boldsymbol{a_n=n\cdot2^{n-1}+3^n-1}$

(4)　(3) の結果から　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\cdot2^{k-1}+3^k-1)$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} T_n &= 1+\ 2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1} \\ 2T_n &= \qquad 1\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n \end{aligned}$$

ゆえに　$-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n\cdot2^n$

$=-(n-1)2^n-1$

$T_n=(n-1)\cdot2^n+1$ により

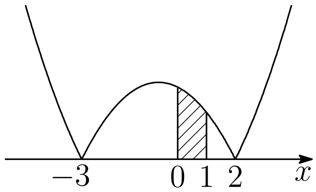
$$S_n=T_n+\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=(n-1)\cdot2^n+1+\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n$$

$$=\boldsymbol{(n-1)\cdot2^n+\frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{1}{2}}$$

■

5 $f(t)=\displaystyle\int_0^1 |(x+t)(x-t+1)|\,dx \quad \cdots(*)$

(1) $(*)$ に $t=3$ を代入して



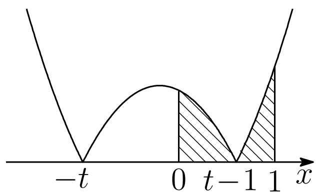
$$
\begin{aligned}
f(3) &= \int_0^1 |(x+3)(x-2)|dx \\
&= \int_0^1 \{-(x+3)(x-2)\}dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^1 = \mathbf{\frac{31}{6}}
\end{aligned}
$$

(2) $g(x)=(x+t)(x-t+1)=x^2+x-t(t-1)$ とおき，その原始関数の 1 つを

$$G(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-t(t-1)x \quad \cdots(**)$$

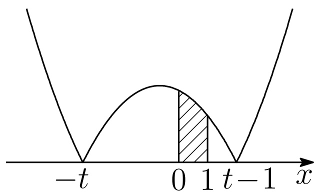
とおく．$t \geqq 1$ より，$-t<0 \leqq t-1$ に注意して

(i) $t-1 \leqq 1$，すなわち，$1 \leqq t \leqq 2$ のとき



$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^1 |g(x)|\,dx \\
&= -\int_0^{t-1} g(x)\,dx + \int_{t-1}^1 g(x)\,dx \\
&= G(1)+G(0)-2G(t-1)
\end{aligned}
$$

(ii) $1 \leqq t-1$，すなわち，$2 \leqq t$ のとき



$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^1 |g(x)|\,dx \\
&= -\int_0^1 g(x)\,dx = G(0)-G(1)
\end{aligned}
$$

$(**)$ より　$G(0)=0,\quad G(1)=-t^2+t+\dfrac{5}{6},$

$$
\begin{aligned}
G(t-1) &= \frac{1}{3}(t-1)^3+\frac{1}{2}(t-1)^2-t(t-1)^2 \\
&= -\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t+\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

上式および (i)，(ii) の結果から

$$
\boldsymbol{f(t)=\begin{cases} \dfrac{4}{3}t^3-4t^2+3t+\dfrac{1}{2} & (1 \leqq t \leqq 2) \\ t^2-t-\dfrac{5}{6} & (2 \leqq t) \end{cases}}
$$

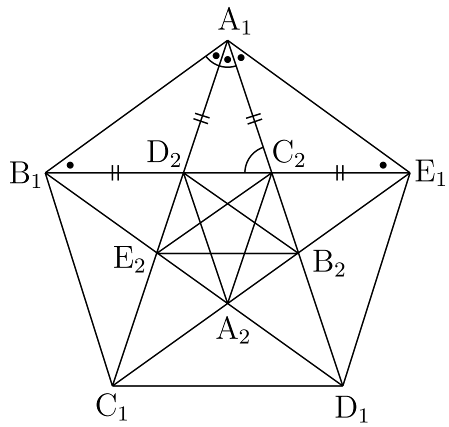
(3) (2) の結果から

$$f'(t) = \begin{cases} (2t-1)(2t-3) & (1 < t \leqq 2) \\ 2t-1 & (2 \leqq t) \end{cases}$$

t	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\nearrow$

よって　最小値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ ■

6 (1) 正五角形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ は，円に内接し，それぞれの辺に対する円周角が 36° であることに注意して



$$B_1D_2 = A_1D_2 = A_1C_2 = C_2E_1 = x$$

とおくと，$B_1A_1 = B_1C_2 = a$ より

$$C_2D_2 = B_1C_2 - B_1D_2 = a - x$$

$\triangle B_1C_2A_1 \backsim \triangle A_1D_2C_2$ より

$$a : x = x : a - x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$x > 0$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

よって　　$B_1E_1 = B_1C_2 + C_2E_1 = a + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a}$

(2) $C_2D_2 = a - x = a - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a$　ゆえに　$\dfrac{C_2D_2}{C_1D_1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

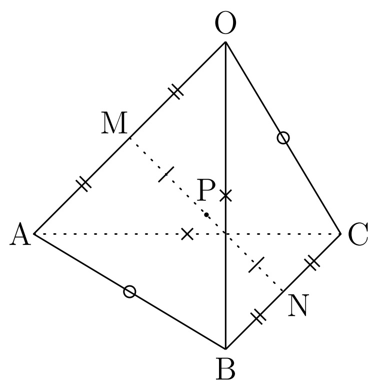
したがって，数列 $\{l_k\}$ は初項 a，公比 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列である．

$\left|\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ より，次の無限級数は収束し，その和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k = \frac{a}{1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a}$$

■

7　2 辺 OA，BC の中点をそれぞれ M，N とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \quad \cdots ①\\ \overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② の辺々を加えて 2 倍すると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{MN}\perp\mathrm{BC},\quad \mathrm{MN}\perp\mathrm{OA}$$

$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}$ より，線分 MN の中点を P とすると　$\mathrm{PO}=\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$

したがって，点 P は 4 点 O，A，B，C を通る球の中心である．

よって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{OC}}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $f'(x)-f(x)=0$ より，$f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=0$ であるから

$$f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)(e^{-x})'=0 \quad ゆえに \quad \left\{f(x)\cdot e^{-x}\right\}'=0$$

上の第2式を積分すると

$$f(x)\cdot e^{-x}=C \quad (C\text{ は定数})$$

(2) $g'(x)-g(x)=x^2$ より，$g'(x)\cdot e^{-x}-g(x)\cdot e^{-x}=x^2e^{-x}$ であるから

$$g'(x)\cdot e^{-x}+g(x)(e^{-x})'=x^2e^{-x} \quad ゆえに \quad \left\{g(x)\cdot e^{-x}\right\}'=x^2e^{-x}$$

上の第2式を積分すると

$$\begin{aligned} g(x)\cdot e^{-x} &= \int x^2\cdot e^{-x}\,dx \\ &= -(x^2+2x+2)e^{-x}+C_1 \quad (C_1\text{は積分定数}) \end{aligned}$$

$g(0)=0$ より　$-2+C_1=0$　ゆえに　$C_1=2$

したがって
$$\begin{aligned} g(x) &= 2e^x-2-2x-x^2, \\ g'(x) &= 2e^x-2-2x, \\ g''(x) &= 2(e^x-1) \end{aligned}$$

上式より，$x>0$ において，$g''(x)>0$ であるから，$g'(x)$ は単調増加で

$$x>0 \text{ において} \quad g'(x)>g'(0)=0$$

さらに，$x>0$ において，$g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は単調増加で

$$x>0 \text{ において} \quad g(x)>g(0)=0$$

■

7.6　2020 年

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\triangle$ABC において AB $=3$，BC $=1$，$\angle$B $=90^\circ$ とする．$\angle$B の二等分線と辺 AC の交点を D とし，3 点 A，B，D を通る円と直線 BC の交点のうち点 B と異なる点を E とする．また，直線 AB と直線 DE の交点を F とする．

(1) 線分 AD の長さを求めなさい．

(2) 線分 BE の長さを求めなさい．

(3) 線分 AF の長さを求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2.\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$$

を満たすとする．s，t，k は

$$s\geqq 0,\quad t\geqq 0,\quad s+t=k$$

を満たす実数とし，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s-2t)\vec{a}+(s+t)\vec{b}$$

を満たしながら動くとする．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $|-2\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めなさい．

(2) $k=1$ のとき，点 P の存在範囲を求めなさい．

(3) $1\leqq k\leqq 2$ のとき，点 P の存在範囲を求めなさい．

(4) $1\leqq k\leqq 2$ のとき，点 P の存在範囲の面積を求めなさい．

3 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = (n+3)\left(\frac{1}{3}a_n - 2\right)$$

を満たすとする．

(1) a_1 を求めなさい．

(2) a_{n+1} を a_n，n を用いて表しなさい．

(3) 一般項 a_n を n を用いて表しなさい．

4 関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = \sin x + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt - \frac{3}{2}$$

を満たし，関数 $g(x)$ は

$$g(x) = -\int_0^x (x-t)\cos t\,dt + 1$$

とする．

(1) 関数 $f(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $g(x)$ の導関数を求めなさい．

(3) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ において，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

5 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 4x + 1$，$C_2 : y = x^2 + 2x - 5$ の両方に接する直線を ℓ とする．

(1) 2 つの放物線 C_1，C_2 の交点の座標を求めなさい．

(2) 直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

6 n を任意の正の整数とし，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ はともに n 回微分可能な関数とする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) 積 $f(x)g(x)$ の第 4 次導関数 $\dfrac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\}$ を求めなさい．

(2) 積 $f(x)g(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を類推し，その類推が正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ただし，r は負でない n 以下の整数とし，$f^{(0)}(x) = f(x)$，$g^{(0)}(x) = g(x)$ とする．

(3) 関数 $h(x) = x^3e^x$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ を求めなさい．ただし，e は自然対数の底であり，$n \geqq 4$ とする．

7 階段を上るとき，一度に上ることができる段数は 1 段または 2 段のみであるとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ちょうど 10 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

(2) n を正の整数とする．ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

8 座標平面上に動点 P があり，次のルールに従って移動するものとする．

ルール：サイコロ 1 個を振って，1，2，3 の目が出たら $(x,\ y) \to (x+1,\ y)$ のように移動し，4，5 の目が出たら $(x,\ y) \to (x,\ y+1)$ のように移動するが，6 の目が出たら移動しない．

はじめ点 P は原点 (0, 0) にあるとして以下の問いに答えなさい．ただし，サイコロの目はどれも同様な確からしさで出るものとする．

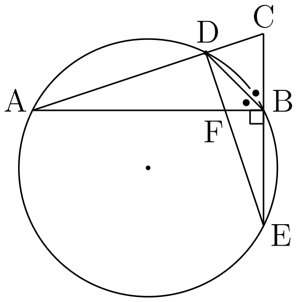
(1) 1 個のサイコロを 5 回振った時点で，点 P の座標が (3, 2) である確率を求めなさい．

(2) 1 個のサイコロを 5 回振った時点で，点 P の座標が (2, 2) である確率を求めなさい．

(3) k は正の整数であり，m，n は負でない整数とする．1 個のサイコロを k 回振った時点で，点 P の座標が $(m,\ n)$ である確率を $p_k(m,\ n)$ とする．和 $\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} p_k(m,\ k-m-1)$ を，k を用いて表しなさい．

解答例

1 (1) $\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ から，三平方の定理により



$$\mathrm{CA} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

BD は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{BC} = 3 : 1$$

よって $\mathrm{AD} = \dfrac{3}{3+1}\mathrm{CA} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}\sqrt{10}}$

(2) また，$\mathrm{CD} = \dfrac{1}{3+1}\mathrm{CA} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ 方べきの定理により $\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CE} = \mathrm{CD}\cdot\mathrm{CA}$

したがって $1\cdot(1 + \mathrm{BE}) = \dfrac{\sqrt{10}}{4}\cdot\sqrt{10}$ これを解いて $\mathbf{BE} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(3) $\angle\mathrm{ABE} = 90^\circ$ であるから，AE は $\triangle\mathrm{ABE}$ の外接円の直径である．
また，D はこの円周上の点であるから $\angle\mathrm{ADE} = 90^\circ$
したがって $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{ADF}$ ゆえに $\mathrm{AC} : \mathrm{AB} = \mathrm{AF} : \mathrm{AD}$ より

$$\sqrt{10} : 3 = \mathrm{AF} : \frac{3}{4}\sqrt{10} \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{AF} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

■

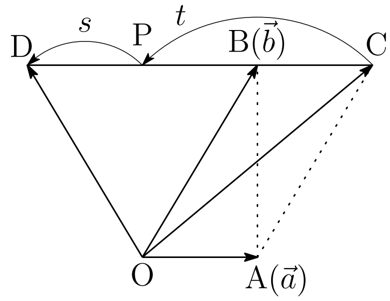
2 (1) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ より $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$
これに $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$ を代入すると

$$1 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4 = 7 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 1}$$

また
$$\begin{aligned} |-2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 2^2 = 4 \end{aligned}$$

よって $|-2\vec{a} + \vec{b}| = \mathbf{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s - 2t)\vec{a} + (s + t)\vec{b}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s(\vec{a} + \vec{b}) + t(-2\vec{a} + \vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{a} + \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\vec{a} + \vec{b}$ とおくと

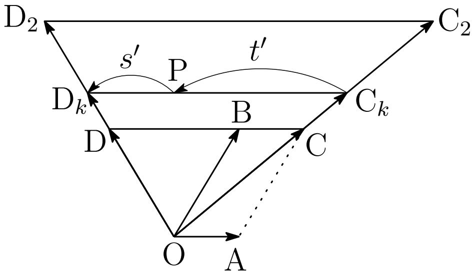
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots (*)$$

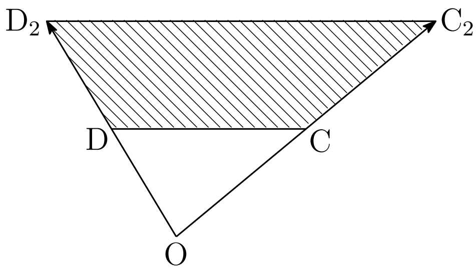
点 P は線分 CD を $t : s$ に内分する点である ($s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ s + t = 1$)．
よって，P は線分 CD 上 (両端を含む) にある．

(3) $(*)$ において，$s = ks'$，$t = kt'$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}_k} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}_k} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく $(s' \geqq 0,\ t' \geqq 0,\ s' + t' = 1)$．なお，点 C_1，D_1 はそれぞれ C，D である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = ks'\overrightarrow{\mathrm{OC}} + kt'\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OC}_k} + t'\overrightarrow{\mathrm{OD}_k}$$

点 P は線分 $\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$ を $t' : s'$ に内分する点である．$1 \leqq k \leqq 2$ より，P の存在する範囲は，図の斜線部分の台形 $\mathrm{CC}_2\mathrm{D}_2\mathrm{D}$ の内部および境界線である．





(4) $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{1}{2}$ ゆえに $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{a} + \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\vec{a} + \vec{b}$ より $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = 3\vec{a} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

したがって $\triangle\mathrm{OCD} = 3\triangle\mathrm{OAB} = 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

よって，求める面積は $(2^2 - 1)\triangle\mathrm{OCD} = 3\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{3}}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$S_n = (n+3)\left(\frac{1}{3}a_n - 2\right) \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると，$S_1 = a_1$ であるから，$(*)$ より

$$a_1 = 4\left(\frac{1}{3}a_1 - 2\right) \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_1 = 24}$$

(2) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから

$$a_{n+1} = (n+4)\left(\frac{1}{3}a_{n+1} - 2\right) - (n+3)\left(\frac{1}{3}a_n - 2\right)$$

したがって　$\boldsymbol{a_{n+1} = \dfrac{(n+3)a_n}{n+1} + \dfrac{6}{n+1}}$

(3) (2) の結果の両辺を $(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{3(n+3)-3(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

整理すると　$\dfrac{a_{n+1}+3}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{a_n+3}{(n+1)(n+2)}$

したがって　$\dfrac{a_n+3}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{24+3}{2\cdot 3}$

よって　$a_n = \dfrac{9}{2}(n+1)(n+2) - 3 = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}(3n^2+9n+4)}$　■

4 (1) $$f(x) = \sin x + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt - \frac{3}{2} \quad \cdots (*)$$

$k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ とおくと，$f(x) = \sin x + 3k - \dfrac{3}{2} \cdots$ ① より

$$\begin{aligned} k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t + 3k - \frac{3}{2}\right)\cos t\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin^2 t + \left(3k - \frac{3}{2}\right)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3k - 1 \end{aligned}$$

したがって　$k = \dfrac{1}{2}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$

(2) $$g(x) = -\int_0^x (x-t)\cos t\,dt + 1 \quad \cdots (**)$$

$(**)$ より，$g(x) = -x\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt + \int_0^x t\cos t\,dt + 1$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\int_0^x \cos t\,dt - x\cos x + x\cos x \\ &= -\Big[\sin t\Big]_0^x = \boldsymbol{-\sin x} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果を積分すると　$g(x) = \cos x + C$　(C は積分定数)

$(**)$ より，$g(0) = 1$ であるから

$$1 + C = 1 \quad ゆえに \quad C = 0 \quad したがって \quad g(x) = \cos x$$

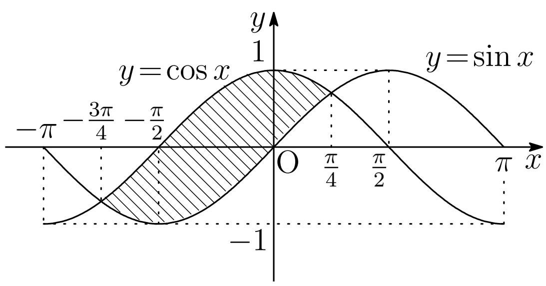
ここで　$g(x) - f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $y = g(x)$ と
$y = f(x)$ の共有点の x 座標は

$$x = -\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}$$

区間 $-\dfrac{3\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において

$$g(x) - f(x) \geqq 0$$



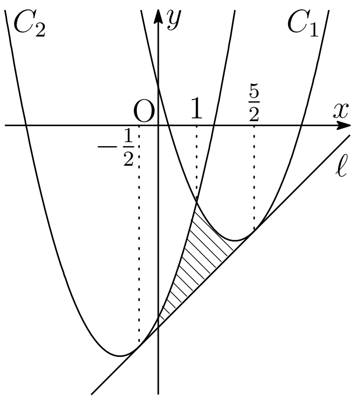
求める面積は　$\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx = \left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$

■

$\boxed{5}$ (1) $C_1 : y = x^2 - 4x + 1$，$C_2 : y = x^2 + 2x - 5$ から y を消去すると

$$x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x - 5 \quad \text{ゆえに} \quad x = 1 \quad \text{交点は} \quad \boldsymbol{(1, -2)}$$

(2) ℓ の方程式を $y = ax + b$ とする．



C_1 と ℓ から y を消去すると

$$x^2 - 4x + 1 = ax + b$$

ゆえに　$x^2 - (a+4)x - b + 1 = 0 \quad \cdots ①$

C_2 と ℓ から y を消去すると

$$x^2 + 2x - 5 = ax + b$$

ゆえに　$x^2 + (2-a)x - b - 5 = 0 \quad \cdots ②$

①，② の方程式はともに重解をもつから，それぞれの係数について

$$(a+4)^2 - 4(-b+1) = 0, \quad (2-a)^2 - 4(-b-5) = 0$$

上の 2 式をそれぞれ整理すると

$$\begin{cases} a^2 + 8a + 4b + 12 = 0 \\ a^2 - 4a + 4b + 24 = 0 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad a = 1,\ b = -\frac{21}{4} \quad \cdots (*)$$

よって，直線 ℓ の方程式は　$\boldsymbol{y = x - \frac{21}{4}}$

(3) $(*)$ を ①，② に代入すると

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0, \qquad x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

C_1，C_2 と直線 ℓ の接点の x 座標は，それぞれ　$x = \frac{5}{2}$，$-\frac{1}{2}$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left\{x^2 + 2x - 5 - \left(x - \frac{21}{4}\right)\right\} dx + \int_{1}^{\frac{5}{2}} \left\{x^2 - 4x + 1 - \left(x - \frac{21}{4}\right)\right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_{1}^{\frac{5}{2}} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{2}} = \boldsymbol{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

■

6 (1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\} \\
&= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\
&= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\
\frac{d^3}{dx^3}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)\} + 2\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(2)}(x)\} \\
&= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 2\left\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\right\} \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\
&= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 3f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\
\frac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(3)}(x)g^{(0)}(x)\} + 3\frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)\} \\
&\qquad + 3\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(3)}(x)\} \\
&= f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 3\left\{f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)\right\} \\
&\qquad + 3\left\{f^{(2)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x)\right\} \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x) \\
&= \boldsymbol{f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + 4f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + 6f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)} \\
&\qquad \boldsymbol{+4f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x)}
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を ${}_n\mathrm{C}_r$ であると推定すると

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \quad \cdots (*)$$

[1] ① から　$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = {}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + {}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)$

したがって，$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\frac{d^k}{dx^k}\{f(x)g(x)\}=\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\{f(x)g(x)\} &= \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r\{f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)+f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\} \\
&= \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x) \\
&= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{r=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_{r-1} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) \\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k}({}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1})f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad\qquad + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) \\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\qquad\qquad + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)
\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ が成立する．

(3) $h(x) = x^3 e^x = e^x x^3$ について，(2) の結果を適用すると $(n \geqq 4)$

$$
\begin{aligned}
h^{(n)}(x) &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{3} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} + \sum_{r=4}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{3} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)} (x^3)^{(r)} \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 e^x \cdot x^3 + {}_n\mathrm{C}_1 e^x \cdot 3x^2 + {}_n\mathrm{C}_2 e^x \cdot 6x + {}_n\mathrm{C}_3 e^x \cdot 6 \\
&= \boldsymbol{e^x \{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}}
\end{aligned}
$$

補足　(2) の結果は，ライプニッツ (Leibniz) の公式と呼ばれている． ■

$\boxed{7}$　(1) 与えらた規則により，n 段の階段を上る方法を a_n 通りとすると

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

が成立する．これから，順次

$$
\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3, \\
a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5, \\
a_5 &= a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8, \\
a_6 &= a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13, \\
a_7 &= a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21, \\
a_8 &= a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34, \\
a_9 &= a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55, \\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89
\end{aligned}
$$

よって　**89** 通り

(2) (1) より，特性方程式

$$x^2 = x + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$　$\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

したがって　$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$(*)$ から　$a_0 = 1$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta^n(a_1 - \alpha a_0) = \beta^n(1 - \alpha) = \beta^{n+1} \\ a_{n+1} - \beta a_n &= \alpha^n(a_1 - \beta a_0) = \alpha^n(1 - \beta) = \alpha^{n+1} \end{aligned}$$

上の2式から　$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$　ゆえに　$a_n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

方程式 $(**)$ の解は　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　ゆえに　$\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$，　$\beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

よって，階段をちょうど n 段上る方法は

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

■

8 (1) 1，2，3 の目が 3 回，4，5 の目が 2 回出る確率であるから

$$\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(2) 1，2，3 の目が 2 回，4，5 の目が 2 回，6 の目が 1 回出る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(3) $p_k(m,\ k-m-1)$ は，1，2，3 の目が m 回，4，5 の目が $k-m-1$ 回，6 の目が 1 回出る確率であるから

$$
\begin{aligned}
p_k(m,\ k-m-1) &= \frac{k!}{m!(k-m-1)!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\frac{1}{6} \\
&= \frac{k}{6}\cdot\frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k-1} p_k(m,\ k-m-1) &= \frac{k}{6}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1} \\
&= \frac{k}{6}\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)^{k-1} = \boldsymbol{\frac{k}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}
\end{aligned}
$$

■

第 8 章　宮崎大学

出題分野

(工学部　医学部　教育理系　教育文系　農学部)

工学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	宮崎大学 工学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	式と証明										
	複素数と方程式	5			4						
II	図形と方程式								2		
	三角関数					4					
	指数関数と対数関数		2	2	5		3				
	微分法と積分法	2		5							
	式と曲線						2				
	複素数平面							4		4	
	関数										
III	極限										
	微分法とその応用	1	1	1	1	1	1	1·2	1·5	1·2	1·2
	積分法	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1·2
	積分法の応用		4		2			2	5	2	
	場合の数と確率		5*	4*		3	4		4		5
A	整数の性質									5	
	図形の性質										
	平面上のベクトル	4		3		2					
B	空間のベクトル		3		3			3	3	3	3
	数列	3		2							4
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

医学部 出題分野 (2011-2020) 120分

	◀ 宮崎大学 医学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	式と証明										
	複素数と方程式									9	
	図形と方程式				6				2		
	三角関数			7		4				6	8
	指数関数と対数関数	7	2	7			3				
	微分法と積分法										
III	式と曲線						2				
	複素数平面										7
	関数										
	極限	8		6	7						
	微分法とその応用									8	
	積分法										
	積分法の応用		4	8	2	6	6	7		8	9
A	場合の数と確率	6*	6*	9*	8*	7	4	8	4	7	10
	整数の性質							5			
	図形の性質		7								
B	平面上のベクトル	4		3		2	5		6·7		6
	空間のベクトル		3		3			6·7		3	
	数列	3				5		6			
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

教育学部理系 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	宮崎大学 教育理系	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式	9	8					9			
	三角関数									11	8
	指数関数と対数関数	10									
	微分法と積分法										
III	式と曲線										
	複素数平面										
	関数										
	極限			6	11						
	微分法とその応用	1	1	1	1	1	1	2	5	2	1
	積分法	1	1	1	1	1	1·9				1
	積分法の応用									2	
A	場合の数と確率	6*	6*	4*	10	3	4			10	
	整数の性質						8	10	9	5	11
	図形の性質		9		9		7				
B	平面上のベクトル	4		3·10					7		
	空間のベクトル		3		3	8		3	3		
	数列					10	8				4
	確率分布と統計										

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

教育学部文系　出題分野 (2011-2020) 90 分

◀	宮崎大学 教育文系	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	式と証明										
	複素数と方程式			11							
	図形と方程式										
	三角関数										
	指数関数と対数関数	11		12							
	微分法と積分法	13	11	5	12	12	11	12	10	12	12
A	場合の数と確率	12	5		10		10	11		10	
	整数の性質								9	5	11
	図形の性質			12	9	11	7				
B	平面上のベクトル								7		
	空間のベクトル							3			3
	数列		10			10					
	確率分布と統計										

数字は問題番号

農学部　出題分野 (2012-2020) 90 分

◀	宮崎大学 農学部	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	式と証明									
	複素数と方程式		11							
	図形と方程式									
	三角関数									
	指数関数と対数関数		12							
	微分法と積分法	11	5	12	12	11	12	10	12	12
A	場合の数と確率	5		10		10	11		10	
	整数の性質							9	5	11
	図形の性質		12	9	11	7				
B	平面上のベクトル							7		
	空間のベクトル						3			3
	数列	10			10					
	確率分布と統計									

数字は問題番号

8.1　2015 年

- 工学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{8}$ 〜 $\boxed{10}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部　$\boxed{10}$ 〜 $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

1 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \sin(\cos x)$

(b) $y = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x \cos x|\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{\frac{3}{4-3x^2}} \right) dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 x^3 \log x\, dx$

2 平面上に 3 点 O，A，B があり，OA $=2$，OB $=3$，$\angle$AOB $= \dfrac{\pi}{3}$ とする．点 A から直線 OB に垂線を下ろし，直線 OB との交点を H とする．また，点 B から直線 OA に垂線を下ろし，直線 OA との交点を I とする．直線 AH と直線 BI の交点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 線分 OP の長さを求めよ．

3 座標平面上に点 P があり，次のルールにより，点 P は移動する．

a，b，c の文字がそれぞれ 1 つずつ書かれた球 3 個が入った袋から，1 個取り出してそこに書かれている文字を読み，その文字が

a のとき，点 P は x 軸の正の方向へ 1 だけ移動し，
b のとき，点 P は x 軸の負の方向へ 1 だけ移動し，
c のとき，点 P は y 軸の正の方向へ 1 だけ移動する．

最初，点 P は原点 O にあるものとする．この試行を，取り出した球を元に戻しながら，5 回続けて行う．例えば，これによって得られた 5 個の文字が順に $b \to a \to c \to c \to a$ であるとすれば，上のルールにより，点 P の位置の座標は，

$$(0,\ 0) \to (-1,\ 0) \to (0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (0,\ 2) \to (1,\ 2)$$

と変化する．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) y 軸上で点 P の移動が終了する場合，終了したときの位置の座標をすべて求めよ．

(2) 点 P の移動が終了する位置の相異なる座標の個数を求めよ．

(3) 点 P の移動が終了する位置の座標 $(x,\ y)$ が $|x| \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ となる確率を求めよ．

4 $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ とする．このとき，変数 x の関数

$$\begin{aligned} f(x) = \cos 2x \cos x + 2a \sin 2x - 2\cos 2x - 8a \sin x \\ - (b+1)\cos x + 2(b+1) \end{aligned}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $X = \sin x$，$Y = \cos x$ とおくとき，

$$f(x) = (Y - \boxed{\text{ア}})(-\boxed{\text{イ}}X^2 + \boxed{\text{ウ}}X - b)$$

と表せる．ア，イ，ウに入る数，または a，b を用いた文字式を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲内に少なくとも 1 つの解をもつようなすべての a，b を座標平面上の点 $(a,\ b)$ として図示せよ．

5 数列 $\{a_n\}$ は

$$\sqrt[3]{3}\,{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4,\quad a_n > 0\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている．$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，a_{2k-1}(k は自然数) を，k を用いて表せ．

6 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ を満たす θ について，$r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$ とするとき，座標平面上で円 $x^2 + y^2 = \{r(\theta)\}^2$ と直線 $y = (\tan\theta)x$ は 2 つの交点をもつ．そのうち，x 座標が正であるものを P とし，P の x 座標を $f(\theta)$，y 座標を $g(\theta)$ とする．θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ の範囲で動かしたときの点 P の軌跡を C とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(\theta)$，$g(\theta)$ を求めよ．

(2) $g(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸，直線 $x = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

7 n を 2 以上の自然数とする．1 つの袋に 1 から n までの数を 1 つずつ書いた n 個の球と，数 0 を書いた 2 個の球が入っている．これら $(n+2)$ 個の球が入っている袋から，元に戻すことなく，1 個ずつ 3 回球を取り出し，その 3 個に書かれている数を取り出した順に a，b，c とする．事象 $a + b \leqq c$ の起こる確率を $P(n)$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) $P(3)$ を求めよ．

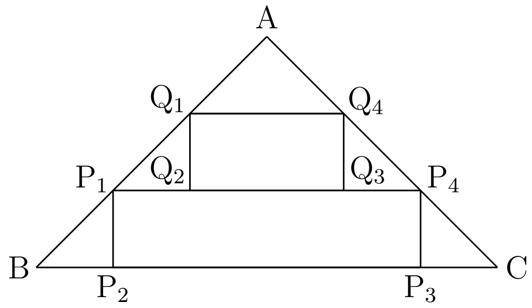
(2) n を偶数とするとき，$P(n)$ を，n を用いて表せ．

8 四面体 OABC の 3 辺 OA，AB，BC 上に，それぞれ点 P，Q，R がある．OP = PA，AQ = 2QB とし，点 R は点 B とは異なるものとする．△PQR の重心を H とするとき，次の各問に答えよ．ただし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ．

(2) △ABC の重心を G とする．3 点 O，G，H が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

9 右図の $\triangle$ABC は $\angle$A $= 90^\circ$ で AB $= 1$ の直角二等辺三角形である．この $\triangle$ABC の中に右図のように長方形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ と長方形 $\mathrm{Q_1Q_2Q_3Q_4}$ をおき，頂点 $\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{Q_1}$ が線分 AB 上に，頂点 $\mathrm{P_4}$ と $\mathrm{Q_4}$ が線分 AC 上にあるようにする．さらに，頂点 $\mathrm{P_2}$ と $\mathrm{P_3}$ がともに線分 BC 上に，頂点 $\mathrm{Q_2}$ と $\mathrm{Q_3}$ がともに線分 $\mathrm{P_1P_4}$ 上にあるようにする．$x = \mathrm{BP_2}$，$y = \mathrm{P_1Q_2}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) 長方形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積と長方形 $\mathrm{Q_1Q_2Q_3Q_4}$ の面積の和を，x と y を用いて表せ．

(2) x の値を固定して y の値を変化させるとき，長方形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積と長方形 $\mathrm{Q_1Q_2Q_3Q_4}$ の面積の和の最大値を $S(x)$ とおく．このとき，$S(x)$ を，x を用いて表せ．

(3) x の値を変化させるとき，(2) で求めた $S(x)$ の最大値を求めよ．

10 初項 $a_1 = 0$ と漸化式

$$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

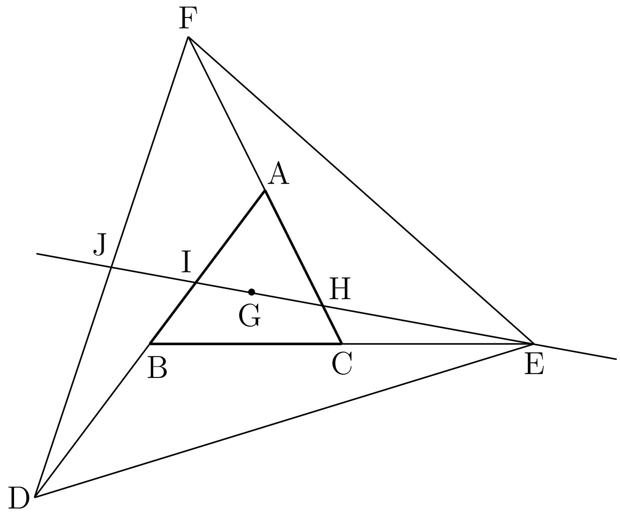
によって与えられる数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．ただし，$r \neq 0$，$r \neq 1$ とする．

(1) a_2，a_3，a_4 を，r を用いてそれぞれ表せ．

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算し，r，n を用いて表せ．

11 右図の △ABC において，辺 AB 上の延長上に AB = BD となる点 D がある．同様に，辺 BC の延長上に BC = CE となる点 E が，辺 CA の延長上に CA = AF となる点 F がそれぞれある．
△ABC の重心を G とし，直線 GE と線分 AC，AB，FD との交点をそれぞれ H，I，J とする．このとき，次の比を求めよ．



(1) CH : HA

(2) BI : IA

(3) DJ : JF

12 曲線 $C : y = |x^2 - 6x|$ と直線 $\ell : y = kx$ (k は実数) について，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C を座標平面上に図示せよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ が異なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和が最小になるような k の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) (a) $t=\cos x$ とおくと，$y=\sin t$ より $\dfrac{dy}{dt}=\cos t,\quad \dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\cos t\cdot(-\sin x)=\boldsymbol{-\cos(\cos x)\cdot\sin x}$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2}=\boldsymbol{\dfrac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2}}$

(2) (a) $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\left|\dfrac{1}{2}\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\dfrac{1}{2}\sin 2x\right|$ であるから，$\left|\dfrac{1}{2}\sin 2x\right|$ の周期は $\dfrac{\pi}{2}$

よって $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$

(b) $$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3+2x^2-3}{x^2-1}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x+\log(x+1)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{9}{8}+\log\frac{3}{2}}$$

(c) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ で $x=2\sin\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

したがって $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\,dx$ で $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくと

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$

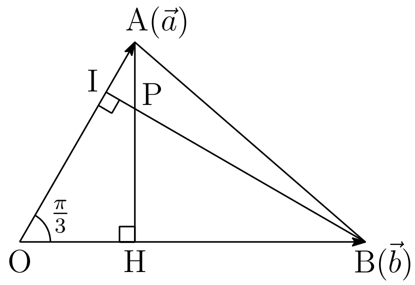
したがって $$\int_0^1\sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{4-4\sin^2\theta}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

よって $$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{\frac{3}{4-3x^2}}\right)dx=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(d) $$\int_1^2 x^3\log x\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}\right)'\log x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=4\log 2-\left[\frac{x^4}{16}\right]_1^2=\boldsymbol{4\log 2-\frac{15}{16}}$$

■

2 (1) $\mathrm{OH} = \mathrm{OA}\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$



ゆえに $\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{3}$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(2) (1) と同様にして $\mathrm{OI} = \mathrm{OB}\cos\dfrac{\pi}{3} = 3\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

ゆえに $\dfrac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{3}{4}\vec{a}$

上式および (1) の結果から $\vec{a} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$, $\vec{b} = 3\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3y\overrightarrow{\mathrm{OH}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{4}{3}x\overrightarrow{\mathrm{OI}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

P は 2 直線 AH，IB 上の点であるから

$$x + 3y = 1, \quad \frac{4}{3}x + y = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{9}$$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{9}\vec{b}}$

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$ より，(2) の結果から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= \left|\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{27}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{81}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{21}{9}\end{aligned}$$

よって $\mathrm{OP} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{3}}$ ■

3 (1) a，b，c の文字が書かれた球を取り出した個数をそれぞれ k_a，k_b，k_c とすると，y 軸上で点Pの移動が終了する場合，$k_a = k_b$，$k_a + k_b + k_c = 5$ より

$k_a = k_b = 0$ のとき　$k_c = 5$

$k_a = k_b = 1$ のとき　$k_c = 3$

$k_a = k_b = 2$ のとき　$k_c = 1$

よって，求める点Pの座標は　$\mathbf{(0,\ 5),\ (0,\ 3),\ (0,\ 1)}$

(2) 点Pの移動が終了する位置の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = k_a - k_b,\quad y = 5 - (k_a + k_b)\quad (0 \leqq k_a + k_b \leqq 5)$$

ここで，$j = k_a$，$k = k_a + k_b$ とおくと $(0 \leqq j \leqq k,\ 0 \leqq k \leqq 5)$，
$k_b = k - j$ であるから

$$x = j - (k - j) = 2j - k,\quad y = 5 - k\quad \cdots(*)$$

直線 $y = 5 - k$ 上に，点 $(x,\ y)$ は，$0 \leqq j \leqq k$ の $k + 1$ 個.
よって，求める座標の個数は

$$\sum_{k=0}^{5}(k+1) = 1+2+3+4+5+6 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7 = \mathbf{21}$$

(3) $1 \leqq y \leqq 2$ より，$k = 3,\ 4$ であるから

$k = 3$ のとき　$x = 2j - 3$，　$k = 4$ のとき　$x = 2j - 4$

また，$|\,x\,| \leqq 1$ であるから　$(k,\ j) = (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 2)$

$k_a = j$，$k_b = k - j$，$k_c = 5 - k$ であるから，上の $(k,\ j)$ に対して

$$(k_a,\ k_b,\ k_c) = (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$$

これらの場合の数は　$\dfrac{5!}{1!2!2!} \times 3 = 90$

よって，求める確率は　$\dfrac{90}{3^5} = \mathbf{\dfrac{10}{27}}$ ■

4 (1) a，$b+1$ に着目して整理すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x(\cos x-2)+2a(\sin 2x-4\sin x)-(b+1)(\cos x-2) \\ &= \cos 2x(\cos x-2)+4a\sin x(\cos x-2)-(b+1)(\cos x-2) \\ &= (\cos x-2)\{\cos 2x+4a\sin x-(b+1)\} \\ &= (\cos x-2)(-2\sin^2 x+4a\sin x-b) \\ &= (Y-2)(-2X^2+4aX-b) \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq X \leqq 1$，$0 \leqq Y \leqq 1$

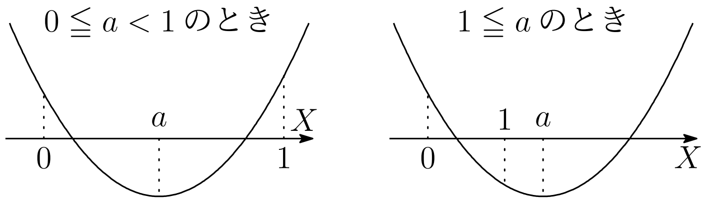
$Y-2 \neq 0$ であるから，$f(x)=0$ を満たすとき

$$-2X^2+4aX-b=0 \quad \text{すなわち} \quad 2X^2-4aX+b=0$$

ここで，$G(X)=2X^2-4aX+b$ とおくと

$$G(X)=2(X-a)^2-2a^2+b$$

方程式 $G(X)=0$ が $0 \leqq X \leqq 1$ の範囲内に少なくとも 1 つの解をもてばよいから，$G(0)=b \geqq 0$ に注意して，次の場合に分けて考える．



(i) $0 \leqq a < 1$ のとき，$G(a) \leqq 0$ より

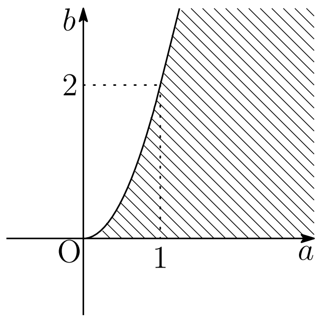
$$-2a^2+b \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq 2a^2$$

(ii) $1 \leqq a$ のとき，$G(1) \leqq 0$ より

$$2-4a+b \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad b \leqq 4a-2$$

よって　$0 \leqq b \leqq 2a^2 \quad (0 \leqq a < 1)$
　　　　$0 \leqq b \leqq 4a-2 \quad (1 \leqq a)$

点 $(a,\ b)$ の表す領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．



■

5 $a_n > 0$ であるから，$\sqrt[3]{3}{a_{n+2}}^3 = {a_n}^4$ の両辺を3を底とする対数をとると

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{n+2} = 4\log_3 a_n$$

$n = 2k-1$ (k は自然数) とおくと

$$\frac{1}{3} + 3\log_3 a_{2k+1} = 4\log_3 a_{2k-1}$$

さらに，$b_k = \log_3 a_{2k-1} \cdots$ ① とおくと (k は自然数)

$$b_1 = \log_3 a_1 = 0, \quad \frac{1}{3} + 3b_{k+1} = 4b_k$$

したがって　$b_{k+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}\left(b_k - \dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{b_k - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $-\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列であるから

$$b_k - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \quad ゆえに \quad b_k = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

① から　$\log_3 a_{2k-1} = \dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}$　よって　$\boldsymbol{a_{2k-1} = 3^{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\right\}}}$ ■

$\boxed{6}$ (1) $f(\theta) = x = r(\theta)\cos\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\ \cos\theta}$

$g(\theta) = y = r(\theta)\sin\theta = \boldsymbol{\sqrt{2\cos 2\theta}\ \sin\theta}$

(2) (1) の結果から

$$\{g(\theta)\}^2 = 2\cos 2\theta \sin^2\theta = 2(1 - 2\sin^2\theta)\sin^2\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より，$t = \sin^2\theta$，$h(t) = \{g(\theta)\}^2$ とおくと

$$h(t) = 2(1-2t)t = -4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$$

したがって，$h(t)$ の最大値は　$h\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

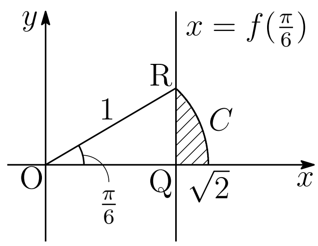
$g(\theta) \geqq 0$ であるから，$h(t)$ が最大のとき，$g(\theta)$ は最大となる．

よって，$g(\theta)$ の最大値は

$$t = \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき，最大値 } \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき　$r\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{3}} = 1$

右の図において



$$\mathrm{OR} = r\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OR}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{OR}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

求める面積を S とすると，図の斜線部分であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{r(\theta)\}^2\,d\theta - \triangle\mathrm{ORQ} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{RQ} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{7}$ (1) $n=3$ のとき，0, 0, 1, 2, 3 の数が書かれた 5 個の球を，数 0 が書かれた 2 個の球を 0_1, 0_2 と区別する．

0_1, 0_2, 1, 2, 3 の 5 つから 3 つとる a, b, c の順列の総数は

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3 = 60 \ (\text{通り})$$

$a+b \leqq c$ となる $(a,\ b)$ の組は c の値により，次の場合に分けられる．

(i) $c=1$ のとき，0_1, 0_2 の 2 つを並べる順列の総数であるから

$$2! = 2\cdot1 = 2 \ (\text{通り})$$

(ii) $c=2$ のとき，0_1, 0_2, 1 の 3 つから 2 つとる順列の総数であるから

$${}_3\mathrm{P}_2 = 3\cdot2 = 6 \ (\text{通り})$$

(iii) $c=3$ のとき，0_1, 0_2, 1, 2 の 4 つから 2 つとる順列の総数であるから

$${}_4\mathrm{P}_2 = 4\cdot3 = 12 \ (\text{通り})$$

よって $$P(3) = \frac{2+6+12}{60} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) (iv) $a+b=c \cdots ①$ を満たすのは $c \geqq 3$，$a \neq 0$，$b \neq 0$ のときである．

c が奇数のとき，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は下に示した $c-1$ (組)

$$(a,\ b) = (1,\ c-1),\ (2,\ c-2), \cdots, (c-1,\ 1)$$

c が偶数のとき，$a \neq b$ により，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は $c-2$ (組)

したがって，① を満たす $(a,\ b)$ の組数は

$$c-1-\frac{1+(-1)^c}{2} = c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{c-1} \quad (c \geqq 3)$$

(v) a，b の少なくとも 1 つが 0 で $a+b \leqq c$ $(c \geqq 3)$ を満たす $(a,\ b)$ の組数は，0_1, 0_2, 1, 2, $\cdots$, $c-1$ の $c+1$ 個から 2 個とる順列の総数から 1, 2, $\cdots$, $c-1$ の $c-1$ 個から 2 個とる順列の総数を引いたものであるから

$${}_{c+1}\mathrm{P}_2 - {}_{c-1}\mathrm{P}_2 = (c+1)c-(c-1)(c-2) = 4c-2$$

$a+b \leqq c \cdots$ ② を満たす c の値は　$c \geqq 1$
c の値に対して ② を満たす $(a,\ b)$ の組の総数を $f(c)$ とする．
$c \geqq 3$ のとき，(iv)，(v) から

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{k=3}^{c}\left\{k-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{k-1}\right\}+4c-2 \\ &= \frac{1}{2}(c-2)(3+c)-\frac{3}{2}(c-2)+\frac{1}{2}\times\frac{1-(-1)^{c-2}}{1-(-1)}+4c-2 \\ &= \frac{1}{2}c^2+3c-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{c-1} \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

(i)，(ii) から　　$f(1)=2,\quad f(2)=6$

上の結果から，$c=1,\ 2$ のときも $(*)$ は成立するから

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{n} f(c) &= \sum_{c=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}c^2+3c-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{c-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{7}{4}n+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &= \frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)+\frac{1}{8}\{1-(-1)^n\} \end{aligned}$$

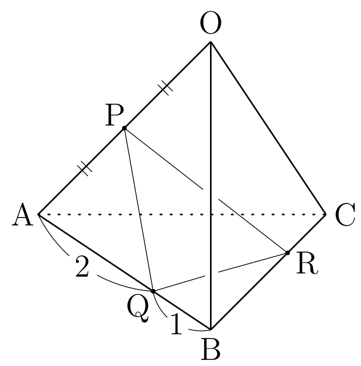
n が偶数のとき　　$\displaystyle\sum_{c=1}^{n} f(c)=\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2)$

よって

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{P}_3}\sum_{c=1}^{n} f(c) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)n}\times\frac{1}{12}n(2n^2+21n-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{2n^2+21n-2}{12(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

■

8　(1)　条件から，P は線分 OA の中点，Q は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

よって，△PQR の重心 H の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}}\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{5}{18}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

O，G，H は同一直線上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{5}{18}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad \cdots ①$$

G は平面 ABR 上の点であるから

$$\frac{5}{18}k+\frac{2}{9}k+\frac{1}{3}k = 1 \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{6}{5}$$

これを ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

また，G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

上の 2 式から　$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{6}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{c}}$　■

9 (1) $\mathrm{Q_1Q_2} = 2z$ とし，求める面積を S とすると

$$S = \triangle\mathrm{ABC} - x^2 - y^2 - z^2 \quad \cdots ①$$

$2x + 2y + 2z = \mathrm{BC} = \sqrt{2}$ であるから

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - (x+y) \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - x^2 - y^2 - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} - (x+y)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} - x^2 - y^2 - \left\{\frac{1}{2} - \sqrt{2}(x+y) + (x+y)^2\right\} \\ &= \boldsymbol{-2x^2 - 2xy - 2y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= -2y^2 + (\sqrt{2} - 2x)y - 2x^2 + \sqrt{2}x \\ &= -2\left(y^2 - \frac{\sqrt{2}-2x}{2}y\right) - 2x^2 + \sqrt{2}x \\ &= -2\left(y - \frac{\sqrt{2}-2x}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}-2x}{4}\right)^2 - 2x^2 + \sqrt{2}x \\ &= -2\left(y - \frac{\sqrt{2}-2x}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$y = \dfrac{\sqrt{2}-2x}{4}$ のとき，S は最大値 $-\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{1}{4}$ をとる．

よって $$\boldsymbol{S(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}}$$

(3) (2) の結果から $S(x) = -\dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \quad \left(0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

よって，$S(x)$ は，$x = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ をとる．

補足 (1) の結果は，x，y の対称式であるから，S が最大値をとるとき $x = y$

このとき $$S = -6x^2 + 2\sqrt{2}x = -6\left(x - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

よって，S は $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{3}$ をとる． ■

10 (1) $a_1 = 0$，$a_{n+1} = (1-r)r^{n-1} + r^2 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
上の漸化式に順次，$n = 1,\ 2,\ 3$ を代入すると

$$\begin{aligned}
a_2 &= (1-r)1 + r^2 a_1 = 1 - r + r^2 \cdot 0 = \boldsymbol{1-r} \\
a_3 &= (1-r)r + r^2 a_2 = r - r^2 + r^2(1-r) = \boldsymbol{r - r^3} \\
a_4 &= (1-r)r^2 + r^2 a_3 = r^2 - r^3 + r^2(r - r^3) = \boldsymbol{r^2 - r^5}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，第 n 項 a_n を

$$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3} \quad \cdots (*)$$

と推測する．

［1］ $n = 1$ のとき，$a_1 = r^{-1} - r^{-1} = 0$ であり，$(*)$ が成り立つ．

［2］ $n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つ，すなわち

$$a_k = r^{k-2} - r^{2k-3}$$

であると仮定すると

$$a_{k+1} = (1-r)r^{k-1} + r^2(r^{k-2} - r^{2k-3}) = r^{k-1} - r^{2k-1}$$

となり，$n = k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］ から，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) (2) の結果から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1} - (r^2)^{k-1}\}$

(i) $r \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\{r^{k-1} - (r^2)^{k-1}\} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{r^n - 1}{r-1} - \frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right) = \frac{1}{r}\left\{\frac{r^n-1}{r-1} - \frac{(r^n+1)(r^n-1)}{(r+1)(r-1)}\right\} \\
&= \frac{r^n - 1}{r(r+1)(r-1)}\{(r+1) - (r^n+1)\} = \boldsymbol{-\frac{(r^n-1)(r^{n-1}-1)}{(r+1)(r-1)}}
\end{aligned}$$

(ii) $r = -1$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k-1} - 1\} \\
&= -\left\{\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} - n\right\} = \boldsymbol{\frac{(-1)^n - 1}{2} + n}
\end{aligned}$$

補足 与えられた漸化式から

$$\begin{aligned} a_{n+1} - r^2 a_n &= (1-r)r^{n-1} \\ \frac{a_{n+1}}{r^{2n+2}} - \frac{a_n}{r^{2n}} &= \frac{1-r}{r^4}\left(r^{-1}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{r^{2k+2}} - \frac{a_k}{r^{2k}}\right) &= \frac{1-r}{r^4}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \\ \frac{a_n}{r^{2n}} &= \frac{1-r}{r^4} \times \frac{1-(r^{-1})^{n-1}}{1-r^{-1}} = -\frac{1-r^{-n+1}}{r^3} \end{aligned}$$

よって　　$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$

$a_1 = 0$ であるから，上式は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，一般項 a_n は　　$a_n = r^{n-2} - r^{2n-3}$ ■

11 (1) B，C の中点を M とし，直線 GE を ℓ とする．

△AMC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=\dfrac{1}{3}$　よって　$\mathbf{CH : HA = 1 : 3}$

(2) △ABC と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}=\dfrac{3}{2}$　よって　$\mathbf{BI : IA = 2 : 3}$

(3) (1),(2) の結果から

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=3:2+5=3:7, \quad \mathrm{FH}:\mathrm{HA}=4+3:3=7:3$$

△ADF と ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{7}\cdot\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}\cdot\frac{7}{3}=1$$

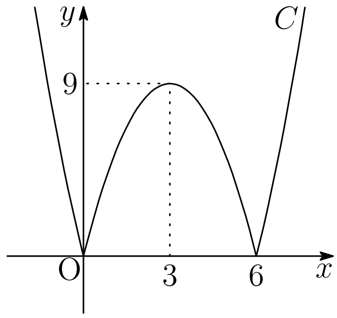
したがって　$\dfrac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{JF}}=1$　よって　$\mathbf{DJ : JF = 1 : 1}$　■

12 (1) $|x^2-6x| = \begin{cases} (x-3)^2-9 & (x \leqq 0,\ 6 \leqq x) \\ -(x-3)^2+9 & (0 \leqq x \leqq 6) \end{cases}$

したがって

$$C : y = |x^2-6x|$$

のグラフは，右の図のようになる．



(2) $y=-x^2+6x$ を微分すると　$y'=-2x+6$

$y=-x^2+6x$ の $x=0$ における接線の傾きは　$y'=6$

(1) のグラフから，C と ℓ が異なる 3 つの共有点をもつ k の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 < k < 6}$$

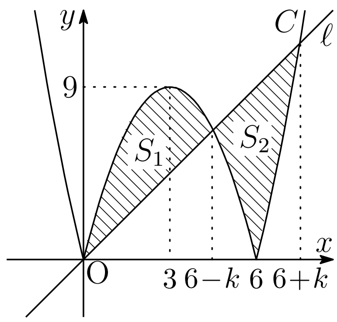
(3) C と ℓ の共有点の x 座標は

$x \leqq 0,\ 6 \leqq x$ のとき，

$$x^2-6x=kx \quad \text{よって} \quad x=0,\ 6+k$$

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき，

$$-x^2+6x=kx \quad \text{よって} \quad x=0,\ 6-k$$



$0 \leqq x \leqq 6-k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{6-k} \{-x^2+6x-kx\}\,dx \\ &= -\int_0^{6-k} x(x-6+k)\,dx = \frac{1}{6}(6-k)^3 \end{aligned}$$

$f(x)=x(x-6)$ とし，この原始関数を $F(x)$ とする．

$6-k \leqq x \leqq 6+k$ の範囲で C と ℓ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{6-k}^{6+k} \{kx-|f(x)|\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{6-k}^{6+k} + \int_{6-k}^{6} f(x)\,dx - \int_{6}^{6+k} f(x)\,dx \\ &= 12k^2 - F(6-k) - F(6+k) + 2F(6) \end{aligned}$$

C と ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を $S(k)$ とすると，
$S(k) = S_1 + S_2$ より

$$S(k) = \frac{1}{6}(6-k)^3 + 12k^2 - F(6-k) - F(6+k) + 2F(6)$$

これを k について微分すると

$$\begin{aligned} S'(k) &= -\frac{1}{2}(6-k)^2 + 24k + f(6-k) - f(6+k) \\ &= -\frac{1}{2}(6-k)^2 + 24k + (k^2-6k) - (k^2+6k) \\ &= -\frac{1}{2}(k^2 - 36k + 36) \end{aligned}$$

$S'(k) = 0$ とすると　　$k = 6(3 \pm 2\sqrt{2})$

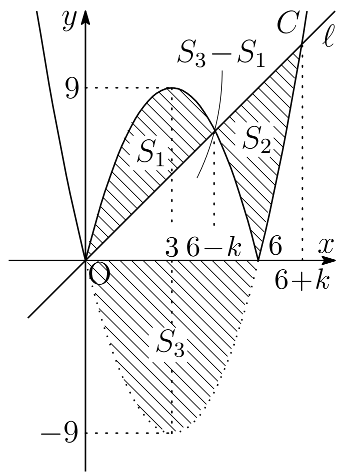
ここで　　$0 < 6(3-2\sqrt{2}) = \dfrac{6}{3+2\sqrt{2}} < 6 < 6(3+2\sqrt{2})$

したがって，$0 \leqq k \leqq 6$ における $S(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	0	$\cdots$	$6(3-2\sqrt{2})$	$\cdots$	6
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k = 6(3-2\sqrt{2})}$

補足 右の図から



$$S_3+(S_3-S_1)+S_2=\frac{1}{6}(6+k)^3$$

したがって

$$S(k)=S_1+S_2=\frac{1}{6}(6+k)^3+2S_1-2S_3$$

このとき

$$S_1=\frac{1}{6}(6-k)^3,\qquad S_3=\frac{1}{6}\cdot 6^3=36$$

よって
$$\begin{aligned}S(k)&=\frac{1}{6}(6+k)^3+2\times\frac{1}{6}(6-k)^3-2\times 36\\&=\frac{1}{6}(6+k)^3+\frac{1}{3}(6-k)^3-72\end{aligned}$$

これを微分すると
$$\begin{aligned}S'(k)&=\frac{1}{2}(6+k)^2-(6-k)^2\\&=-\frac{1}{2}(k^2-36k+36)\end{aligned}$$

■

8.2 2016 年

- 工学部 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部 $\boxed{2}$ 〜 $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部 $\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部 $\boxed{7}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(b) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_0^2 |\,e^x - 2\,|\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx$

$\boxed{2}$ 複素数 z の方程式 $z^3+i=z^2+iz$ (i は虚数単位) の 3 つの解を，その偏角 θ (ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$) の小さい順に α，β，γ とする．複素数平面上で，α，β，γ を表す点をそれぞれ A，B，C とし，直線 AC に関して B と対称な点を D，直線 AB に関して C と対称な点を E とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) α，β，γ を $x+yi$ (x，y は実数) の形でそれぞれ表せ．

(2) $\triangle$ABC の面積を求めよ．

(3) 複素数平面上で，3 点 A，D，E を通る円周上のどの複素数 z も，$z\overline{z}+sz+t\overline{z}+u=0$ を満たすような複素数の定数 s，t，u を求めよ．

3 $y>0$ とするとき，不等式

$$y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}}-6(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}})+10 \leqq 0$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $X=y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}$ とするとき，この不等式を，X を用いて表せ．

(2) この不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が表す図形を座標平面上に図示せよ．

4 A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

　A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

上の試行を n $(n \geqq 2)$ 回繰り返したとき，n 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を P_n とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) P_2，P_3 を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ のとき，

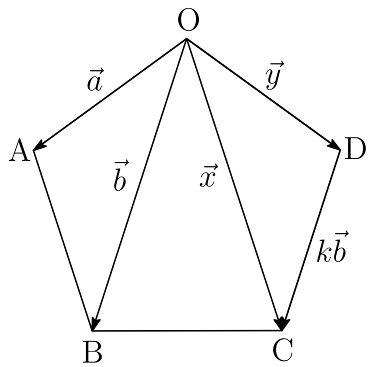
$$P_n=\frac{4}{9}P_{n-1}+\frac{20}{81}P_{n-2}+\frac{5\cdot 4^{n-1}}{9^n}$$

が成り立つことを示せ．

5 一辺の長さ 1 の正五角形 OABCD について，OB と DC は平行である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{x},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{y},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}=k\vec{b}\quad (k \text{ は実数})$$

とするとき，次の各問に答えよ．



(1) k の値を求め，$\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ．

6 $k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上の原点 O，点 A$(0,\ 1)$ に対し，第一象限の点 P を，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ を満たすように円 $D: x^2+y^2=1$ 上にとり，直線 OP と直線 $x=k\theta$ との交点を Q とする．θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすときの点 Q の軌跡を曲線 $y=f(x)$ とし，関数 $y=g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ で定める曲線を C とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $r(\theta)=\mathrm{OQ}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} r(\theta)$ の値を求めよ．

(2) 点 Q がつねに円 D の内部にあるための k の条件を求めよ．

(3) 関数 $g(x)$ の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形をかけ．

(4) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{4}k$，$x=\dfrac{\pi}{3}k$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を，k を用いて表せ．

7 $\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{C}=90^\circ$，AB : AC $=5:4$ とする．辺 BC の点 C 側の延長上に，CA $=$ CD となる点 D をとる．辺 AB の中点を E とし，点 B から直線 AD に下した垂線を BF とするとき，次の各問に答えよ．

(1) EF $=$ EC を示せ．

(2) 面積比 $\triangle$ABC : $\triangle$CEF を求めよ．

8 2 以上の自然数 n と自然数 a について，和

$$1\cdot(1+a)+2\cdot(2+a)+\cdots+(n-1)\{(n-1)+a\}$$

を S とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 6 と n が互いに素であるとき，すべての自然数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(2) n を 6 で割った余りが 2 であるとき，すべての奇数 a に対して，S は n で割り切れることを示せ．

(3) n を 6 で割った余りが 3 であるとき，すべての自然数 a に対して，S を n で割った余りを，n を用いて表せ．ただし，求める余りは，0 以上 $n-1$ 以下の範囲で求めよ．

9 $r>0$ とするとき，関数 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$f_1(x)=e^{-rx},$$
$$f_{n+1}(x)=nre^{-(n+1)rx}\int_0^x f_n(t)e^{(n+1)rt}\,dt \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f_n(x)$ を推測し，その推測が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $n\geqq 3$，$x>0$ のとき，関数 $f_n(x)$ の極値を求めよ．

10 A と B は，赤球 2 個と白球 1 個が入った袋をそれぞれ 1 つずつ持っている．次のような試行を考える．

　A と B が，それぞれ自分の持っている袋の中から無作為に球を 1 つ選び，色を見てからもとの袋に戻す．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 1 回の試行で，A と B が取り出した球の色が一致する確率を求めよ．

(2) 上の試行を 3 回繰り返したとき，3 回の試行の中で A と B が取り出した球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない確率を求めよ．

(3) 上の試行を 4 回繰り返したとき，4 回の試行の中のどこかで，A と B が取り出した球の色が一致することが 2 回続けて起こり，かつ 3 回以上続けて起こらない確率を求めよ．

11 関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2|x+1|+1$ に対し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする．点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>-1)$ における曲線 C の接線に垂直で，点 P を通る直線を ℓ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 直線 ℓ が点 $(-1,\ f(-1))$ を通るとき，t の中で最も小さいものを求めよ．

(3) (2) で求めた t が定める直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) (a) $y' = \dfrac{(x)'\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \dfrac{1\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

$$= \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{x+(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}}$$

(b) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}} = \log(\sqrt{1+x^2}+x)$ より

$$y' = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)'}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(2) (a) $\displaystyle\int_0^2 |\,x^2-2\,|\,dx = -\int_0^{\log 2}(e^x-2)\,dx + \int_{\log 2}^2 (e^x-2)\,dx$

$$= -\Big[\ e^x - 2x\ \Big]_0^{\log 2} + \Big[\ e^x-2x\ \Big]_{\log 2}^2$$
$$= (e^0 - 2{\cdot}0) + (e^2 - 2{\cdot}2) - 2(e^{\log 2} - 2\log 2)$$
$$= \boldsymbol{e^2 + 4\log 2 - 7}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos 4x\right)dx$

$$= \left[\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\sin 4x - \frac{1}{32}\cos 4x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{36}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi + \frac{3}{64}}$$

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx = \int_1^e (1+\log x)^{\frac{1}{2}}(1+\log x)'\,dx$

$$= \left[\ \frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}}\ \right]_1^e = \boldsymbol{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$$

(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx = \int_2^4 \frac{2x(x^2-1)+(x^2+2)}{(x^2-1)(x^2+2)}\,dx$

$$= \int_2^4 \left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$
$$= \left[\ \log(x^2+2) + \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}\ \right]_2^4$$
$$= \boldsymbol{2\log 3 - \frac{1}{2}\log 5}$$

■

2 (1) $z^3+i=z^2+iz$ より　$(z-1)(z^2-i)=0$　ゆえに　$z=1,\ z^2=i$

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ であるから，$z^2=i$ について $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると

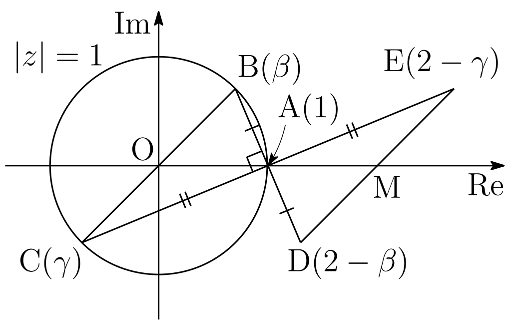
$$2\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\text{ は整数})\quad\text{ゆえに}\quad\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

よって，偏角に注意すると

$$\begin{aligned}\alpha&=\cos 0+i\sin 0=\mathbf{1}\\ \beta&=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{i}\\ \gamma&=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から



$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4},\quad\angle\mathrm{COA}=\frac{3}{4}\pi$$

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ であるから

$$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\triangle\mathrm{COA}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{AOB}+\triangle\mathrm{COA}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$

(3) 3 点 A，B，C を通る円は，BC を直径とする円であるから　AB$\perp$AC

したがって，A に関して D，E はそれぞれ B，C と対称であるから

$$\mathrm{D}(2-\beta),\quad\mathrm{E}(2-\gamma)$$

このとき，$\angle\mathrm{DAE}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，3 点 A，D，E を通る円は，DE を直径とする円である．DE の中点 (中心) を M とすると，$\beta+\gamma=0$ であるから，M(2)．また，円の半径 AM は $2-1=1$．

したがって，この円の方程式は $|z-2|=1$ となり，$|z-2|^2=1$ より

$$(z-2)(\overline{z}-2)=1\quad\text{整理すると}\quad z\overline{z}-2z-2\overline{z}+3=0$$

よって　　$\boldsymbol{s=-2,\ t=-2,\ u=3}$　■

3　(1)　$y^{\frac{2}{x}}+y^{-\frac{2}{x}}=\left(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\right)^2-2$ であるから，与えられた不等式は

$$\left(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\right)^2-6\left(y^{\frac{1}{x}}+y^{-\frac{1}{x}}\right)+8\leqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{X^2-6X+8\leqq 0}$$

(2)　(1) の結果から　$(X-2)(X-4)\leqq 0$　ゆえに　$2\leqq X\leqq 4$

ここで，$t=y^{\frac{1}{x}}$ とおくと $(t>0)$，$X=t+\dfrac{1}{t}$ であるから

$$2\leqq t+\frac{1}{t}\leqq 4$$

$t>0$ であるから

$$t^2-2t+1\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad t^2-4t+1\leqq 0$$

上の第 1 式から　$(t-1)^2\geqq 0$,　　第 2 式から　$2-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2+\sqrt{3}$

これらを同時に満たす t の値の範囲は　$2-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2+\sqrt{3}$

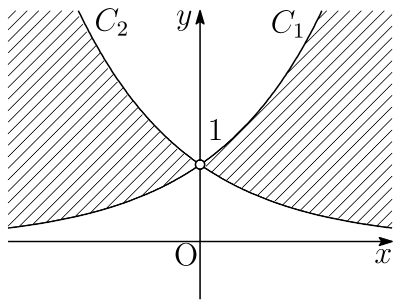
したがって　　$2-\sqrt{3}\leqq y^{\frac{1}{x}}\leqq 2+\sqrt{3}$

このとき，$y>0$ および $x\neq 0$ であることに注意して

$x>0$ のとき　　$(2-\sqrt{3})^x\leqq y\leqq(2+\sqrt{3})^x$

$x<0$ のとき　　$(2+\sqrt{3})^x\leqq y\leqq(2-\sqrt{3})^x$

2 曲線を $C_1: y=(2+\sqrt{3})^x$，$C_2: y=(2-\sqrt{3})^x$ とおくと，点 $(x,\ y)$ が表す領域は，点 $(0,\ 1)$ を除く図の斜線部分である．ただし境界線を含む．



注意　$0<a<b$ とし，2 つの関数 $f(x)=a^x$，$g(x)=b^x$ のグラフを考えると，次の大小関係が理解しやすい．

$$x>0 \text{ のとき } f(x)<g(x), \quad x<0 \text{ のとき } f(x)>g(x)$$

■

4 (1) A，B が赤球で一致する確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) A，B が取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p=\frac{5}{9},\quad q=1-p=\frac{4}{9}$$

よって

$$\begin{aligned}P_2&=pq+qp=2pq\\&=2\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=\boldsymbol{\frac{40}{81}}\\P_3&=pqp+pqq+qpq+qqp=pq(p+3q)\\&=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}+3\times\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{340}{729}}\end{aligned}$$

(3) A と B が n 回の試行の中で取り出す球の色が一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない事象は，次の i)〜iii) の和事象である．このとき，i)，ii)，iii) は互いに排反である．

i) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致せず，2 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

ii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目に一致せず，3 回目から n 回目にかけて，一致することが少なくとも 1 回起こるが続けては起こらない．

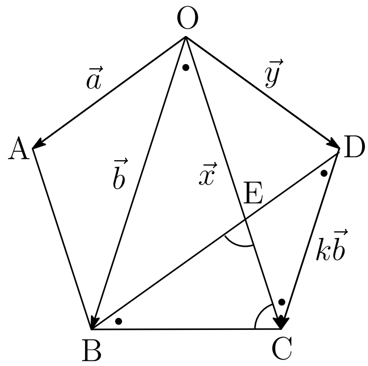
iii) A と B が 1 回目に取り出す球の色が一致し，2 回目から n 回目にかけて一致しない．

よって

$$\begin{aligned}P_n&=\frac{4}{9}P_{n-1}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}P_{n-2}+\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\\&=\frac{4}{9}P_{n-1}+\frac{20}{81}P_{n-2}+\frac{5\cdot4^{n-1}}{9^n}\end{aligned}$$

■

5　(1) $t = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{BD}$ とし，OC と BD の交点を E とすると，$\mathrm{BC} = \mathrm{BE} = 1$ より



$$\mathrm{CE} = \mathrm{DE} = t - 1$$

$\triangle\mathrm{OBC} \backsim \triangle\mathrm{BCE}$ より $\mathrm{OB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CE}$ であるから

$$t : 1 = 1 : t - 1$$

したがって　　$t^2 - t - 1 = 0 \quad \cdots ①$

$t > 0$ に注意して，これを解くと　$t = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

よって　　$k = \dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{1}{t} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$$\vec{x} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t(\vec{b} - \vec{a}) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\vec{b} - \vec{a})}$$

$$\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{x} - k\vec{b} = t(\vec{b} - \vec{a}) - k\vec{b} = -t\vec{a} + (t-k)\vec{b}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\vec{b} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{a} + \vec{b}}$$

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \frac{1^2 + t^2 - 1^2}{2\cdot 1\cdot t} = \frac{t}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

(3) $|\vec{b}| = t$，$\cos\theta = \dfrac{t}{2}$，および ① に注意して

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1\cdot t\cdot\frac{t}{2} = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}(t+1)$$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{x} = \vec{a}\cdot t(\vec{b} - \vec{a}) = t(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2)$

$$= t\left\{\frac{1}{2}(t+1) - 1^2\right\} = \frac{1}{2}(t^2 - t) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

別解　$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}(t+1) - 1 = \dfrac{1}{2}(t-1)$

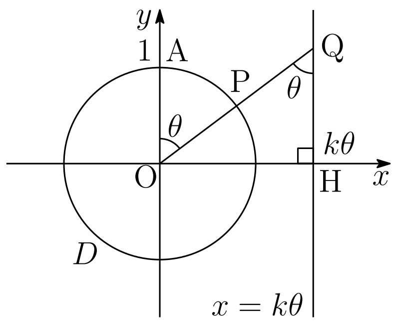
よって　　$\vec{a}\cdot\vec{x} = |\vec{a}||\vec{x}|\cos 2\theta = 1\cdot t\cdot\dfrac{1}{2}(t-1) = \dfrac{1}{2}(t^2 - t) = \dfrac{1}{2}$

■

6 (1) 直線 $x = k\theta$ と x 軸との交点を H とすると，$\triangle$OQH について，$\mathrm{OQ}\sin\theta = \mathrm{OH}$ であるから

$$r(\theta)\sin\theta = k\theta \quad ゆえに \quad r(\theta) = \frac{k\theta}{\sin\theta}$$

よって $\displaystyle\lim_{\theta\to+0} r(\theta) = \lim_{\theta\to+0} k\cdot\frac{\theta}{\sin\theta} = \boldsymbol{k}$



(2) $r(\theta) = \dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ を微分すると

$$r'(\theta) = \frac{k(\sin\theta - \theta\cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{k\cos\theta(\tan\theta - \theta)}{\sin^2\theta}$$

ここで，$h(\theta) = \tan\theta - \theta$ とすると

$$h'(\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \tan^2\theta$$

上式から，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，$h'(\theta) > 0$ であるから

$$h(\theta) > h(0) \quad すなわち \quad h(\theta) > 0$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき　$r'(\theta) = \dfrac{k\cos\theta h(\theta)}{\sin^2\theta} > 0$

$r(\theta) = \dfrac{k\theta}{\sin\theta}$ は単調増加であるから，点 Q がつねに D の内部にあるとき

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} r(\theta) < 1 \quad ゆえに \quad \frac{\pi}{2}k < 1$$

このとき，$k > 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 < k < \dfrac{2}{\pi}}$

(3) (1) の図から，点 Q$(x,\ y)$ は

$$x = k\theta, \quad y = r(\theta)\cos\theta = \frac{k\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta = \frac{k\theta}{\tan\theta}$$

上の 2 式から θ を消去すると　$y = \dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}}$　ゆえに　$f(x) = \dfrac{x}{\tan\frac{x}{k}}$

したがって　$g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\tan\frac{x}{k}}$

$g(x) = \left(\tan\dfrac{x}{k}\right)^{-1}$ を微分すると

$$g'(x) = -\left(\tan\frac{x}{k}\right)^{-2}\left(\tan\frac{x}{k}\right)' = -\frac{\cos^2\frac{x}{k}}{\sin^2\frac{x}{k}}\cdot\frac{\frac{1}{k}}{\cos^2\frac{x}{k}} = -\frac{1}{k\sin^2\frac{x}{k}}$$

$g'(x) = -\dfrac{1}{k}\left(\sin\dfrac{x}{k}\right)^{-2}$ を微分すると

$$g''(x) = \frac{2}{k}\left(\sin\frac{x}{k}\right)^{-3}\left(\sin\frac{x}{k}\right)' = \frac{2}{k}\cdot\frac{1}{\sin^3\frac{x}{k}}\cdot\frac{1}{k}\cos\frac{x}{k} = \frac{2}{k^2}\cdot\frac{\cos\frac{x}{k}}{\sin^3\frac{x}{k}}$$

このとき，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ および $x = k\theta$ から

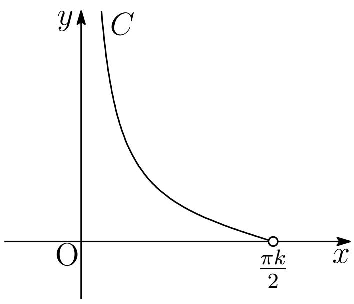
$$0 < x < \frac{\pi}{2}k$$

この範囲において　$g'(x) < 0$，$g''(x) > 0$

ゆえに，$g(x)$ は単調減少で，下に凸である．

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = \infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi k}{2}-0} g(x) = 0$

よって，曲線 C のグラフの概形は右の図のようになる．



(4) 求める立体の体積を V とすると　　$V = \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}k}^{\frac{\pi}{3}k}\frac{1}{\tan^2\frac{x}{k}}\,dx$

$x = k\theta$ より　$\dfrac{dx}{d\theta} = k$

x	$\frac{\pi}{4}k \longrightarrow \frac{\pi}{3}k$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　　$V = \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{k}{\tan^2\theta}\,d\theta = \pi k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right)d\theta$

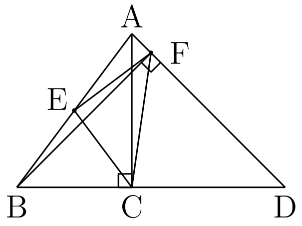
$$= \pi k\left[-\frac{1}{\tan\theta} - \theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\pi k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}\right)}$$

■

7 (1) $\angle \mathrm{AFB} = \angle \mathrm{ACB} = 90^\circ$ であるから，2 点 F，C は，AB を直径とする円周上にある．このとき，E はこの円の中心であるから

$$\mathrm{EF} = \mathrm{EC}$$

(2) $\angle \mathrm{C} = 90^\circ$，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 5 : 4$ より



$$\begin{aligned}\mathrm{AB} : \mathrm{AC} : \mathrm{BC} &= 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2}\\ &= 5 : 4 : 3\end{aligned}$$

条件から，$k > 0$ とし

$$\mathrm{AB} = 5k,\quad \mathrm{BC} = 3k,\quad \mathrm{AC} = \mathrm{CD} = 4k,\quad \mathrm{AD} = 4\sqrt{2}k$$

とおく．$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積により

$$\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BF} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}7k\cdot 4k = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}k\cdot\mathrm{BF}$$

これから $\quad \mathrm{BF} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}k,\qquad \mathrm{AF} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BF}^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

ゆえに $\quad \mathrm{AF} : \mathrm{FD} = 1 : 7$ また $\quad \mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : 1,\quad \mathrm{BC} : \mathrm{CD} = 3 : 4$

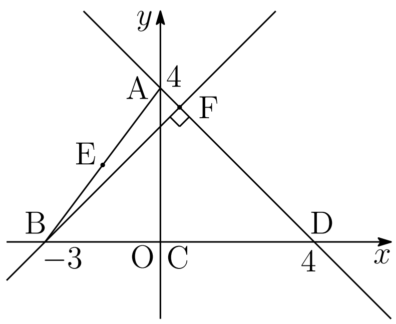
$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{3}{7}S\\ \triangle\mathrm{AEF} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}S = \frac{1}{16}S\\ \triangle\mathrm{BCE} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}S = \frac{3}{14}S\\ \triangle\mathrm{CDF} &= \frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}S = \frac{1}{2}S\end{aligned}$$

したがって $\qquad \triangle\mathrm{CEF} = S - \dfrac{1}{16}S - \dfrac{3}{14}S - \dfrac{1}{2}S = \dfrac{25}{112}S$

よって $\qquad \triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{CEF} = \dfrac{3}{7}\mathrm{S} : \dfrac{25}{112}\mathrm{S} = \mathbf{48 : 25}$

別解　$\angle C = 90^\circ$，$AB : AC = 5 : 4$ より



$$AB : AC : BC = 5 : 4 : \sqrt{5^2 - 4^2}$$
$$= 5 : 4 : 3$$

C を原点とし，条件から

$$A(0,\ 4),\ B(-3,\ 0),\ C(4,\ 0)$$

とおき，求める三角形の面積比を示してもよい．

E は AB の中点であるから　$E\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

直線 AD の方程式は　$y = -x + 4$　$\cdots$①

直線 BF の方程式は　$y = x + 3$　$\cdots$②

①，② を解いて　$F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

したがって　$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$

$$\triangle CEF = \frac{1}{2}\left|-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{25}{8}$$

よって　$\triangle ABC : \triangle CEF = 6 : \dfrac{25}{8} = \mathbf{48 : 25}$　■

$\boxed{8}$ (1)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+a) = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+ak) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}an(n-1) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1+3a) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ より $\quad S = n \times \dfrac{(n-1)(2n-1+3a)}{6} \quad \cdots ①$

S は整数であるから，6 と n が互いに素であるとき

$$(n-1)(2n-1+3a)$$

は 6 で割り切れる．よって，① により，S は n で割り切れる．

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}n(n-1)\{2(n-2)+3(a+1)\} \\ &= n(n-1)\left(\frac{n-2}{3} + \frac{a+1}{2}\right) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

条件から，$n-2$ は 6 で割り切れ，$a+1$ は偶数であるから

$$\frac{n-2}{3} + \frac{a+1}{2}$$

は整数である．よって，② により，S は n で割り切れる．

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}n\{(n-3)+2\}\{2(n-3)+3a+5\} \\ &= \frac{1}{6}n\{2(n-3)^2+3(a+3)(n-3)+6(a+1)+4\} \\ &= n\left\{\frac{(n-3)^2}{3} + \frac{(a+3)(n-3)}{2} + a + 1\right\} + \frac{2}{3}n \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

条件から，$n-3$ は 6 で割り切れ，a は自然数であるから

$$\frac{(n-3)^2}{3} + \frac{(a+3)(n-3)}{2} + a + 1$$

は整数である．このことと S が整数であることから，$\dfrac{2}{3}n$ は整数である．

$0 \leqq \dfrac{2}{3}n < n$ および ③ により，S を n で割った余りは $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}n}$ ■

9 (1) 与えられた関数列により

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= re^{-2rx}\int_0^x f_1(t)e^{2rt}\,dt = re^{-2rx}\int_0^x e^{rt}\,dt \\
&= e^{-2rx}\Big[\ e^{rt}\ \Big]_0^x = \boldsymbol{e^{-2rx}(e^{rx}-1)} \\
f_3(x) &= 2re^{-3rx}\int_0^x f_2(t)e^{3rt}\,dt = 2re^{-3rx}\int_0^x (e^{2rt}-e^{rt})\,dt \\
&= e^{-3rx}\Big[\ e^{2rt}-2e^{rt}\ \Big]_0^x = e^{-3rx}(e^{2rx}-2e^{rx}+1) \\
&= \boldsymbol{e^{-3rx}(e^{rx}-1)^2}
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f_n(x) = e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1} \quad \cdots (\mathrm{A})$$

と推測する．

［1］ $n=1$ のとき　$f_1(x) = e^{-rx}(e^{rx}-1)^0 = e^{-rx}$
よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$f_k(x) = e^{-krx}(e^{rx}-1)^{k-1}$$

であると仮定すると

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x) &= kre^{-(k+1)rx}\int_0^x f_k(t)e^{(k+1)rt}\,dt \\
&= kre^{-(k+1)rx}\int_0^x (e^{rx}-1)^{k-1}e^{rt}\,dt \\
&= e^{-(k+1)rx}\int_0^x k(e^{rt}-1)^{k-1}(e^{rt}-1)'\,dt \\
&= e^{-(k+1)rx}\Big[\ (e^{rt}-1)^k\ \Big]_0^x = e^{-(k+1)rx}(e^{rx}-1)^k
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

(3) $f_n(x)=e^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}$ $(n \geqq 3)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -nre^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-1}+e^{-nrx}\cdot(n-1)(e^{rx}-1)^{n-2}\cdot re^{rx} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}\{-n(e^{rx}-1)+(n-1)e^{rx}\} \\ &= re^{-nrx}(e^{rx}-1)^{n-2}(n-e^{rx}) \end{aligned}$$

$x>0$ のとき，$f_n'(x)=0$ とすると

$$n-e^{rx}=0 \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{1}{r}\log n$$

したがって，$f_n(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{r}\log n$	$\cdots$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{r}\log n}$ **で極大値** $\boldsymbol{\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^n}}$ **をとる．** ■

10 (1) A，B が赤球で一致する確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

A，B が白球で一致する確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

これらの事象は互いに排反であるから $\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{5}{9}}$

(2) A，B が取り出す球の色が一致する確率を p，一致しない確率を q とすると

$$p=\frac{5}{9},\quad q=1-p=\frac{4}{9}$$

よって　$pqp+pqq+qpq+qqp=pq(p+3q)$

$$=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}+3\times\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{340}{729}}$$

(3) 求める確率は

$$\begin{aligned} &ppqp+ppqq+qppq+pqpp+qqpp \\ =&2p^3q+3p^2q^2=p^2q(2p+3q) \\ =&\left(\frac{5}{9}\right)^2\times\frac{4}{9}\times\left(2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\frac{2200}{6561}} \end{aligned}$$

■

11 (1) $x \geqq -1$ のとき $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3$，$f'(x) = -x + 2$

ℓ の方程式は $(t > -1)$，$t \neq 2$ のとき $y - f(t) = -\dfrac{1}{f'(t)}(x - t)$

ゆえに $y - \left(-\dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3\right) = -\dfrac{1}{-t+2}(x - t)$

よって $t \neq 2$ のとき $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{t-2}(x - t) - \dfrac{1}{2}t^2 + 2t + 3}$

$t = 2$ のとき $\boldsymbol{x = 2}$

(2) $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ であるから，ℓ が $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t-2}(-1 - t) - \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

整理すると $t^3 - 6t^2 + 5t + 12 = 0$ ゆえに $(t+1)(t-3)(t-4) = 0$

これを満たす t の中で $(t > -1)$，最小の t の値は $\boldsymbol{t = 3}$

(3) $t = 3$ を (1) の結果に代入すると $\ell : y = x + \dfrac{3}{2}$

$C : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2|x + 1| + 1$ は

$$x \leqq -1 \text{ のとき } \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$
$$x \geqq -1 \text{ のとき } \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

ℓ と C の共有点の x 座標は

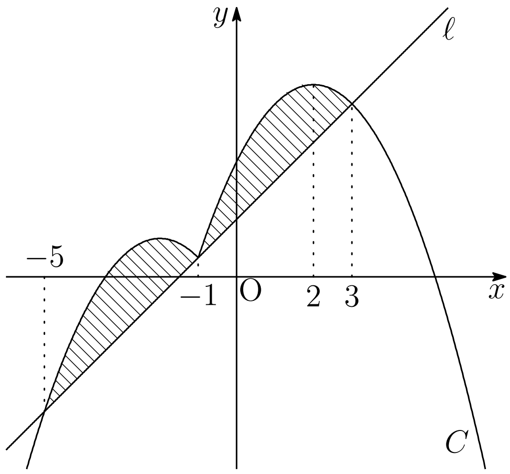
$x \leqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = -5, -1$$

$x \geqq -1$ のとき

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = x + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 3$$

ℓ と C で囲まれた部分は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-5}^{-1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-2x-1\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right\}dx \\ &\qquad + \int_{-1}^{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right\}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-5}^{-1}(x+5)(x+1)\,dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{-1-(-5)\}^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

■

8.3　2017年

- 工学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部　$\boxed{3}$, $\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ 数I・II・III・A・B (90分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部　$\boxed{3}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ 数I・II・A・B (90分)

$\boxed{1}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ の導関数は，$f'(x) = e^{-x^2}(\boxed{\text{あ}})$ である．

(2) 関数 $f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{\boxed{\text{う}}}{x} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ の値は $\boxed{\text{え}}$ である．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{お}}}{12}$ である．

2 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ について，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 次の空間を適切な数または数式で埋めよ．

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ は $\boxed{\text{ア}}$ である．$f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{(1+x^2)^2}$ であり，第 2 次導関数は $f''(x)=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{(1+x^2)^3}$ である．曲線 C には変曲点が 2 つあり，2 つの変曲点のうち x 座標の値が大きいの方の変曲点を P とすると，P の座標は ($\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$) である．また，点 P における曲線 C の接線の方程式を $y=ax+b$ (a, b は定数) とすると，a の値は $\boxed{\text{カ}}$，b の値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C と x 軸および直線 $x=1$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

3 点 O を原点とする座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 2) をとる．O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線の足を H とする．球面 $x^2+y^2+z^2=1$ を S とし，O から H にのばした半直線と球面 S との交点を P とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分で表せ．

(2) H の座標を求めよ．

(3) P の座標および線分 HP の長さを求めよ．

4 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 等式 $z^2=i$ を満たす複素数 z は 2 つある．それらを $x+yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(2) 等式 $w^2-2iw=1+i$ を満たす複素数 w は 2 つあり，それらを α，β とする．ただし，α の実部は β の実部より大きいとする．α，β を $x+yi$ (x, y は実数) の形で表せ．

(3) 複素数平面上で，原点を O とし，(2) で求めた α，β が表す点をそれぞれ A，B とするとき，三角形 OAB の面積を求めよ．

5 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$a_n = 86n+3$，$b_n = 65n+4$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義する．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 次の ①〜③ を満たす 0 または正の整数 a，b，c を求めよ．

$$\begin{aligned} 86 &= 65 \times 1 + a \quad \cdots ① \\ 65 &= a \times 3 + b \quad \cdots ② \\ a &= b \times 10 + c \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

(2) $a_k = b_\ell$ を満たす自然数 k，ℓ の組のうち，1 組を求めよ．

(3) $a_k = b_\ell$ を満たす自然数 k，ℓ の組は無数にあり，それらを

$$(k,\ \ell) = (k_1,\ \ell_1),\ (k_2,\ \ell_2),\ (k_3,\ \ell_3),\ \cdots$$

とする．ただし，$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ とする．数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{k_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義するとき，$c_n \geqq 10^5$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

6 座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を自然数とし，連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq y^2 \\ x + y \leqq n(n+1) \end{cases}$$

の表す領域を D_n とする．また，D_n に含まれる格子点の個数を a_n とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D_2 を座標平面上に図示し，a_2 を求めよ．

(2) 直線 $x + y = n(n+1)$ 上にあり，D_n に含まれる格子点の個数を求めよ．

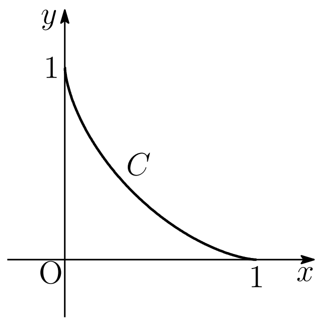
(3) $a_{n+1} - a_n$ を，n を用いて表せ．

(4) a_n を，n を用いて表せ．

7 媒介変数 t を用いて

$$x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t\quad \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とする．C の概形は右の図のようになる．このとき，次の各問に答えよ．



(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ における C の法線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

8 最大 2 回のじゃんけんから成るゲームを，次のルール A，B，C に従って n 人 $(n\geqq 3)$ で行う．

A　n 人で 1 回目のじゃんけんをして 1 人の勝者が決まったら，2 回目のじゃんけんは行わず，そこでゲームを終了する．

B　n 人で 1 回目のじゃんけんをして 2 人以上 $n-1$ 人以下の勝者が決まったら，勝ち残った者だけで 2 回目のじゃんけんをし，ゲームを終了する．

C　n 人で 1 回目のじゃんけんをして誰も勝たなかったら，全員で 2 回目のじゃんけんをし，ゲームを終了する．

n 人で 1 回目のじゃんけんをして k 人 $(1\leqq k\leqq n-1)$ が勝つ確率を P_k とする．ただし，各人はじゃんけんでグー，チョキ，パーをどれも確率 $\dfrac{1}{3}$ で出すものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) P_1 を求めよ．

(2) $2\leqq k\leqq n-1$ のとき，P_k を求めよ．

(3) 1 回目のじゃんけんで誰も勝たない確率を求めよ．

(4) 1 人の勝者が決まってゲームが終了する確率を求めよ．

9 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - 2x + 1 \\ y \leqq -x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) D を座標平面上に図示せよ．

(2) a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$-ax+y$ の最大値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $f(a)$ に対し，関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ．

10 整式 $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ について，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を因数分解せよ．さらに，$x > 1$ のとき，$P(x) > 0$ であることを示せ．

(2) 自然数 m に対し，$m(m+1)^3$ は偶数であることを証明せよ．

(3) 次の条件 $(*)$ を満たす自然数 k の中で，最も大きいものを求めよ．

$(*)$ 3 以上のすべての奇数 x について，$P(x)$ は k の倍数である．

11 表と裏の区別があるカード 6 枚が入っている．

そのうちの 3 枚には表に 1，裏に 0 が書かれ，
その 3 枚以外の 2 枚には表に -1，裏に 0 が書かれ，
残り 1 枚には表に 0，裏に 1 が書かれている．

この袋から無作為に 1 枚取り出して書かれている数字を見てから袋にもどす操作を 4 回繰り返す．取り出した 4 回それぞれのカードの，表に書かれた数の和を X，カードの裏に書かれた数の和を Y とする．ただし，袋からカードを取り出すとき，どのカードも同じ確率で取り出されるものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $X+Y=4$ である確率を求めよ．

(2) $X+Y$ の値が奇数である確率を求めよ．

(3) $X+Y \leqq 2$ である確率を求めよ．

12 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y=x^2$，$C_2 : y=4(x-1)^2$ がある．$t \leqq \dfrac{2}{3}$ を満たす実数 t に対し，座標平面上において次の 2 つの条件を満たす部分の面積を $S(t)$ とする．

(a)　$t \leqq x \leqq t+1$
(b)　$x^2 \leqq y \leqq 4(x-1)^2$　または　$4(x-1)^2 \leqq y \leqq x^2$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 放物線 C_1，C_2 の交点の x 座標 α，β (ただし，$\alpha < \beta$) を求めよ．

(2) $t \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき，$S(t)$ を，t を用いて表せ．さらに，関数 $S(t)$ は $t \leqq -\dfrac{1}{3}$ において減少することを示せ．

(3) $-\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき，$S(t)$ を，t を用いて表せ．さらに，関数 $S(t)$ $\left(-\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\right)$ が最小となる t の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = xe^{-x^2}$ より $f'(x) = e^{-x^2} + x\cdot(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x}$

(あ) $\boldsymbol{1 - 2x^2}$

(2) $f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} = (1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\sin x\cos x = \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

(い) $\boldsymbol{\sin x \cos x}$

(3) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ より

$$\int f(x)\,dx = -\int \left(\frac{1}{x}\right)' \log x\,dx = -\frac{1}{x}\cdot\log x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\log x + 1}{x} + C$$

(う) $\boldsymbol{\log x + 1}$

(4) $$\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_0^2 \{2-(2-x)\}\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= \int_0^2 \{2(2-x)^{\frac{1}{2}} - (2-x)^{\frac{3}{2}}\}\,dx$$
$$= \left[-\frac{4}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^2$$
$$= \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{5}\sqrt{2} = \frac{16}{15}\sqrt{2}$$

(え) $\boldsymbol{\dfrac{16}{15}\sqrt{2}}$

(5) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}\cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right\}dx$$
$$= \left[\frac{1}{12}\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{12}$$

(お) $\boldsymbol{\pi - \sqrt{3}}$ ■

2　(1) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$

$f(x) = \dfrac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ より　$f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = 2x(1+x^2)^{-2}$ であるから

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(1+x^2)^{-2} + 2x\cdot(-2)(1+x^2)^{-3}\cdot 2x \\ &= \frac{2(1+x^2)-8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	変曲点 $\frac{1}{4}$	↘	極小 0	↗	変曲点 $\frac{1}{4}$	↗

x 座標が大きい方の変曲点 P の座標は　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ であるから，点 P のおける曲線 C の接線の方程式は

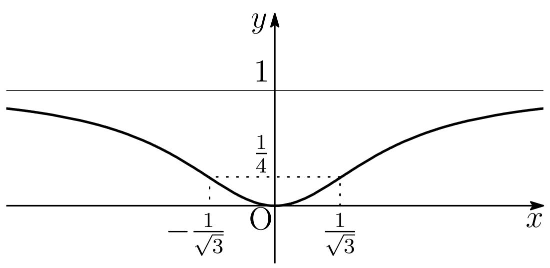
$$y - \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{8}x - \frac{1}{8}$$

(ア) $\mathbf{1}$　(イ) $\boldsymbol{2x}$　(ウ) $\boldsymbol{2-6x^2}$　(エ) $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　(オ) $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$　(カ) $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$　(キ) $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$

注意　変曲点は，$f''(x)$ の符号が変化する点であり，増減表等で示す必要がある．$f''(x) = 0$ は，変曲点であるため必要条件であるが，十分条件ではない．

(2) $f(x)$ の増減および凹凸は (1) の増減表のとおり．

極小値 $\boldsymbol{f(0) = 0}$，変曲点 $\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{4}\right)}$



(3) 求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=1-\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

ゆえに $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

よって $S=\boldsymbol{1-\dfrac{\pi}{4}}$ ■

3 (1) A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)=\boldsymbol{(-1,\ 1,\ 0)},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 0,\ 2)-(1,\ 0,\ 0)=\boldsymbol{(-1,\ 0,\ 2)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの1つを $\vec{n}=(2,\ 2,\ 1)$ とおくと

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}/\!/\vec{n}$ であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s(2,\ 2,\ 1) \quad ゆえに \quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(2s-1,\ 2s,\ s) \quad \cdots②$$

② を ① に代入すると

$$(2,\ 2,\ 1)\cdot(2s-1,\ 2s,\ s)=0 \quad これを解いて \quad s=\frac{2}{9}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}(2,\ 2,\ 1)=\left(\dfrac{4}{9},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ よって $\mathbf{H}\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{9},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)}$

(3) P は半直線 OH 上にあるから，(2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{n}$ $(t>0)$

また，P は球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上にあるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ より

$$1=|t|\sqrt{2^2+2^2+1^2} \quad ゆえに \quad 1=3|t| \quad t>0 より \quad t=\frac{1}{3}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}(2,\ 2,\ 1)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ よって $\mathbf{P}\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

また $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\vec{n}-\dfrac{2}{9}\vec{n}=\dfrac{1}{9}\vec{n}$

よって $\mathrm{HP}=|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|=\dfrac{1}{9}|\vec{n}|=\dfrac{1}{9}\cdot 3=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ ■

4 (1) 方程式の解 z の極形式を　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$\cdots$①

とすると　$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

i を極形式で表すと　$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって　$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k\text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　$r = 1$　$\cdots$②　また　$\theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると，$k = 0, 1$ であるから　$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi$　$\cdots$③

②，③ を ① に代入すると　$\boldsymbol{z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}i}$　**(複号同順)**

(2) $w^2 - 2iw = 1 + i$ より　$(w - i)^2 = i$

(1) の結果を利用して　$w - i = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i, \quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

したがって　$w = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i, \quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)i$

α の実部は β の実部より大きいから

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i, \ \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i}$$

(3) (1) の解の 1 つを $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ とおくと　$\alpha = i + z_1, \ \beta = i - z_1$

△OAB の面積を S とすると　$S = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

$$\overline{\alpha}\beta = (-i + \overline{z}_1)(i - z_1) = 1 - |z_1|^2 + (z_1 + \overline{z}_1)i = \sqrt{2}\,i$$

$\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta) = \sqrt{2}$ より　$S = \dfrac{1}{2}|\sqrt{2}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

解説 $\theta = \angle\alpha 0\beta$ とすると　$\cos\theta + i\sin\theta = \dfrac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{\alpha\overline{\alpha}} = \dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$

$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|}$ であるから　$S = \dfrac{1}{2}|\alpha||\beta||\sin\theta| = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$　■

$\boxed{5}$ (1) ①，②，③ を解いて $\quad \boldsymbol{a = 21,\ \ b = 2,\ \ c = 1}$

(2) ①，②，③ から

$$\begin{aligned} 86 &= 65 + a = (3a + b) + a = 4a + b \\ &= 4(10b + c) + b = 41b + 4c, \\ 65 &= 3a + b = 3(10b + c) + b \\ &= 31b + 3c \end{aligned}$$

$a_k = b_\ell$ のとき，$86k + 3 = 65\ell + 4$ であるから，上の 2 式より

$$\begin{aligned} (41b + 4c)k + 3 &= (31b + 3c)\ell + 4 \\ b(41k - 31\ell) + c(4k - 3\ell) &= 1 \end{aligned}$$

$b = 2$，$c = 1$ であるから

$$2(41k - 31\ell) + (4k - 3\ell) = 1 \quad \cdots (*)$$

41 と 31 は互いに素であるから

$$41k - 31\ell = 1$$

を満たす整数 k，ℓ が存在するので，$(*)$ より，整数 m を用いて

$$\begin{cases} 41k - 31\ell = m \\ 4k - 3\ell = 1 - 2m \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} k = -65m + 31 \\ \ell = -86m + 41 \end{cases} \quad \cdots (**)$$

求める自然数 k，ℓ の組の 1 つとして，$(**)$ に $m = 0$ を代入すると

$$\boldsymbol{k = 31,\quad \ell = 41}$$

(3) $(**)$ を満たす自然数 $(k,\ \ell)$ の組

$$(k_1,\ \ell_1),\ (k_2,\ \ell_2),\ (k_3,\ \ell_3),\ \cdots \qquad (k_1 < k_2 < k_3 < \cdots)$$

について，数列 $\{k_n\}$ は，初項が 31，公差が 65 の等差数列であるから

$$k_n = 31 + 65(n - 1) = 65n - 34$$

したがって

$$\begin{aligned} c_n &= a_{k_n} = 86k_n + 3 \\ &= 86(65n - 34) + 3 = 5590n - 2921 \end{aligned}$$

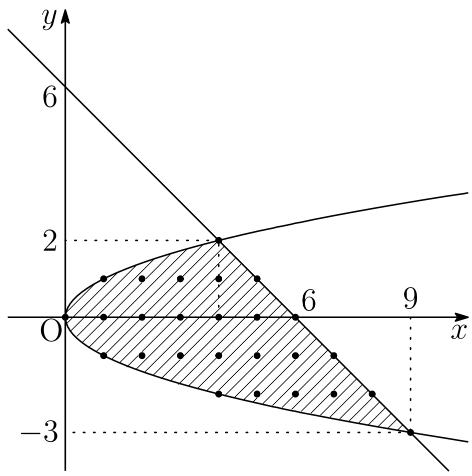
$c_n \geqq 10^5$ のとき $\quad 5590n - 2921 \geqq 10^5 \quad$ ゆえに $\quad n \geqq \dfrac{102921}{5590} = 18.4\cdots$

よって，求める最小の自然数 n は $\quad$ **19** ■

6 (1) D_2 は，連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq y^2 \\ x + y \leqq 6 \end{cases}$$

の表す領域で (境界線を含む)，右の図の斜線部分である．



D_2 内の格子点 $(x,\ y)$ の個数は

$y = -3$ のとき　$x = 9$　の 1 個
$y = -2$ のとき　$4 \leqq x \leqq 8$　の 5 個
$y = -1$ のとき　$1 \leqq x \leqq 7$　の 7 個
$y = 0$ のとき　$0 \leqq x \leqq 6$　の 7 個
$y = 1$ のとき　$1 \leqq x \leqq 5$　の 5 個
$y = 2$ のとき　$x = 4$　の 1 個

よって　$a_2 = 1 + 5 + 7 + 7 + 5 + 1 = \mathbf{26}$

別解 $c = 0,\ 1$ のとき，直線 $x + y = c$ 上の格子点の個数は 2 個

$c = 2, 3, 4, 5$ のとき，直線 $x + y = c$ 上の格子点の個数は 4 個

直線 $x + y = 6$ 上の格子点の個数は 6 個

よって　$a_2 = 2 \times 2 + 4 \times 4 + 6 = 26$

(2) $x + y = n(n + 1) \cdots ①$ と $x = y^2 \cdots ②$ から x を消去すると

$$y^2 + y = n(n + 1) \quad ゆえに \quad (y - n)(y + n + 1) = 0$$

直線 ① と放物線 ② の共有点の y 座標は　$y = -n - 1,\ n$
よって，求める格子点の個数は　$n - (-n - 1) + 1 = \mathbf{2n + 2}$

(3) (2) の結果から，$n(n + 1) + 1 \leqq c \leqq (n + 1)(n + 2) - 1$ のとき (c は整数)，

直線 $x + y = c$ 上の格子点の個数は　$2n + 2$
直線 $x + y = (n + 1)(n + 2)$ 上の格子点の個数は　$2n + 4$

$\{(n + 1)(n + 2) - 1\} - \{n(n + 1) + 1\} + 1 = 2n + 1$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (2n + 1)(2n + 2) + (2n + 4) \\ &= \mathbf{4n^2 + 8n + 6} \end{aligned}$$

(4) (1) の図から，$a_1 = 8$.

$$n \geqq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 8 + \sum_{k=1}^{n-1}\{4(k+1)^2 + 2\}$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n}(4k^2 + 2) = 2 + 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2n$$

$$= \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{8}{3}n + 2$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{8}{3}n + 2}$$

別解　直線 $y = k$ (k は定数) と直線 ①，放物線 ② との交点の x 座標は，それぞれ

$$x = n(n+1) - k, \quad x = k^2$$

ゆえに，D_n に含まれる直線 $y = k$ $(-n-1 \leqq k \leqq n)$ 上の格子点の個数は

$$\{n(n+1) - k\} - k^2 + 1 = n^2 + n + 1 - k^2 - k$$

したがって

$$a_n = \sum_{k=-n-1}^{n}(n^2 + n + 1 - k^2 - k) = 1 + \sum_{k=-n}^{n}(n^2 + n + 1 - k^2 - k)$$

$$= 1 + (2n+1)(n^2 + n + 1) + \sum_{k=-n}^{n}(-k^2 - k)$$

$$= 2n^3 + 3n^2 + 3n + 2 + \sum_{k=1}^{n}\{-k^2 - k - (-k)^2 - (-k)\}$$

$$= 2n^3 + 3n^2 + 3n + 2 - 2\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{8}{3}n + 2$$

■

7 (1) 点 A$\left(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ は，C の $t=\frac{\pi}{3}$ に対する点である．

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t\cos t \quad \cdots (*)$$

したがって $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\tan t$ ゆえに $t=\frac{\pi}{3}$ のとき $\displaystyle \frac{dy}{dx} = -\sqrt{3}$

よって，点 A における C の法線の方程式は

$$1\left(x-\frac{1}{8}\right) - \sqrt{3}\left(y - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x - \sqrt{3}y + 1 = 0}$$

(2) 曲線 C の弧長を s とすると，$(*)$ により

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin 2t\,dt = \left[-\frac{3}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(3) $x = \cos^3 t$ より

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

求める立体の体積を V とすると，$(*)$ により

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin^3 t)^2(-3\cos^2 t\sin t)\,dt \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t)\,dt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，n を自然数とし，$J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$ とおくと

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t(\cos t)'\,dt \\ &= -\Big[\sin^{n-1} t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} t)'\cos t\,dt \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\cos^2 t\,dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t(1-\sin^2 t)\,dt \\ &= (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \end{aligned}$$

したがって[1] $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2} \quad \cdots②$

①，② より $\dfrac{V}{\pi} = 3(J_7 - J_9) = 3\left(J_7 - \dfrac{8}{9}J_7\right) = \dfrac{1}{3}J_7 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}J_1$

$$= \frac{16}{105}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{16}{105}\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{105}$$

よって $V = \boldsymbol{\dfrac{16}{105}\pi}$

別解 求める立体の体積を V とすると，$(*)$ により

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin^3 t)^2(-3\cos^2 t\sin t)\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^3\cos^2 t\sin t\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\sin t\,dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t)\sin t\,dt \\
&= 3\Big[-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{5}\cos^5 t - \frac{3}{7}\cos^7 t + \frac{1}{9}\cos^9 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 3\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = \frac{16}{105}
\end{aligned}$$

■

8 (1) n 人でじゃんけんをする場合の総数は 3^n 通り

勝者 1 人の選び方は ${}_n\mathrm{C}_1$ 通りで，その勝者はグー，チョキ，パーの 3 通りの勝ち方があるから

$$P_1 = \frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 3}{3^n} = \boldsymbol{\frac{n}{3^{n-1}}}$$

(2) 勝者 k 人の選び方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りで $(2 \leqq k \leqq n-1)$，その勝者はグー，チョキ，パーの 3 通りの勝ち方があるから

$$P_k = \frac{{}_n\mathrm{C}_k \times 3}{3^n} = \boldsymbol{\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2016_kouki.pdf $\boxed{2}$ を参照

(3) (2) の結果から，求める確率は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P_k$ の余事象の確率であるから，求める確率を P_0 とすると

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}} \\ &= 1 - \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k - 2\right) = \boldsymbol{1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}} \end{aligned}$$

(4) (2) の結果から，j 人で 1 回のじゃんけんをして k 人の勝者が決まる確率を P_k^j とすると $(0 < k < j \leqq n)$

$$P_k^j = \frac{{}_j\mathrm{C}_k}{3^{j-1}}$$

求める確率を P とすると

$$P = P_1^n + \sum_{j=2}^{n-1} P_j^n P_1^j + P_0 P_1^n$$

このとき

$$\begin{aligned} P_j^n P_1^j &= \frac{{}_n\mathrm{C}_j}{3^{n-1}} \cdot \frac{{}_j\mathrm{C}_1}{3^{j-1}} = \frac{1}{3^{n-1} \cdot 3^{j-1}} \cdot \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot j \\ &= \frac{n}{3^{n-1} \cdot 3^{j-1}} \cdot \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} = \frac{n}{3^{n-1}} \cdot \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{j-1}}{3^{j-1}} \end{aligned}$$

したがって

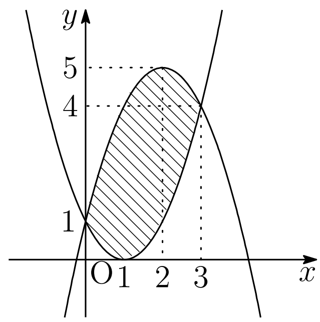
$$\begin{aligned} P =& (1 + P_0) P_1^n + \sum_{j=2}^{n-1} P_j^n P_1^j \\ =& \left(2 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}\right) \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^{n-1}} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{j-1}}{3^{j-1}} \\ =& \left(2 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}\right) \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{j-1}}{3^{j-1}} - 1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \\ =& \left(2 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}\right) \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^{n-1}} \left\{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right\} \\ =& \frac{n}{3^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{2^n}{3^{n-1}} + \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}\right) \\ =& \boldsymbol{\frac{n}{9^{n-1}} (1 - 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-1})} \end{aligned}$$

■

9 (1) 与えられた連立不等式から

$$\begin{cases} y \geqq (x-1)^2 \\ y \leqq -(x-2)^2+5 \end{cases}$$

したがって，領域 D は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．



(2) $k=-ax+y$ とおくと，$y=ax+k$ であるから，k が最大となる D の点 $(x,\ y)$ は $y=-(x-2)^2+5\cdots$ ① 上にある $(0 \leqq x \leqq 3)$.
① より，$y'=-2(x-2)$ であるから

$$x=0 \text{ のとき } y'=4,\quad x=3 \text{ のとき } y'=-2$$

(i) $-2<a<4$ のとき，$-2(x-2)=a$ より，点 $\left(2-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4}+5\right)$ で k は最大となり，最大値は

$$k=-a\left(2-\frac{a}{2}\right)-\frac{a^2}{4}+5=\frac{a^2}{4}-2a+5=\frac{1}{4}(a-4)^2+1$$

(ii) $a \leqq -2$ のとき，点 $(3,\ 4)$ で k は最大となり，最大値は

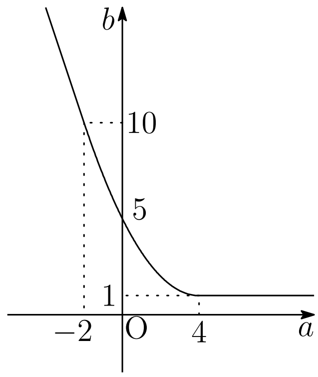
$$k=-a\cdot 3+4=-3a+4$$

(iii) $4 \leqq a$ のとき，点 $(0,\ 1)$ で k は最大となり，最大値は

$$k=-a\cdot 0+1=1$$

(i)〜(iii) より　$$\boldsymbol{f(a)=\begin{cases} -3a+4 & (a \leqq -2) \\ \dfrac{1}{4}(a-4)^2+1 & (-2<a<4) \\ 1 & (4 \leqq a) \end{cases}}$$

(3) (2) の結果から，関数 $b=f(a)$ のグラフは下の図のようになる．



10 (1) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

$$\begin{aligned} &= (x^2+1)(x^2-1) + 2x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^2+1+2x) \\ &= (x+1)(x-1)(x+1)^2 = \boldsymbol{(x-1)(x+1)^3} \end{aligned}$$

$x > 1$ のとき，$x - 1 > 0$，$x + 1 > 0$ であるから　$P(x) > 0$

(2) $$m(m+1)^3 = m(m+1)\cdot(m+1)^2$$

m は自然数より，連続する 2 数の積 $m(m+1)$ は，偶数である．
よって，$m(m+1)^3$ は偶数である．

(3) 3 以上の奇数 x は，自然数 n を用いて，$x = 2n+1$ とおけるから

$$\begin{aligned} P(x) &= (2n+1-1)(2n+1+1)^3 = 16n(n+1)^3 \\ &= 16n(n+1)\cdot(n+1)^2 \end{aligned}$$

$n(n+1)$ は，連続する 2 数の積であるから，$P(x)$ は，16×2 の倍数．
したがって，$P(x)$ は 32 の倍数．よって，求める最大の k の値は　**32** ■

11 (1)

カード	①	②	③	④	⑤	⑥
表	1	1	1	-1	-1	0
裏	0	0	0	0	0	1

$X + Y = 4$ となるのは，上に示した ①〜⑥ のカードの中で 4 回とも，
④，⑤ 以外のカードが出る確率であるから

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{16}{81}}$$

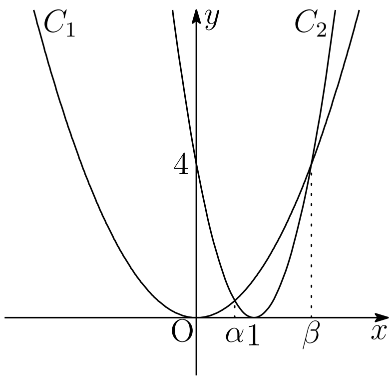
(2) $X + Y$ は奇数回目には奇数，偶数回目には偶数となる．
4 回目には，$X + Y$ は偶数であるから，求める確率は　**0**

(3) $X + Y \leqq 2$ である確率は，(1) の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{16}{81} = \boldsymbol{\frac{65}{81}}$$

■

12　(1)　$C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = 4(x-1)^2$ の方程式から y を消去すると



$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 &= x^2 \\ 2(x-1) &= \pm x \\ x &= \frac{2}{3},\ 2 \end{aligned}$$

$\alpha < \beta$ より　　$\boldsymbol{\alpha = \frac{2}{3},\ \beta = 2}$

(2)　$t \leqq -\frac{1}{3}$ のとき，$t+1 \leqq \frac{2}{3}$ であるから，(1) の図から

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{t+1} \{4(x-1)^2 - x^2\}\,dx = \left[\frac{4}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}x^3\right]_t^{t+1} \\ &= \frac{4}{3}\{t^3 - (t-1)^3\} - \frac{1}{3}\{(t+1)^3 - t^3\} = \boldsymbol{3t^2 - 5t + 1} \end{aligned}$$

$S(t) = 3\left(t - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$ であるから，$t \leqq -\frac{1}{3}$ において減少する．

(3)　$-\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$ のとき，$\frac{2}{3} \leqq t+1$ であるから，(1) の図から

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{\frac{2}{3}} \{4(x-1)^2 - x^2\}dx + \int_{\frac{2}{3}}^{t+1} \{x^2 - 4(x-1)^2\}dx \\ &= \left[\frac{4}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}x^3\right]_t^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}(x-1)^3\right]_{\frac{2}{3}}^{t+1} \\ &= \boldsymbol{-2t^3 + 5t^2 - 3t + \frac{37}{27}} \end{aligned}$$

したがって　　$$\begin{aligned} S'(t) &= -6t^2 + 10t - 3 \\ &= -6\left(t - \frac{5-\sqrt{7}}{6}\right)\left(t - \frac{5+\sqrt{7}}{6}\right) \end{aligned}$$

$-\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$ のとき，$S(t)$ の増減表は

t	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

このとき，$S(t)$ を最小にする t の値は　　$\boldsymbol{t = \frac{5-\sqrt{7}}{6}}$　■

8.4　2018 年

- 工学部　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部　$\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部　$\boxed{7}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ 数 I・II・A・B (90 分)

1 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

(1) 関数 $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{\sqrt{1+x^2}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{い}}}{\sin^2 x}$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \boxed{\text{う}} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{e^x}\,dx$ の値は $\boxed{\text{え}}$ である．

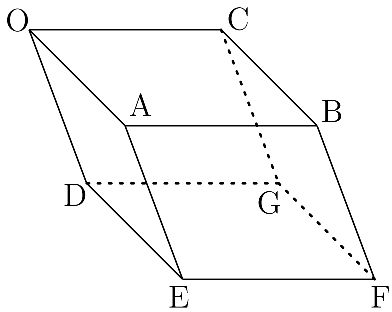
(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ の値は $\boxed{\text{お}}$ である．

2 s，t を，$s>0$，$t>0$，$s^2+t^2<1$ を満たす実数とし，座標平面において，中心が点 $\mathrm{P}(s,\ t)$，半径が 1 の円を C とする．C と x 軸との交点を K，M とし，C と y 軸との交点を L，N とする．ただし，K の x 座標は M の x 座標より大きく，L の y 座標は N の y 座標より大きいとする．四角形 KLMN の面積を S とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 面積 S を，s，t を用いて表せ．

(2) 点 P が直線 $y=-x+1$ 上を動くとき，面積 S の最大値を求めよ．

3 右図の平行六面体OABC-DEFGにおいて，すべての面は1辺の長さが1のひし形とし，$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{AOD} = \angle\mathrm{COD} = 60^\circ$ とする．線分BEを $3:2$ に内分する点をPとし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{d}$，$\vec{d}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分BGを $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点をQとする．$0<t<1$ を満たす t について，線分PQの長さを最小にする t の値と，そのときの線分PQの長さを求めよ．

4 2つの袋A，Bのそれぞれに，赤玉1個と白玉2個の合計3個が入っている．次のような試行を考える．

袋Aから無作為に玉を1個取り出し，
袋Bから無作為に玉を1個取り出す．
次に，上で袋Aから取り出した玉を袋Bに入れ，
上で袋Bから取り出した玉を袋Aに入れる．

この試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 行った後，袋Aの中を確認する．例えば，$n=2$ の場合，1回目の試行で，袋Aから白玉，袋Bから赤玉を取り出し，2回目の試行で，袋Aから白玉，袋Bから白玉を取り出したとすると，その結果，袋Aには赤玉が2個，白玉が1個入っている．

n 回の試行の後で，

袋Aに赤玉1個と白玉2個が入っている確率を P_n，
袋Aに赤玉2個と白玉1個が入っている確率を Q_n，
袋Aに赤玉が入っていない確率を R_n

とする．ただし，どの玉も同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) P_1，Q_1，R_1 を求めよ．

(2) P_2 を求めよ．

(3) P_{n+1} を，P_n を用いて表せ．

(4) P_n を求めよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = x\log x\ (x > 0)$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)\ \left(\dfrac{1}{e^2} \leqq x \leqq e\right)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{e^2} \leqq x \leqq e$ において，関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，C の概形をかけ．

(3) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = \dfrac{1}{e^2}$，$x = e$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{6}$ 点 O を原点とする座標平面において，点 P は中心が O，半径が 1 の円の周上を動き，点 Q は 4 点 A(2, 0)，B(0, 2)，C(−2, 0)，D(0, −2) を頂点とする四角形の周上を動くとする．ただし，P，Q は PQ = 2 を満たすように動くとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 直線 PQ と点 O の距離の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{7}$ 平面上の三角形 ABC で，3 辺の長さが AB = 10，BC = 6，CA = 8 であるものについて，外心を O，内心を I とし，O から I へのばした半直線と外接円との交点を M，I から O へのばした半直線と外接円との交点を N とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 三角形 ABC の外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めよ．

(2) 線分 OI の長さを求めよ．

(3) 線分 IM，IN の長さを求めよ．

(4) 点 I を通る各直線 ℓ に対し，ℓ が三角形 ABC の外接円によって切り取られる線分の長さを d とする．このとき，d の最小値を求めよ．

$\boxed{8}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，C の概形をかけ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸，y 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

9 次の各問に答えよ．

(1) 十進法で表された整数 147 を，五進法と八進法で表せ．

(2) 五進法により 2 桁で表された正の整数で，八進法で表すと 2 桁となるものを考える．このとき，八進法で表したときの各位の数の並びが五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順にはならないことを示せ．

(3) 五進法により 3 桁で表された正の整数で，八進法で表すと 3 桁となるものを考える．このとき，八進法で表したときの各位の数の並びが五進法で表されたときの各位の数の並びと逆順になるものをすべて求め，十進法で表せ．

10 関数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) P を曲線 C 上の点とし，P の x 座標を t とするとき，P における C の接線の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 点 $(2, -1)$ から曲線 C に異なる 2 本の接線が引ける．それぞれの接線の方程式と接点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と，(2) で求めた 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ より　$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(あ) $\boldsymbol{1+2x^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{\tan x} = x\cot x$ より

$$f'(x) = \cot x + x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x}$$

(い) $\boldsymbol{\sin x\cos x - x}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$ より

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int\left(x + \frac{4x}{x^2-4}\right)dx\\ &= \frac{x^2}{2} + 2\log|x^2-4| + C\end{aligned}$$

(う) $\boldsymbol{2\log|x^2-4|}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x}{e^x}\,dx = \int_{-1}^{1}xe^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_{-1}^{1} = -\frac{2}{e}$

(え) $\boldsymbol{-\dfrac{2}{e}}$

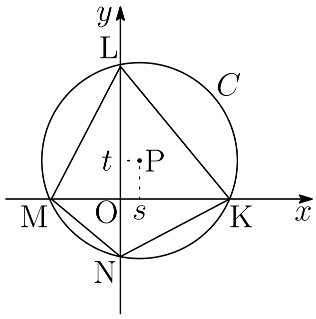
(5) $1+\sin x = 1 + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，$\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\sin x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)dx\\ &= \left[-2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= 3-\sqrt{3}\end{aligned}$$

(お) $\boldsymbol{3-\sqrt{3}}$ ■

2 (1) C の方程式は　$(x-s)^2+(y-t)^2=1 \quad \cdots(*)$



$(*)$ に $y=0$ を代入すると

$(x-s)^2+t^2=1$　ゆえに　$x=s\pm\sqrt{1-t^2}$

したがって　$\mathrm{MK}=2\sqrt{1-t^2}$

また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$s^2+(y-t)^2=1$　ゆえに　$y=t\pm\sqrt{1-s^2}$

したがって　$\mathrm{NL}=2\sqrt{1-s^2}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{MK}\cdot\mathrm{NL}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-t^2}\cdot2\sqrt{1-s^2}=\boldsymbol{2\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}$

(2) 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が直線 $y=-x+1$ 上を動くから　$s+t=1$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{1-(s^2+t^2)+s^2t^2}=2\sqrt{1-(s+t)^2+2st+s^2t^2} \\ &= 2\sqrt{s^2t^2+2st}=2\sqrt{(st+1)^2-1} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$s+t=1$，$s>0$，$t>0$ であるから，相加・相乗平均の大小関係により

$$1=s+t \geqq 2\sqrt{st} \quad \text{ゆえに} \quad 0<st\leqq\frac{1}{4} \quad \cdots ②$$

上式において，等号が成立するのは　$s=t=\dfrac{1}{2}$

①，② より　$0<S\leqq\dfrac{3}{2}$

よって，$s=t=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．■

$\boxed{3}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \vec{d}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{3+2} = \dfrac{2(\vec{a}+\vec{c}) + 3(\vec{a}+\vec{d})}{5} = \boldsymbol{\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{d}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$
$= (1-t)(\vec{a}+\vec{c}) + t(\vec{c}+\vec{d}) = t(\vec{d}-\vec{a}) + \vec{a} + \vec{c}$

これと (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t(\vec{d}-\vec{a}) + \frac{3}{5}(\vec{c}-\vec{d}),$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = t^2|\vec{d}-\vec{a}|^2 + \frac{6}{5}t(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{d}) + \frac{9}{25}|\vec{c}-\vec{d}|^2$$

ここで，$|\vec{a}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ および (1) の結果から

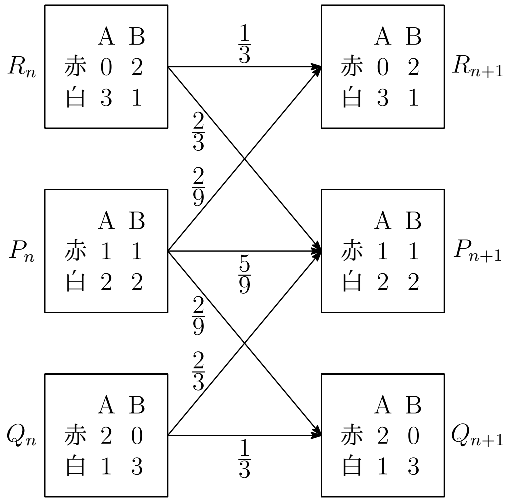
$$|\vec{d}-\vec{a}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{d}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 = 1$$
$$|\vec{c}-\vec{d}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{d} + |\vec{d}|^2 = 1$$
$$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{d}) = \vec{c}\cdot\vec{d} - |\vec{d}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{d} = -\frac{1}{2}$$

これらの結果を利用すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{9}{25} = \left(t - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{27}{100}$$

よって，PQ の長さは，$\boldsymbol{t = \frac{3}{10}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{10}}$ をとる．■

4 (1) 確率 P_{n+1}，Q_{n+1}，R_{n+1} は，確率 P_n，Q_n，R_n を用いた次の確率漸化式によって定まる．



$$(*)\begin{cases} P_{n+1} = \dfrac{5}{9}P_n + \dfrac{2}{3}Q_n + \dfrac{2}{3}R_n \\ Q_{n+1} = \dfrac{2}{9}P_n + \dfrac{1}{3}Q_n \\ R_{n+1} = \dfrac{2}{9}P_n + \dfrac{1}{3}R_n \end{cases}$$

初めに 2 つの袋 A，B のそれぞれに，赤玉 1 個と白玉 2 個の合計 3 個が入っているから

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{5}{9},\quad Q_1 = \frac{2}{9},\quad R_1 = \frac{2}{9}}$$

(2) (1) の結果および $(*)$ の第 1 式により

$$P_2 = \frac{5}{9}P_1 + \frac{2}{3}Q_1 + \frac{2}{3}R_1 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{49}{81}}$$

(3) $P_n + Q_n + R_n = 1$ および $(*)$ の第 1 式から，Q_n，R_n を消去すると

$$P_{n+1} = \frac{5}{9}P_n + \frac{2}{3}(Q_n + R_n) = \frac{5}{9}P_n + \frac{2}{3}(1 - P_n) = \boldsymbol{-\frac{1}{9}P_n + \frac{2}{3}}$$

(4) (3) の結果から $\quad P_{n+1} - \dfrac{3}{5} = -\dfrac{1}{9}\left(P_n - \dfrac{3}{5}\right)$

ゆえに $\quad P_n - \dfrac{3}{5} = \left(P_1 - \dfrac{3}{5}\right)\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$ $\quad$ よって $\quad \boldsymbol{P_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n}$

補足 $(*)$ の第 2・3 式から $\quad Q_{n+1} - R_{n+1} = \dfrac{1}{3}(Q_n - R_n)$

$Q_1 = R_1 = \dfrac{2}{9}$ であるから $\quad Q_n = R_n$

よって $\quad Q_n = R_n = \dfrac{1}{2}(1 - P_n) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$

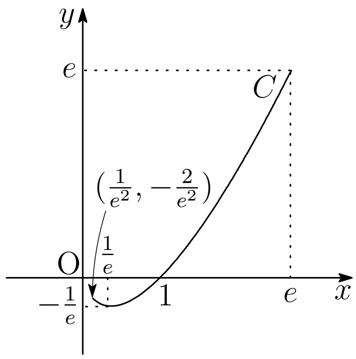
■

5 (1) $f(x)=x\log x$ より $\boldsymbol{f'(x)=\log x+1},\quad \boldsymbol{f''(x)=\frac{1}{x}}$

(2) (1) の結果から，増減および凹凸は次のようなる．

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	e

極小値 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{e}}$，**変曲点なし**



(3) $f(x)=x\log x$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\frac{x^2}{4}(2\log x-1)$ とおくと

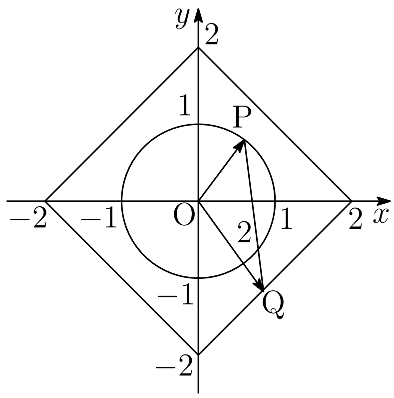
$$F\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{5}{4e^4},\quad F(1)=-\frac{1}{4},\quad F(e)=\frac{e^2}{4}$$

よって
$$\begin{aligned}S&=-\int_{\frac{1}{e^2}}^{1} f(x)\,dx+\int_1^e f(x)\,dx\\&=-\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{1}+\Big[\,F(x)\,\Big]_1^e\\&=F\left(\frac{1}{e^2}\right)-2F(1)+F(e)=\boldsymbol{-\frac{5}{4e^4}+\frac{1}{2}+\frac{e^2}{4}}\end{aligned}$$

■

6　(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$$= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$$



$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ より

$$2^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 1^2$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 3)$

$\sqrt{2} \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \leqq 2$ であるから

$$-\frac{1}{2} \leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leqq \frac{1}{2}$$　よって　最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(2) 直線 PQ に垂線 OH を引くと，H は直線 PQ 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \quad (t \text{ は実数})$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + 2t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$

$$= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 - \frac{2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2} + \frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2} = 1 - \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}})^2$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - 1$

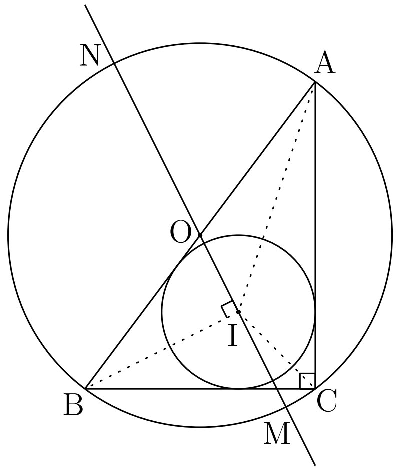
ゆえに　$-\frac{3}{2} \leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \leqq -\frac{1}{2}$　したがって　$\frac{7}{16} \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 \leqq \frac{15}{16}$

よって，求める最大値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$，最小値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

補足　点 A から直線 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{v}$ に引いた垂線の長さは (t は媒介変数)

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{|\vec{v}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 - (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}}{|\vec{v}|}}$$

$\boxed{7}$ (1) $\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2$ であるから



$$\angle\mathrm{BCA}=90^\circ$$

AB は△ABC の外接円の直径であるから

$$R=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\mathbf{5}$$

$\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}=\triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 6r+\frac{1}{2}\cdot 8r+\frac{1}{2}\cdot 10r=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8$$

これを解いて　　$\boldsymbol{r=2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=6\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=8\vec{f}$ となる直交する単位ベクトル $\vec{e}$，$\vec{f}$ を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CI}}&=2\vec{e}+2\vec{f},\\ \overrightarrow{\mathrm{CO}}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})=3\vec{e}+4\vec{f},\\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\overrightarrow{\mathrm{CI}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}=(2\vec{e}+2\vec{f})-(3\vec{e}+4\vec{f})=-\vec{e}-2\vec{f}\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2=|\vec{e}|^2+4|\vec{f}|^2=5$　よって　$\mathbf{OI=\sqrt{5}}$

(3) $\mathrm{IM}=\mathrm{OM}-\mathrm{OI}=\mathbf{5-\sqrt{5}}$，$\mathrm{IN}=\mathrm{ON}+\mathrm{OI}=\mathbf{5+\sqrt{5}}$

(4) 求める最小値は　$2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=\mathbf{4\sqrt{5}}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CI}}=6\vec{e}-(2\vec{e}+2\vec{f})=4\vec{e}-2\vec{f}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}=(-\vec{e}-2\vec{f})\cdot(4\vec{e}-2\vec{f})=0$$

$\mathrm{OI}\perp\mathrm{IB}$ より，d の最小値は

$$2|\overrightarrow{\mathrm{IB}}|=2\sqrt{4^2+(-2)^2}=\mathbf{4\sqrt{5}}$$

■

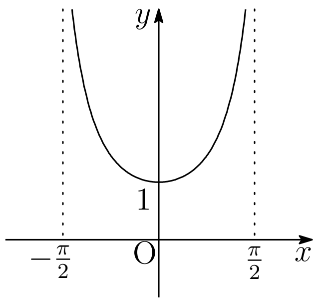
$\boxed{8}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 x}=(\cos x)^{-3}$ より

$$f'(x)=-3(\cos x)^{-4}(-\sin x)=3\sin x(\cos x)^{-4}=\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$$
$$f''(x)=3\cos x(\cos x)^{-4}+3\sin x\cdot(-4)(\cos x)^{-5}(-\sin x)$$
$$=3(\cos x)^{-3}+12\sin^2 x(\cos x)^{-5}=\frac{3(1+3\sin^2 x)}{\cos^5 x}$$

$f(x)$ の増減，極値，C の凹凸は，次のようになる．

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\infty$$



よって　極小値　$\boldsymbol{f(0)=1}$，**変曲点はない．**

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x}{\sin x+1}-\frac{\cos x}{\sin x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\ \log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\boldsymbol{\log(2+\sqrt{3})}$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)'}{\cos^2 x}\,dx=\left[\ \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cdot\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$
$$=2\sqrt{3}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^3 x}\,dx$$

よって　$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx+\sqrt{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}}$$

■

9　(1)

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 147 \\ \hline
5 & 29 \cdots 2 \\ \hline
5 & 5 \cdots 4 \\ \hline
 & 1 \cdots 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
8 & 147 \\ \hline
8 & 18 \cdots 3 \\ \hline
 & 2 \cdots 2
\end{array}
$$

よって　$\mathbf{147 = 1042_{(5)} = 223_{(8)}}$

(2) 2 桁の五進数 $\boxed{a}\boxed{b}_{(5)}$ の位の順序を逆にした 2 桁の八進数 $\boxed{b}\boxed{a}_{(8)}$ が等しいと仮定すると (a，b は 4 以下の自然数)

$$5a + b = 8b + a \quad ゆえに \quad 4a = 7b$$

上の第 2 式は 7 の倍数であるが，$4a$ は 7 の倍数ではない．
よって，条件をみたす a，b は存在しない．

(3) 3 桁の五進数 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}_{(5)}$ の位の順序を逆にした 3 桁の八進数 $\boxed{c}\boxed{b}\boxed{a}_{(8)}$ が等しいとき ($a,\ c = 1, 2, 3, 4$，$b = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$5^2a + 5b + c = 8^2c + 8b + a \quad 整理すると \quad 8a = b + 21c$$

したがって　　　$a - b = 7(3c - a)$

上式は 7 の倍数であるから，$-3 \leqq a - b \leqq 4$ に注意すると

$$a - b = 0,\ 3c - a = 0 \quad すなわち \quad a = b = 3c$$

これを満たす $a,\ b,\ c$ の組は　$a = b = 3,\ c = 1$

よって　　$331_{(5)} = 133_{(8)} = \mathbf{91}$　■

10 (1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ より　$f'(x) = 2x - 3$

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2 - 3t + 2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - 3t + 2) = (2t - 3)(x - t)$$

すなわち　$\boldsymbol{y = (2t - 3)x - t^2 + 2}$

(2) (1) で求めた接線が点 $(2, -1)$ を通るとき

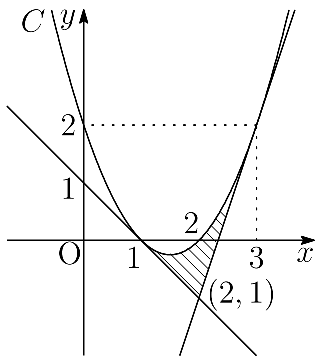
$$-1 = (2t - 3)\cdot 2 - t^2 + 2 \quad \text{整理すると} \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

これを解いて　$t = 1,\ 3$

よって，(1) の結果から

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{接点}\ \boldsymbol{(1,\ 0)}\\ \textbf{接線}\ \boldsymbol{y = -x + 1}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\textbf{接点}\ \boldsymbol{(3,\ 2)}\\ \textbf{接線}\ \boldsymbol{y = 3x - 7}\end{array}\right.$$

(3) 右の図から，求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(x^2 - 3x + 2) - (-x + 1)\}dx \\ &\quad + \int_2^3 \{(x^2 - 3x + 2) - (-3x + 7)\}dx \\ &= \int_1^2 (x - 1)^2\,dx + \int_2^3 (x - 3)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}(x - 3)^2\right]_2^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

補足 2 つの接点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 2)$ を通る直線 $y = x - 1$ と $C : y = x^2 - 3x + 2$ で囲まれた部分の面積は $2S$ となる [2]．実際

$$\int_1^3 \{x - 1 - (x^2 - 3x + 1)\}\,dx = -\int_1^3 (x - 1)(x - 3)\,dx = \frac{4}{3}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 を参照)

8.5　2019 年

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{9}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$，$\boxed{10}$，$\boxed{11}$ 数 I・II・III・A・B (90 分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{5}$，$\boxed{10}$，$\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ の導関数は，$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{あ}}}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \sin x \tan x$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\quad\text{い}\quad}\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ である．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\quad\text{う}\quad} + C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log(x+1)\,dx$ の値は $\boxed{\quad\text{え}\quad}$ である．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x)\cos(2x)\,dx$ の値は $\boxed{\quad\text{お}\quad}$ である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ および座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，および変曲点を調べて，C の概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ が成り立つことは既知としてよい．

(3) 正の実数 t に対し，曲線 C，x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 S を，t を用いて表せ．

3 四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = 60°$，$\angle\mathrm{COA} = 90°$ とし，OB を $3:1$ に内分する点を D とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ．

(2) 線分 DA，DC の長さを求めよ．

(3) 三角形 ACD の面積を求めよ．

(4) 点 O から 3 点 A，C，D を含む平面に下ろした垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

4 3 つの複素数 α，β，γ は $|\alpha| = 1$，$|\beta| = 4$，$|\gamma| = 5$，$\arg\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，$\arg\beta = \dfrac{4}{3}\pi$，$\arg\gamma = \dfrac{5}{3}\pi$ を満たすとする．複素数平面上で，α，β，γ が表す点をそれぞれ A，B，C とするとき，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) α，β，γ を $x + yi$ (x, y は実数) の形でそれぞれ表し，複素数平面上に点 A，B，C を図示せよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(4) 三角形 ABC の外接円の中心を表す複素数を求めよ．

5 a を自然数とする．自然数 n に対し，$b_n = n(n^2 + a)$ とする．このとき，命題

($*$) すべての自然数 n に対し，b_n は 6 の倍数である

について，次の各問に答えよ．

(1) $a = 5$ のとき，命題 ($*$) が真であることを示せ．

(2) 命題 ($*$) が真であるような a の値をすべて求めよ．

6 連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi & \cdots① \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi & \cdots② \\ \cos x\cos y + \sin x\cos y \geqq \sin x\sin y - \cos x\sin y + 1 & \cdots③ \end{cases}$$

の表す領域を座標平面上に図示せよ．

7 重ねた n 枚のカードを上から順に以下の方法を組み合わせて過不足なくすべて取ることを考える．

A：1 度にちょうど 1 枚取る
B：1 度にちょうど 2 枚取る
C：1 度にちょうど 3 枚取る

重ねた n 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を a_n とする．

例えば，$n=4$ のとき，1 回目に方法 A，2 回目に方法 A，3 回目に方法 B で 4 枚を過不足なくすべて取ることを AAB と表すことにすれば，4 枚のカードを過不足なくすべて取る仕方は

AAAA，AAB，ABA，BAA，AC，CA，BB

の 7 通りである．よって，$a_4=7$ である．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．
(2) $n \geqq 4$ のとき，a_n を，a_{n-1}，a_{n-2}，a_{n-3} を用いて表せ．
(3) a_{10} を求めよ．
(4) 「方法 C を 2 回以上続けて用いることはできない」という制約を付け加えるとき，重ねた 10 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を求めよ．

8 k を定数とする．$-2 \leqq x \leqq 2$ で定義される関数 $f(x)=k+x+\sqrt{4-x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ を考える．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸が共有点をもつように，k のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) 連立不等式
$$\begin{cases} -2 \leqq x \leqq 2 \\ 0 \leqq y \leqq |f(x)| \end{cases}$$
の表す領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を，k を用いて表せ．
(3) (1) の k の値の範囲で，(2) の体積 V が最小となる k の値と，そのときの V の値を求めよ．

9 x についての整式 $P(x)$ は，$(x+1)^2$ で割ると $-x+4$ 余り，$(x-1)^2$ で割ると $2x+5$ 余るとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

10 0 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚のカード

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$

が 1 つの袋に入っている．1 枚のカードを袋から取り出し，カードに書かれている数字を確認し，元に戻すという試行を 3 回行う．

1 回目の試行で確認したカードの数字を X，
2 回目の試行で確認したカードの数字を Y，
3 回目の試行で確認したカードの数字を Z

とする．ただし，どのカードも同じ確率で取り出されるとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $X+Y+Z=0$ となる確率を求めよ．

(2) $X=3$ かつ $X+Y+Z=9$ となる確率を求めよ．

(3) $X+Y+Z=9$ となる確率を求めよ．

(4) $X+Y+Z=12$ となる確率を求めよ．

11 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ に対して，$y=\sin 2x+\sqrt{6}(\sin x+\cos x)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\sin x+\cos x$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $t=\sin x+\cos x$ とし，y を，t を用いて表せ．

(3) y の最大値および最小値と，それらを与える x の値をすべて求めよ．

12 a，b，c を実数とし，$a>0$ とする．関数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=-ax^2+bx+c$ に対し，座標平面上の放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ における C_1 の接線を ℓ とする．C_2 は P を通り，ℓ は P における C_2 の接線でもある．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C_2 の頂点の座標を，a を用いて表せ．

(3) 放物線 C_1，接線 ℓ，および y 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，放物線 C_2，ℓ，および C_2 の軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする．$S_2=2S_1$ であるとき，a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{4+3x^2} - x\cdot\dfrac{3x}{\sqrt{4+3x^2}}}{4+3x^2} = \frac{(4+3x^2)-3x^2}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(あ) **4**

(2) $f(x) = \sin x \tan x$ より

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

(い) $\boldsymbol{\sin x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right)$ より

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\{\log|x+1| - \log|x+3|\} + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C\end{aligned}$$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|}$

(4) $$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x+1)\,dx &= \int_0^1 (x+1)'\log(x+1)\,dx \\ &= \Big[\,(x+1)\log(x+1)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx \\ &= 2\log 2 - 1\end{aligned}$$

(え) $\boldsymbol{2\log 2 - 1}$

(5) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 7x + \sin 3x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{21}\end{aligned}$$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{5}{21}}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ より

$$f'(x) = 1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \boldsymbol{(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}},$$
$$f''(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} + (1-x^2)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \boldsymbol{(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

(2) (1) の結果から

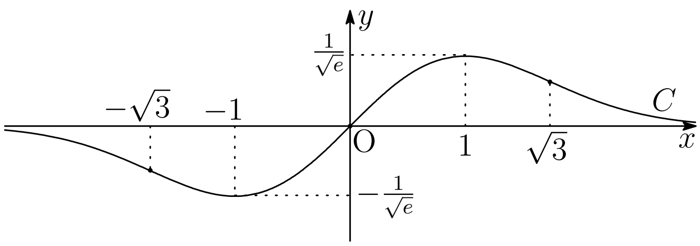
$$f'(x)=0 \text{ の解は}\quad x=\pm 1,\qquad f''(x)=0 \text{ の解は}\quad x=0,\ \pm\sqrt{3}$$

増減および曲線 C の凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

極大値 $f(1) = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$，極小値 $f(-1) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

変曲点 $\boldsymbol{(0,\ 0),\ (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})}$　**(複号同順)**



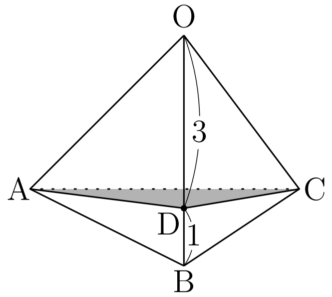
注意 $f'(\alpha)=0$ であっても，$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないとき，$f(\alpha)$ は極値ではない．同様に，$f''(\beta)=0$ であって，$x=\beta$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらないとき，点 $(\beta,\ f(\beta))$ は変曲点ではない．$C: y = xe^{-\frac{x}{2}}$ は原点対称であることから，増減表を $x \geqq 0$ の範囲で示して C の概形をかき，これを元に $x \leqq 0$ の部分の概形をかくことができるが，C の原点が変曲点であること，すなわち，原点の前後で $f''(x)$ の符号が変わることに注意して増減表を示している．

(3) 求める面積 S は，(2) で求めたグラフに注意して

$$S = \int_0^t xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^t = \boldsymbol{1 - e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

■

3 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$



$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = |\vec{c}||\vec{a}|\cos 90^\circ = 1\cdot1\cdot0 = \boldsymbol{0}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}$ であるから，(1) の結果により

$$|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2 = \left|\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 = 1^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot1^2 = \frac{13}{16},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 = \left|\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{b}\right|^2 = |\vec{c}|^2 - \frac{3}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 = 1^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot1^2 = \frac{13}{16}$$

よって　$\mathrm{DA} = \mathrm{DC} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{4}}$

(3)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}} &= \left(\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \vec{c}\cdot\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{9}{16}|\vec{b}|^2 \\ &= 0 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot1^2 = -\frac{3}{16}\end{aligned}$$

$\triangle$ACD の面積を S とすると，上式および (2) の計算により

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{16}\cdot\frac{13}{16} - \left(-\frac{3}{16}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{8}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ とおくと，H は平面 ACD 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{4}{3}y\overrightarrow{\mathrm{OD}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad ゆえに \quad x + \frac{4}{3}y + z = 1 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より　$(\vec{c} - \vec{a})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$，$\left(\dfrac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$

上の2式から　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

ゆえに　$\vec{a}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = \dfrac{3}{4}\vec{b}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = \vec{c}\cdot(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c})$

すなわち　$x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{3}{4}y + \dfrac{3}{8}z = \dfrac{1}{2}y + z \quad \cdots②$

①，② を解いて　$x = y = z = \dfrac{3}{10}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{3}{10}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\alpha = |\alpha|(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

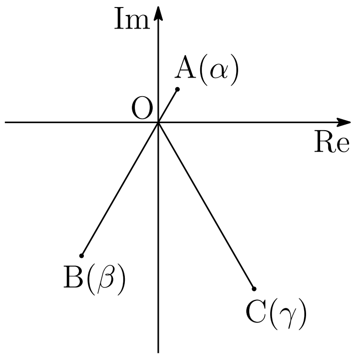
$= 1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i},$

$\beta = |\beta|(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

$= 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{-2 - 2\sqrt{3}i},$

$\gamma = |\gamma|(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

$= 5\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i}$



(2) $\arg\beta - \arg\alpha = \dfrac{4}{3}\pi - \dfrac{\pi}{3} = \pi$，$|\alpha| = 1$，$|\beta| = 4$ より，$\beta = -4\alpha$ であるから

$$\mathrm{AB} = |\beta - \alpha| = |-4\alpha - \alpha| = |-5\alpha| = 5|\alpha| = \mathbf{5}$$

(3) $\arg\gamma - \arg\beta = \dfrac{5}{3}\pi - \dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3}$

点Cから直線ABに下ろした垂線の長さは $|\gamma|\sin\dfrac{\pi}{3} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

これと(2)の結果から $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{3}}{4}}$

別解 $\beta - \alpha = -\dfrac{5}{2}(1 + \sqrt{3}i)$，$\gamma - \alpha = 2 - 3\sqrt{3}i$ より [3]

$$(\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \alpha}) = -\frac{5}{2}(1 + \sqrt{3}i)(2 + 3\sqrt{3}i)$$

よって $S = \dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \alpha})| = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 5\sqrt{3} = \boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{3}}{4}}$

(4) $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$，$\dfrac{\alpha + \gamma}{2} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{3}i$

$(\beta - \alpha)i = \dfrac{5}{2}(\sqrt{3} - i)$，$(\gamma - \alpha)i = 3\sqrt{3} + 2i$

線分AB，ACの垂直二等分線の交点であるから (t，u は実数)

$$-\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i + t(\sqrt{3} - i) = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i + u(3\sqrt{3} + 2i),$$

$$-\frac{3}{4} + \sqrt{3}t + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} - t\right)i = \frac{3}{2} + 3\sqrt{3}u + (-\sqrt{3} + 2u)i$$

上の第2式から $t = \dfrac{9\sqrt{3}}{20}$，$u = -\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ よって第1式により $\boldsymbol{\dfrac{3}{5} - \dfrac{6\sqrt{3}}{5}i}$ ■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/miyazaki/miyazaki_2017.pdf $\boxed{4}$ を参照

5 (1) $a=5$ のとき　$b_n = n(n^2+5) = n(n^2-1)+6n$
$= (n-1)n(n+1)+6n$

連続する3整数の積は6の倍数であるから，上式より，命題 $(*)$ は真である．

(2) $b_n = n(n^2+a) = n(n^2-1+a+1) = (n-1)n(n+1)+(a+1)n$

a, n は自然数であるから

$$b_n = (n-1)n(n+1)+(a+1)n \equiv (a+1)n \pmod 6$$

すべての自然数 n に対して，$b_n \equiv 0 \pmod 6$ のとき，上式から

$$a+1 \equiv 0 \pmod 6$$

a は自然数であることに注意して

$$a+1=6k \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=6k-1} \quad (\boldsymbol{k}\ \text{は自然数})$$

■

6 ③ より　$(\sin x\cos y+\cos x\sin y)+(\cos x\cos y-\sin x\sin y) \geqq 1$

$\sin(x+y)+\cos(x+y) \geqq 1$　ゆえに　$\sin\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right) \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots(*)$

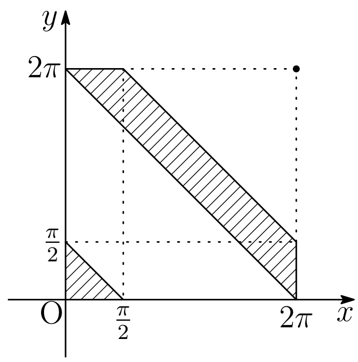
①，② より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq x+y+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{4}+4\pi$

この範囲において，$(*)$ を解くと

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \leqq x+y+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi \\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi \leqq x+y+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi+2\pi \\ \dfrac{\pi}{4}+4\pi = x+y+\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

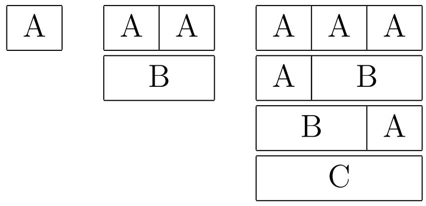
①，②，上の不等式より，求める領域は

$$(**)\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 2\pi \\ 0 \leqq y \leqq 2\pi \\ 0 \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 2\pi \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}+2\pi \\ x=y=2\pi \end{cases}$$



$(**)$ の表す領域は，図の斜線部分および点 $(2\pi,\ 2\pi)$ で，境界線を含む．　■

7 (1) $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4}$



(2) (i) 1 回目が方法 A のとき，残り $n-1$ 枚をすべて取る a_{n-1} 通り．

(ii) 1 回目が方法 B のとき，残り $n-2$ 枚をすべて取る a_{n-2} 通り．

(iii) 1 回目が方法 C のとき，残り $n-3$ 枚をすべて取る a_{n-3} 通り．

したがって，(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$
\begin{aligned}
a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 4 + 2 + 1 = 7 \\
a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 7 + 4 + 2 = 13 \\
a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 13 + 7 + 4 = 24 \\
a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 = 24 + 13 + 7 = 44 \\
a_8 &= a_7 + a_6 + a_5 = 44 + 24 + 13 = 81 \\
a_9 &= a_8 + a_7 + a_6 = 81 + 44 + 24 = 149 \\
a_{10} &= a_9 + a_8 + a_7 = 149 + 81 + 44 = \mathbf{274}
\end{aligned}
$$

(4) 方法 A と方法 B だけで重ねた n 枚のカードを過不足なくすべて取る場合の数を b_n とすると

$$b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\ \ (n \geqq 3)\quad \text{ゆえに}\quad b_3 = 3,\quad b_4 = 5$$

(i) 方法 C を 2 回だけ，それを続けて用いる場合の数は

$$b_4 + b_1b_3 + b_2b_2 + b_3b_1 + b_4 = 5 + 1\cdot3 + 2\cdot2 + 3\cdot1 + 5 = 20 \text{ 通り}$$

$$\boxed{\mathrm{CC}b_4,\ b_1\mathrm{CC}b_3,\ b_2\mathrm{CC}b_2,\ b_3\mathrm{CC}b_1,\ b_4\mathrm{CC}}$$

(ii) 方法 C を 3 回，それを 2 回以上続けて用いる場合は，次の 4 通り．

CCCA，　CCAC，　CACC，　ACCC

よって，求める場合の数は　$274 - (20 + 4) = \mathbf{250}$ (通り)　■

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = k + x + \sqrt{4-x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ より　$f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = \sqrt{4-x^2}$　これを解いて　$x = \sqrt{2}$

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-2$	$\nearrow$	$k+2\sqrt{2}$	$\searrow$	$k+2$

ゆえに，最大値 $f(\sqrt{2}) = k + 2\sqrt{2}$，最小値 $f(-2) = k - 2$

曲線 $C : y = f(x)$ と x 軸が共有点をもつとき

$$k - 2 \leqq 0 \leqq k + 2\sqrt{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-2\sqrt{2} \leqq k \leqq 2}$$

別解 $\ell : y = x + k$，$S : y = -\sqrt{4-x^2}$ とおくと

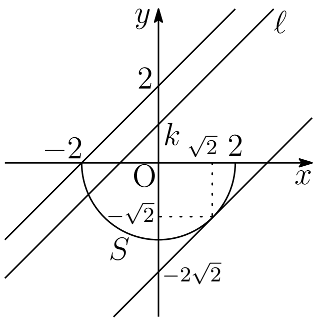
$C : y = f(x)$ と x 軸が共有点をもつ．

$\Longleftrightarrow$ $f(x) = 0$ が解をもつ．

$\Longleftrightarrow$ $x + k = -\sqrt{4-x^2}$ が解をもつ．

$\Longleftrightarrow$ ℓ と S が共有点をもつ．

$\Longleftrightarrow$ $-2\sqrt{2} \leqq k \leqq 2$



(2) 求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-2}^{2} (k + x + \sqrt{4-x^2})^2\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} \{(k^2 + 2kx + x^2) + 2(k+x)\sqrt{4-x^2} + (4-x^2)\}\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} \{(k^2 + 4 + 2k\sqrt{4-x^2}) + 2kx + 2x\sqrt{4-x^2}\}\,dx \\
&= 2\int_{0}^{2} (k^2+4)\,dx + 4k\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx \\
&= 2\Big[\ (k^2+4)x\ \Big]_0^2 + 4k\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4} = 4(k^2 + k\pi + 4)
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = 4\pi(k^2 + k\pi + 4)}$

(3) (2) の結果から　$V = 4\pi\left(k + \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \pi(16 - \pi^2)$

$k = -\dfrac{\pi}{2}$ は (1) で求めた値の範囲にある．

よって，V は，$\boldsymbol{k = -\dfrac{\pi}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\pi(16-\pi^2)}$ をとる．　■

9 (1) $P(x)$ を $(x+1)^2$，$(x-1)^2$ で割ったときの商をそれぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，条件から

$$(*)\begin{cases} P(x)=(x+1)^2Q_1(x)-x+4 \\ P(x)=(x-1)^2Q_2(x)+2x+5 \end{cases}$$

$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $mx+n$ とおくと

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_3(x)+mx+n$$

上式に $x=-1,\ 1$ を代入すると　$P(-1)=-m+n$，$P(1)=m+n$

$(*)$ から，$P(-1)=5$，$P(1)=7$ であるから

$$-m+n=5,\quad m+n=7\quad これを解いて\quad m=1,\quad n=6$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x+6}$

(2) $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x+5$ であるから，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割った商を $Q_4(x)$，余りを $p(x-1)^2+2x+5$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)(x-1)^2Q_4(x)+p(x-1)^2+2x+5 \\ &=(x+1)(x-1)\{(x-1)Q_4(x)+p\}+(-2p+2)x+(2p+5) \end{aligned}$$

上の第 2 式と (1) の結果から　$-2p+2=1$，$2p+5=6$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

よって，求める余りは　$\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2x+5=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{11}{2}}$

別解 $P(-1)=5$ を上の第 1 式に代入すると　$4p+3=5$　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2}$

(3) (2) の結果から，$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割った商を $Q_5(x)$，余りを $q(x+1)(x-1)^2+\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{11}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2} \\ &=(x+1)^2(x-1)^2Q_5(x)+q(x+1)\{(x+1)(x-3)+4\}+\frac{1}{2}(x+1)^2+5 \\ &=(x+1)^2\left\{(x-1)^2Q_5(x)+q(x-3)+\frac{1}{2}\right\}+4qx+4q+5 \end{aligned}$$

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $-x+4$ であるから

$$4q=-1,\quad 4q+5=4\quad ゆえに\quad q=-\frac{1}{4}$$

よって，求める余りは

$$-\frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{21}{4}}$$

別解 $(*)$ の第 1 式を微分すると

$$P'(x) = 2(x+1)Q_1(x) + (x+1)^2 Q_1'(x) - 1 \quad \text{ゆえに} \quad P'(-1) = -1$$

前ページで示した等式

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)^2 Q_5(x) + q(x+1)(x-1)^2 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2}$$

を微分すると

$$\begin{aligned} P'(x) = &\{(x+1)^2(x-1)^2 Q_5(x)\}' \\ &+ q\{(x-1)^2 + 2(x+1)(x-1)\} + x + 1 \end{aligned}$$

ゆえに $P'(-1) = 4q$ よって $p = -\dfrac{1}{4}$

解説 $(*)$ より $P(-1) = 5$，$P(1) = 7$，$P'(-1) = -1$，$P'(1) = 2$
$P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x-1)^2 Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ P'(x) &= \{(x+1)^2(x-1)^2 Q(x)\}' + 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

上の 2 式に $x = -1,\ 1$ を代入して

$$\begin{aligned} -a+b-c+d = 5, &\quad a+b+c+d = 7 \\ 3a-2b+c = -1, &\quad 3a+2b+c = 2 \end{aligned}$$

これを解いて $a = -\dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{3}{4},\ c = \dfrac{5}{4},\ d = \dfrac{21}{4}$

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)^2 Q(x) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{21}{4}$$

ここで，$R(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}x + \dfrac{21}{4}$ とおく．

$R(x)$ をそれぞれ $(x+1)(x-1)$，$(x+1)(x-1)^2$ で割ることにより

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+1)(x-1)\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) + x + 6, \\ R(x) &= (x+1)(x-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

よって，$P(x)$ を $(x+1)(x-1)$，$(x+1)(x-1)^2$ で割った余りは，それぞれ

$$x + 6, \quad \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{11}{2}$$

■

10 (1) $X+Y+Z=0$ のとき，$X=Y=Z=0$ より　$\left(\dfrac{1}{10}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{1000}}$

(2) $X=3$ かつ $X+Y+Z=9$ のとき，$Y+Z=6$ より，次の 7 通り

Y	0	1	2	3	4	5	6
Z	6	5	4	3	2	1	0

よって，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\times 7=\boldsymbol{\dfrac{7}{1000}}$

(3) $X+Y+Z=9$ より

$X=k$ のとき $(k=0,1,\cdots,9)$，次の $10-k$ 通り

Y	0	1	$\cdots$	$8-k$	$9-k$
Z	$9-k$	$8-k$	$\cdots$	1	0

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3\sum_{k=0}^{9}(10-k)=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{10}k=\frac{55}{1000}=\boldsymbol{\frac{11}{200}}$$

(4) $X+Y+Z=12$ より

(i) $X=k$ のとき $(k=0,1,2)$，次の $7+k$ 通り

Y	$3-k$	$\cdots$	9
Z	9	$\cdots$	$3-k$

(ii) $X=k$ のとき $(k=3,4,\cdots,9)$，次の $13-k$ 通り

Y	0	$\cdots$	$12-k$
Z	$12-k$	$\cdots$	0

(i) と (ii) の場合の総数は

$$\sum_{k=0}^{2}(7+k)+\sum_{k=3}^{9}(13-k)=\frac{1}{2}\cdot 3(7+9)+\frac{1}{2}\cdot 7(10+4)=73$$

よって，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{10}\right)^3\times 73=\boldsymbol{\dfrac{73}{1000}}$　■

11 (1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ より

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq \sin x + \cos x \leqq \sqrt{2}}$$

(2) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2x = t^2 - 1$$

よって　$y = (t^2 - 1) + \sqrt{6}t = \boldsymbol{t^2 + \sqrt{6}t - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から　$y = \left(t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$　$(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$t = \sqrt{2}$ のとき，最大値 $1 + 2\sqrt{3}$ をとり，

$t = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，最小値 $-\frac{5}{2}$ をとる．

$t = \sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$t = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi$$

よって　$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{1 + 2\sqrt{3}}$，

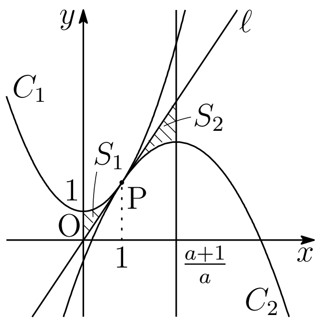
$\boldsymbol{x = \frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\frac{5}{2}}$

■

12 (1) $f(x) = x^2 + 1$ を微分すると　$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2$ より，C 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - 2 = 2(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x}$$



(2) $g(x) = -ax^2 + bx + c$ より，$g'(x) = -2ax + b$

条件から，$g(1) = 2$，$g'(1) = 2$ であるから

$$-a + b + c = 2, \quad -2a + b = 2 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a + 2, \quad c = -a$$

したがって，C_2 の方程式は

$$y = -ax^2 + (2a + 2)x - a = -a\left(x - \frac{a+1}{a}\right)^2 + \frac{2a+1}{a}$$

よって，C_2 の頂点の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{a+1}{a},\ \frac{2a+1}{a}\right)}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$S_1 = \int_0^1 \{(x^2 + 1) - 2x\}\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$S_2 = \int_1^{\frac{a+1}{a}} \left\{2x - (-ax^2 + (2a+2)x - a)\right\}dx$$

$$= a\int_1^{\frac{a+1}{a}} (x-1)^2\,dx = a\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{a+1}{a}} = \frac{1}{3a^2}$$

$S_2 = 2S_1$ より，$\dfrac{1}{3a^2} = 2\cdot\dfrac{1}{3}$ であるから　$a^2 = \dfrac{1}{2}$

よって，$a > 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ ■

8.6 2020年

- 工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{10}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 教育文化 (中学数学) 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{4}$, $\boxed{8}$, $\boxed{11}$ 数I・II・III・A・B (90分)
- 教育文化 (中学 [社会，理科，技術，家庭]，初等教育，特別支援，社会システム) 学部・農学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{11}$, $\boxed{12}$ 数I・II・A・B (90分)

$\boxed{1}$ 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{(e^x+e^{-x})^2}$ である．

(2) 関数 $f(x)=\log\sqrt{x^2+1}$ の導関数は，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{x^2+1}$ である．

(3) x の関数 y が，t を媒介変数として，

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$$

で表されているとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表すと，$\dfrac{dy}{dx}=\boxed{\text{う}}$ である．

(4) 関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ の不定積分は，$\displaystyle\int f(x)\,dx=\boxed{\text{え}}+C$ である．ただし，C は積分定数とする．

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ の値は $\boxed{\text{お}}$ である．

(6) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3x+2)\sin x\,dx$ の値は $\boxed{\text{か}}$ である．

2 関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ $(x>1)$ および座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ について，次の各問に答えよ．

(1) 次の空欄を適切な数または数式で埋めよ．

$f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{あ}}}{(x-1)^3}$ であり，第 2 次導関数は

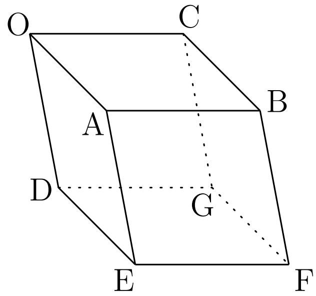
$f''(x)=\dfrac{\boxed{\text{い}}}{(x-1)^4}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\boxed{\text{う}}$ である．

$x\to\infty$ のとき，曲線 C は直線 $y=\boxed{\text{え}}$ に限りなく近づく．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 C の凹凸，変曲点，および漸近線を調べて，曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=2$，$x=3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

3 右図の平行六面体 OABC-DEFG において，辺 BC の中点を P，線分 AP の中点を Q，線分 FQ の中点を R とし，直線 OR が 3 点 A，C，G を通る平面と交わる点を S とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とするとき，次の各問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のそれぞれを，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 2 つの線分 OS と SR の比 OS : SR を求めよ．

4 次の各問に答えよ．

(1) 数学的帰納法を用いて，自然数 n に対する次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 自然数の列を，次のような群に分ける．ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする．

$$\underset{\text{第 1 群}}{1}\ \Big|\ \underset{\text{第 2 群}}{2,\,3}\ \Big|\ \underset{\text{第 3 群}}{4,\,5,\,6}\ \Big|\ \cdots$$

第 n 群の最初の数を a_n とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を，n を用いて表せ．

5　n を 3 以上の自然数とする．1 から n までの背番号が 1 つずつ付けられた n 人の大人と 1 から n までの背番号が 1 つずつ付けられた n 人の子どもがいる．

例えば，$n=3$ の場合には，

背番号が 1 である大人と子どもが 1 人ずつ，

背番号が 2 である大人と子どもが 1 人ずつ，

背番号が 3 である大人と子どもが 1 人ずつ

いる．

この $2n$ 人が次の (A) と (B) の両方を満たすように手をつないで輪をつくる．

(A)　大人と子どもが交互に並ぶ

(B)　背番号が等しい人どうしは手をつながない

このような並び方の総数を $T(n)$ で表すとき，次の各問に答えよ．

(1)　$T(3)$ を求めよ．

(2)　$T(4)$ を求めよ．

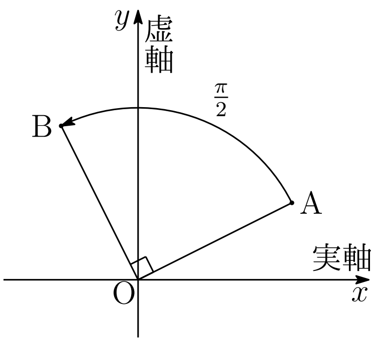
(3)　$T(5)$ を求めよ．

6　鋭角三角形 OAB における ∠O の二等分線と辺 AB との交点を D，A から辺 OB に下ろした垂線の足を E，線分 OD と線分 AE との交点を H とする．$\mathrm{OA}=x$，$\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

となるような s，t のそれぞれを，x，θ を用いて表せ．

7　s，t を正の実数とする．i は虚数単位とする．複素数平面上で，複素数 1 の表す点を P とし，$\alpha=s+ti$ の表す点を A とする．原点 O を中心として点 A を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を B とし，点 P を中心として点 B を $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を C とする．2 点 B，C の表す複素数をそれぞれ β，γ とするとき，次の各問に答えよ．



(1)　β，γ のそれぞれを，α を用いて表せ．

(2)　点 C が直線 PA 上にあるとき，α を，s を用いて表せ．

(3)　△ACB の外接円の中心を表す複素数を w とする．点 C が直線 PA 上にあるとき，w を，s を用いて表せ．

8 △ABC における ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし，A から D へのばした半直線と △ABC の外接円との交点を E とする．∠BAD の大きさを θ とし，$\mathrm{BE}=3$，$\cos 2\theta=\dfrac{2}{3}$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分 BC の長さを求めよ．

(2) △BEC の面積を求めよ．

(3) $\mathrm{AD}:\mathrm{DE}=4:1$ のとき，線分 AB，AC の長さを求めよ．ただし，$\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ とする．

9 原点を O とする座標平面上に 2 つの曲線

$$C_1:\frac{x^2}{9}+y^2=1\ (y\geqq 0),\quad C_2:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1\ (x>0)$$

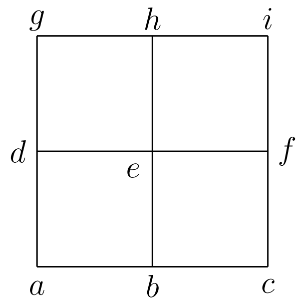
がある．C_1 と y 軸との交点を E，C_2 と x 軸との交点を F とする．また，C_1 と C_2 は 1 点で交わる．その交点を G とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 G の座標を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=x\sqrt{x^2-6}-6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ の導関数を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(3) 2 つの曲線 C_1，C_2 および 2 つの線分 OE，OF で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

10 A と B は右図のような格子状の道を以下のように移動するゲームを行う．



- A と B は，このゲームにおいて a から i までの 9 つの点のいずれかにいる．
- 最初 A は点 a に，また B は点 i にいる．
- A と B は同時に出発し，1 秒後に隣の点へ移動する．
- 1 回目の移動では，A と B のそれぞれは隣の点へ確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する．
- 2 回目以降の移動では，A と B のそれぞれは 1 秒前に自分がいた点以外の点へ等しい確率で移動する．ただし，移動できる点が 1 つの場合には，その点へ確率 1 で移動する．
- A と B がはち合せする (すなわち，A と B が同時に同じ点に到達する) と，このゲームは終了する．

例えば，A が出発から 1 秒後に点 b に，2 秒後に点 e にいて，B が出発から 1 秒後に点 f に，2 秒後に点 e にいたら，出発から 2 秒後に A と B は点 e ではち合せし，ゲームは終了する．出発から 4 秒以内でゲームが終了する確率を求めよ．

11 整式 $P(x) = x^3 + 15x^2 + 71x + 105$ について，次の各問に答えよ．

(1) $P(x)$ を因数分解せよ．

(2) 以下のような自然数 k のうち，最も大きいものを求めよ．

k は，すべての正の奇数 a について次の条件 $(*)$ を満たす．

$(*)$　$P(a)$ は k の倍数である．

12 k を定数とする．座標平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + 3x + 5$，$C_2 : y = 2x^2 + 3x + k$ がある．C_1 と C_2 の交点は 2 つあり，それらの x 座標を α，β とする．ただし，$\alpha < 1 < \beta$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) k を，β を用いて表せ．

(2) k のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 区間 $1 \leqq x \leqq \beta$ において，放物線 C_1，C_2 および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を，β を用いて表せ．

(4) (3) の面積 S が 5 となるような k の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ より

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

(あ) **4**

(2) $f(x) = \log\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

(い) $\boldsymbol{x}$

(3) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$

(う) $\boldsymbol{\dfrac{\sin t}{1 - \cos t}}$

(4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} = \dfrac{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})}$
$= \sqrt{x+2} + \sqrt{2}$

よって $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})\,dx = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x + C$

(え) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx$ について，$x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2}\cos\theta,\quad \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$

(お) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+2)\sin x\,dx = \Big[-(3x+2)\cos x + 3\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6$

(か) **6** ■

2　(1) $x^3 = \{(x-1)+1\}^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1$ より

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = (x-1) + 3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

上の第 1 式から

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - x\} = \lim_{x\to\infty}\left\{2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\} = 2$$

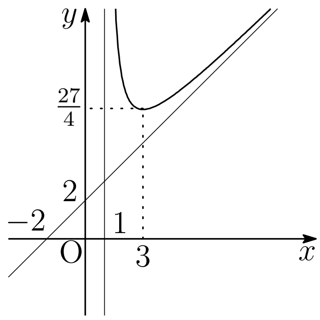
したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (x+2)\} = 0$　$\cdots$①

よって，曲線 $C : y = f(x)$ は直線 $y = x+2$ に限りなく近づく．

(あ) $\boldsymbol{x^2(x-3)}$　(い) $\boldsymbol{6x}$　(う) **2**　(え) $\boldsymbol{x+2}$

(2) 関数 $f(x)$ の $x > 1$ における増減表は

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗



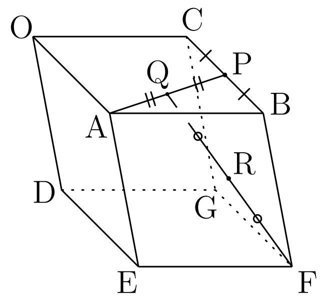
増減表より，極小値 $f(3) = \boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

変曲点はない．また，$\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x) = \infty$ および ① より，$y = f(x)$ $(x > 1)$ のグラフは右の図のようになる．

(3) 求める面積 S は

$$S = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left\{(x-1) + 3 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$$
$$= \int_2^3 \left\{x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\log(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = \boldsymbol{5 + 3\log 2}$$

3　(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}&=\frac{1}{2}\left\{(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})+\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}\end{aligned}$$

(2) $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくと，$\vec{g}=\vec{c}+\vec{d}$ より，$\vec{d}=\vec{g}-\vec{c}$ を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}(\vec{g}-\vec{c})=\frac{7}{8}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{g}\\&=\frac{7\vec{a}+2\vec{c}+4\vec{g}}{8}=\frac{13}{8}\cdot\frac{7\vec{a}+2\vec{c}+4\vec{g}}{13}\end{aligned}$$

直線 OR と平面 ACG の交点 S の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{7\vec{a}+2\vec{c}+4\vec{g}}{13}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{13}{8}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$　よって　OS : SR = **8 : 5**　■

$\boxed{4}$ (1)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n=1$ のとき
$$左辺 = 1^2 = 1, \quad 右辺 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1) = 1$$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］$n=j$ のとき (A) が成り立つ，すなわち
$$\sum_{k=1}^{j} k^2 = \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1)$$

であると仮定すると，$n=j+1$ のときの (A) の左辺は
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1} k^2 = \sum_{k=1}^{j} k^2 + (j+1)^2 &= \frac{1}{6}j(j+1)(2j+1) + (j+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(j+1)(j+2)(2j+3) \\ &= \frac{1}{6}(j+1)\{(j+1)+1\}\{2(j+1)+1\}\end{aligned}$$

これは，$n=j+1$ のときの (A) の右辺に等しい．
よって，$n=j+1$ のときも (A) が成り立つ．

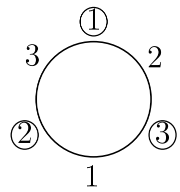
［1］，［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ．

(2) $n \geqq 2$ のとき
$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) + 1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \quad \cdots (*)$$

$a_1 = 1$ であるから，$n \geqq 1$ について，$(*)$ が成立する．よって
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n^2+5)}\end{aligned}$$

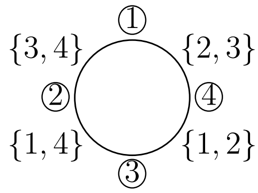
■

5 (1) 大人 3 人 (①,②,③) を先に配置し，条件 (A),(B) を満たすように子ども 3 人 (1,2,3) を配置する．まず大人 3 人の並び方は 2! 通りあり，そのときの大人の並び方に対し，子ども 3 人の並び方は 1 通りであるから



$$T(3) = 2! \times 1 = \mathbf{2}$$

(2) 大人 4 人 (①,②,③,④) を先に配置し，条件 (A),(B) を満たすように子ども 4 人 (1,2,3,4) を配置する．まず大人 4 人の並び方は 3! 通りあり，そのときの大人の並び方に対し，子ども 4 人の並び方は 2 通りであるから



$$T(4) = 3! \times 2 = \mathbf{12}$$

補足 例えば，①② の間を 3 とすれば,「④① の間は 2→③④ の間は 1→②③ の間は 4」の 1 通りが決定する．

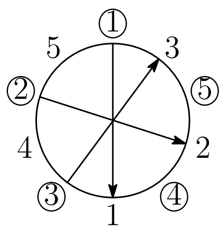
(3) 大人 5 人 (①,②,③,④,⑤) を先に配置し，条件 (A),(B) を満たすように子ども 5 人 (1,2,3,4,5) を配置する．ここでは同じ番号の大人と子どもを親子とよぶことにする．まず大人 5 人の並び方は 4! 通りあり，大人が反時計周りに ①〜⑤ の順に並んでいるものを考える．このときの大人の並び方に対し，親子が正面 (真正面) に向き合う組の個数について場合分けを行う．

(i) 親子 5 組が正面に向き合うとき　1 (通り)

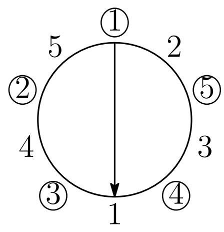
(ii) 親子 3 組が正面に向き合うとき，{123, 234, 345, 451, 512} の親子が正面に向き合うときの 5 通り．

(iii) 親子 1 組が正面に向き合うとき　$1 \times 5 = 5$ (通り)

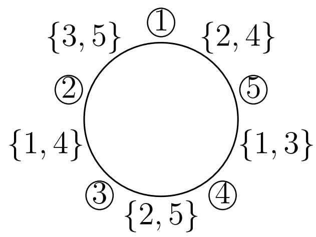
(iv) 親子 0 組が正面に向き合うとき　2 (通り)



3 組が正面



1 組が正面

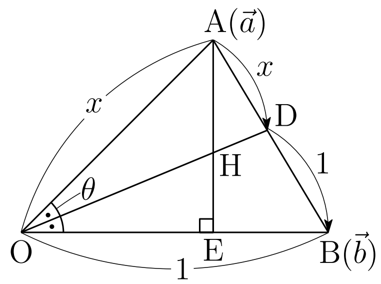


0 組が正面

また，親子 5 組，親子 3 組が正面に向き合っている中の 1 組だけをそれぞれ解消し，親子 4 組，親子 2 組が正面に向き合わせることはできない．

よって　$T(5) = 4! \times (1 + 5 + 5 + 2) = 24 \times 13 = \mathbf{312}$ ■

6 線分 OD は ∠O の二等分線であるから



$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=x:1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\vec{a}+x\vec{b}}{x+1}$　$\cdots(*)$

$\mathrm{OE}=x\cos\theta$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(x\cos\theta)\vec{b}$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$x\vec{b}=\dfrac{1}{\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{x+1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)=\frac{1+\cos\theta}{(x+1)\cos\theta}\cdot\frac{(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{1+\cos\theta}$$

H は線分 AE 上の点であることに注目して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{1+\cos\theta}=\frac{(\cos\theta)\vec{a}+(x\cos\theta)\vec{b}}{1+\cos\theta}\\&=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{a}+\frac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{b}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$，$\boldsymbol{t=\dfrac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

別解 △OBD および直線 AE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1-x\cos\theta}{x\cos\theta}=1$$

したがって　$\mathrm{OH}:\mathrm{HD}=(1+x)\cos\theta:1-x\cos\theta$

これから　$\mathrm{OH}:\mathrm{OD}=(1+x)\cos\theta:1+\cos\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{(1+x)\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\vec{a}+x\vec{b}}{x+1}\\&=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{a}+\frac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}\vec{b}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$，$\boldsymbol{t=\dfrac{x\cos\theta}{1+\cos\theta}}$　■

$\boxed{7}$ (1) 点 B(β) は点 A(α) を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\beta = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\alpha i}$$

点 C(γ) は点 P(1) を中心に点 B(αi) を $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\frac{\gamma - 1}{\alpha i - 1} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

よって　　$\gamma = 1 - i(\alpha i - 1) = \boldsymbol{1 + \alpha + i}$

(2) $\alpha = s + ti$ (s, t は正の実数) であるから　$\alpha \neq 1$
C(γ) が直線 PA 上にあるとき，次の値は実数である．

$$\begin{aligned}\frac{\gamma - 1}{\alpha - 1} &= \frac{(1 + \alpha + i) - 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha + i)(\overline{\alpha} - 1)}{(\alpha - 1)(\overline{\alpha} - 1)} \\ &= \frac{|\alpha|^2 - \alpha + \overline{\alpha} i - i}{|\alpha - 1|^2}\end{aligned}$$

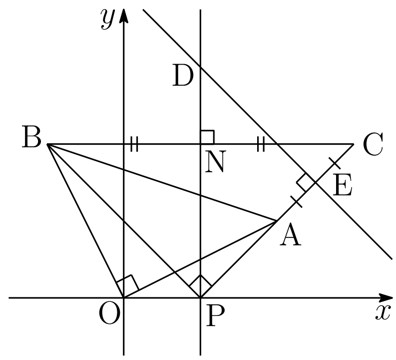
このとき　$-\alpha + \overline{\alpha} i - i = -(s + ti) + (s - ti)i - i$
$\qquad\qquad = (-s + t) + (s - t - 1)i \quad \cdots ①$

上の 2 式から，① は実数であるから

$$s - t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = s - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha = s + (s - 1)i}$$

(3) (1) の結果から，$\alpha = s + (s - 1)i$ より

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha i = \{s + (s - 1)i\}i = 1 - s + si, \\ \gamma &= 1 + \alpha + i = 1 + \{s + (s - 1)i\} + i \\ &= s + 1 + si\end{aligned}$$

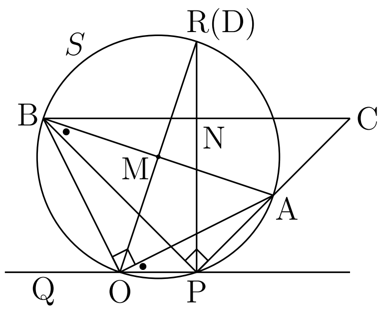


線分 BC の中点を N とすると　N$(1 + si)$

$\gamma - \beta = 2s$ より，BC は x 軸と平行である．

線分 AC の中点を E とすると　　E$\left(s + \frac{1}{2} + \left(s - \frac{1}{2}\right)i\right)$

$\gamma - \alpha = 1 + i$ より，AC の偏角は $\frac{\pi}{4}$
△PDE は直角二等辺三角形であるから，D は P の実部に等しく，E の虚部の 2 倍に等しい．よって　**D$(1 + (2s - 1)i)$**



別解 $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ より，2 点 O，P は AB を直径の両端する円 S 上にある．S の中心を M とし，直線 OM と S の交点で O でない点を R とする．円周角の定理により，$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{ABP} = \theta$ とし，直線 OP の O に関して P と反対側に点 Q をとる．$\triangle$OAB，$\triangle$PCB は直角二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BOQ} &= \pi - (\angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{AOP}) \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\pi}{2} - \theta, \\ \angle\mathrm{OBC} &= \angle\mathrm{ABO} + \angle\mathrm{CBP} - \angle\mathrm{ABP} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}$$

上の 2 式から　OP//BC，　OR は S の直径であるから　$\angle\mathrm{OPR} = \dfrac{\pi}{2}$

PR と BC の交点を N とすると　$\mathrm{PN}\perp\mathrm{BC}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PNB} \equiv \triangle\mathrm{PNC}$　また　$\triangle\mathrm{OMA} \equiv \triangle\mathrm{OMB}$

したがって，直線 OR は線分 AB の垂直二等分線，直線 PR は線分 BC の垂直二等分線である．これから，点 R は $\triangle$ABC の外心，すなわち，求める点 D である．$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であるから，$\mathrm{D}(\alpha+\beta)$.

$\alpha = s + (s-1)i$，$\beta = 1 - s + si$ より

$$\mathbf{D}(\mathbf{1} + (\mathbf{2}\boldsymbol{s} - \mathbf{1})\boldsymbol{i})$$

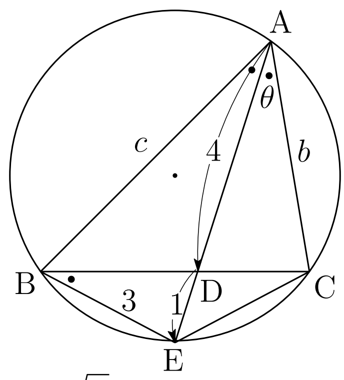
■

8 (1) $\cos 2\theta = \dfrac{2}{3} > 0$ より，$0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2}{3}$　ゆえに　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$　ゆえに　$\sin 2\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

△ABC の外接円の半径を R とし，△ABC，△ABE に正弦定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 2\theta} = 2R, \quad \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta} = 2R$$

上の 2 式から

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 2\theta} = \frac{\mathrm{BE}}{\sin\theta}$$

したがって　$\mathrm{BC} = \dfrac{\mathrm{BE}\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\mathrm{BE}\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\sqrt{\dfrac{5}{6}} = \boldsymbol{\sqrt{30}}$

(2) 円周角の定理により　$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{EAC} = \theta$

よって　$\triangle\mathrm{BEC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BC}\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{30}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{5}}$

(3) $\mathrm{AD} : \mathrm{DE} = 4 : 1$ であるから　$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{BEC} = 4 : 1$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC} = 4\triangle\mathrm{BEC} = 4\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とすると　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}bc$

上の 2 式から　$\dfrac{\sqrt{5}}{6}bc = 6\sqrt{5}$　ゆえに　$bc = 36$　$\cdots$①

△ABC に余弦定理を適用すると　$\mathrm{BC}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 2\theta$

したがって　$(\sqrt{30})^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot 36\cdot\dfrac{2}{3}$　ゆえに　$b^2 + c^2 = 78$　$\cdots$②

①，② より，b^2，c^2 を解とする 2 次方程式は　$t^2 - 78t + 36^2 = 0$

これを解いて　$t = 39 \pm \sqrt{39^2 - 36^2} = 39 \pm 15 = 54,\ 24$

$\mathrm{AB} > \mathrm{AC}$ であるから　$\mathrm{AB} = \sqrt{54} = \boldsymbol{3\sqrt{6}}$，$\mathrm{AC} = \sqrt{24} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$

補足 本題の計算結果から，△ABC は $C = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形．■

9　(1) $C_1 : \dfrac{x^2}{9}+y^2=1\ (y \geqq 0)$，$C_2 : \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1\ (x>0)$

上の 2 式を連立して解くと　$x^2=\dfrac{27}{4},\ \ y^2=\dfrac{1}{4}$

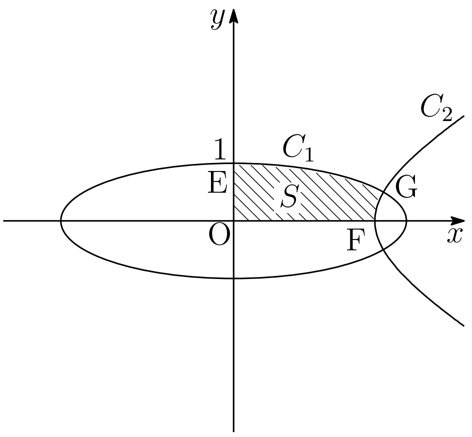
$x>0,\ y \geqq 0$ に注意して　$\mathrm{G}\left(\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}}\right)$

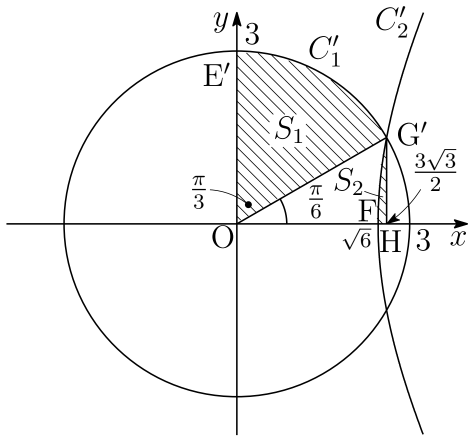
(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-6}-6\log|x+\sqrt{x^2-6}|$ より

$$f'(x)=\sqrt{x^2-6}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6}}-6\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-6}}}{x+\sqrt{x^2-6}}$$
$$=\sqrt{x^2-6}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}}-\frac{6}{\sqrt{x^2-6}}=\boldsymbol{2\sqrt{x^2-6}}$$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において C_1，C_2 を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，C_2' とすると

$$C_1' : \frac{x^2}{9}+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1 \quad \text{すなわち} \quad x^2+y^2=9\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$$
$$C_2' : \frac{x^2}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2=1 \quad \text{すなわち} \quad y=\sqrt{3}\sqrt{x^2-6}\ (x \geqq 0)$$





このとき，G の移る点を $\mathrm{G'}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ とすると，OG′ の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$

上の図の斜線部分の面積を S_1，S_2 とすると　$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$

$$S_2=\sqrt{3}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\sqrt{x^2-6}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}f'(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ f(x)\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\ x\sqrt{x^2-6}-6\log|x+\sqrt{x^2-6}|\ \Big]_{\sqrt{6}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4}-3\log 2\right)$$

G′ から x 軸に垂線 G′H を引くと　$\triangle \mathrm{OG'H} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

したがって

$$\begin{aligned} 3S &= S_1 + \triangle \mathrm{OG'H} - S_2 \\ &= \frac{3}{2}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4} - 3\log 2\right) \\ &= 3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2\right) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\log 2}$ ■

10 点 $x(x = a, b, \cdots, i)$ において t (t は 2 以上の整数) 秒後にゲームが終了する確率を $x(t)$ とおく．t が偶数のとき，A，B は $\{a,\ c,\ e,\ g,\ i\}$ のいずれかに位置し，t が奇数のとき，A，B は $\{b,\ d,\ f,\ h\}$ のいずれか位置する．対称性により

$$a(t) = i(t), \quad b(t) = d(t) = f(t) = g(t), \quad c(t) = g(t)$$

が成立する．

(i) $t = 2$ で終了するとき，点 $c,\ e,\ g$ について

$c(2)$ は $\mathrm{A} : a \to b \to c,\ \mathrm{B} : i \to f \to c$ と移動する確率．

$e(2)$ は $\mathrm{A} : a \begin{array}{c} \nearrow\ b\ \searrow \\ \searrow\ d\ \nearrow \end{array} e,\ \mathrm{B} : i \begin{array}{c} \nearrow\ f\ \searrow \\ \searrow\ h\ \nearrow \end{array} e$ と移動する確率．

$$\begin{aligned} c(2) = g(2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16} \\ e(2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ii) $t = 3$ で終了するとき，$b,\ d,\ f,\ h$ について

$b(3)$ は $\mathrm{A} : a \to d \to e \to b,\ \mathrm{B} : i \to f \to c \to b$ と移動する確率．

$$b(3) = d(3) = f(3) = h(3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{48}$$

(iii) $t=4$ で終了するとき，点 a, c, e, g, i について

$a(4)$ は，次のように移動する確率

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathrm{A}: a \to b \to e \to d \to a,\ \mathrm{B}: i \to f \to c \to b \to a \\
\text{または} & \mathrm{A}: a \to d \to e \to b \to a,\ \mathrm{B}: i \to h \to g \to d \to a
\end{array}
$$

$e(4)$ は，次のように移動する確率

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathrm{A}: a \to b \to c \to f \to e,\ \mathrm{B}: i \to h \to g \to d \to e \\
\text{または} & \mathrm{A}: a \to d \to g \to h \to e,\ \mathrm{B}: i \to f \to c \to b \to e
\end{array}
$$

なお，$t=4$ ではじめて A と B が点 c, g ではち合せすることはない．

$$
\begin{aligned}
&a(4)=i(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{96}\\
&e(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{32}\\
&c(4)=g(4)=0
\end{aligned}
$$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$
\frac{1}{16}\times2+\frac{1}{4}+\frac{1}{48}\times4+\frac{1}{96}\times2+\frac{1}{32}=\boldsymbol{\frac{49}{96}}
$$

■

11 (1) $P(x)=x^3+15x^2+71x+105$ より，$P(-3)=0$ であるから，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつことに注意して

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(x+3)(x^2+12x+35)\\
&=\boldsymbol{(x+3)(x+5)(x+7)}
\end{aligned}
$$

(2) 正の奇数 a を $a=2n-1$ とおくと (n は自然数)，(1) の結果から

$$
\begin{aligned}
P(a)&=P(2n-1)\\
&=\{(2n-1)+3\}\{(2n-1)+5\}\{(2n-1)+7\}\\
&=(2n+2)(2n+4)(2n+6)\\
&=8(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}
$$

連続する 3 整数 $n+1$, $n+2$, $n+3$ の中には 2 の倍数，3 の倍数が少なくとも 1 つあるから，$P(a)$ は，$8\cdot2\cdot3$，すなわち，**48** の倍数である． ■

12 (1) $C_1 : y = -x^2+3x+5$，$C_2 : y = 2x^2+3x+k$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+3x+5 = 2x^2+3x+k \quad \text{整理すると} \quad 3x^2+k-5=0$$

β は，この方程式の解であるから

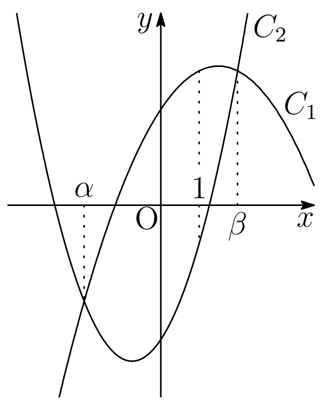
$$3\beta^2+k-5=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k=5-3\beta^2}$$

(2) $\beta > 1$ であるから，(1) の結果より

$$k < 5-3\cdot 1^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k<2}$$

(3) $C_1 : y = -x^2+3x+5$，$C_2 : y = 2x^2+3x+5-3\beta^2$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_1^\beta \{(-x^2+3x+5)-(2x^2+3x+5-3\beta^2)\}\,dx \\ &= \int_1^\beta (-3x^2+3\beta^2)\,dx = \Big[-x^3+3\beta^2 x\Big]_1^\beta \\ &= \boldsymbol{2\beta^3-3\beta^2+1} \end{aligned}$$



(4) $S=5$ であるから，これを (3) の結果に代入して

$$2\beta^3-3\beta^2+1=5 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta-2)(2\beta^2+\beta+2)=0$$

$\beta>1$ に注意して　$\beta=2$　これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{k=-7}$ ■

第 9 章　鹿児島大学

出題分野　**1.** 理系 A· · · 理 [数物地]・工・医 [医]
2. 理系 B· · · 理 [生]・医 [理]・歯・農・水
3. 教育学部

理系 A　出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	鹿児島大学 **理系 A**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	式と証明	1						1			
	複素数と方程式				2		2			2	
II	図形と方程式						1	1	2	1	
	三角関数							2	1		1
	指数関数と対数関数	1		2	2	2					
	微分法と積分法	2	2			2					6
	式と曲線	6*	6*	6*	6*			6			6
	複素数平面					7	7	7	7	6	
	関数										
III	極限								6		
	微分法とその応用								6		6
	積分法	4	4	4							
	積分法の応用				4	6	6		6	7	7
	場合の数と確率		1·7*	1	1	1				1·5*	1·2
A	整数の性質	1				1	1		1	1	1
	図形の性質		1	1	1	1	1		1		
	平面上のベクトル	3	3	3		4*			4*		4*
B	空間のベクトル						4*	4*		4*	
	数列			3	3	3*	3*	3*	3*	3*	3*
	確率分布と統計	7*·8*	8*	7*·8*	7*·8*	5*	5*	5*	5*		5*
C	行列 (旧課程)	5*	5*	5*	5*						

数字は問題番号 (∗ から 1 題選択)

理系 B　出題分野 (2011-2020) 90 分

◀	鹿児島大学 理系 B	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	式と証明	1						1			
	複素数と方程式				2					2	
	図形と方程式						1	1	2	1	
	三角関数							2	1		1
	指数関数と対数関数	1		2	2	2	2				
	微分法と積分法	2	2			2	2	1	2		
A	場合の数と確率		1	1	1	1				1·5*	1·2
	整数の性質	1				1	1		1	1	1
	図形の性質		1	1	1	1	1		1		
B	平面上のベクトル	3	3	3		4*			4*		4*
	空間のベクトル						4*	4*		4*	
	数列			3	3	3*	3*	3*	3*	3*	3*
	確率分布と統計					5*	5*	5*	5*		5*

数字は問題番号 (∗ から 1 題選択)

教育学部 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	鹿児島大学 教育学部	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
II	式と証明	1						1			
	複素数と方程式				2*		2#			2#	
	図形と方程式						1	1	2#	1	
	三角関数							2#	1		1
	指数関数と対数関数	1		2*	2*	8					
	微分法と積分法	2*	2*			9#		1	2#		
III	式と曲線										
	複素数平面										
	関数										
	極限										
	微分法とその応用										
	積分法	9*					2#				
	積分法の応用		9*	9*	9*	10#		8#	8#	8#	8#
A	場合の数と確率		1	1	1	1				1·5*	1·2#
	整数の性質	1				1	1		1	1	1
	図形の性質		1	1	1	1	1		1		
B	平面上のベクトル	3	3	3		4*			4*		4*
	空間のベクトル						4*	4*		4*	
	数列			3	3	3*	3*	3*	3*	3*	3*
	確率分布と統計					5*	5*	5*	5*		5*

数字は問題番号 (∗，#からそれぞれ 1 題選択)

9.1 2015 年

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部 $\boxed{1}$, $\boxed{8}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{9}$, $\boxed{10}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) SATTUN という 6 文字を並べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字になるものの総数を求めよ．

(2) 半径 r の円 O$'$ が半径 $2r$ の円 O に点 P で内接し，さらに円 O$'$ は円 O の弦 AB に点 Q で接している．線分 PQ の延長が円 O と交わる点を M とする．$\angle\mathrm{PQB} = 60^\circ$ のとき，線分 QM の長さを求めよ．

(3) 1 次不定方程式

$$37x + 32y = 1$$

の整数解を 1 組求めよ．

$\boxed{2}$ (1) 0 でない実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく．ただし，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(a) S と T を m と n を用いて表せ．

(b) $S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるような m と n を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n\{1+(-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n=a_{2n-1},\quad c_n=a_{2n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n$ を求めよ．

4 平面上に三角形 ABC と点 O があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\neq 0$$

を満たしていると仮定する．辺 BC の中点を M，線分 OB の中点を N とし，三角形 OBC の外心を P とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{M}\neq\mathrm{P}$ のとき，線分 MP と線分 OA は平行であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=t\vec{a}$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 t を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

5 整数 n $(n\geqq 4)$ に対し，2 枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，2 枚とも表が出るか，または n 回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする．確率変数 X_n について，次の各問いに答えよ．

(1) $n-1$ 以下の自然数 k に対して，確率 $P(X_n=k)$ を求めよ．また，確率 $P(X_n>3)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_n=n)$ を n を用いて表せ．

(3) X_n の平均を E_n とかくとき，$E_{n+1}-E_n$ を求めよ．

6 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底であり，$x > 0$ とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，その概形を描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．

(2) $t > 0$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積 $g(t)$ を求めよ．

(3) $t > 0$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および二つの直線 $x = t$ と $x = t + 1$ で囲まれる部分の面積 $h(t)$ が最大となるような t の値を求めよ．

7 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 方程式 $z^4 = -1$ を解け．

(2) α を方程式 $z^4 = -1$ の解の一つとする．複素数平面に点 β があって $|z - \beta| = \sqrt{2}|z - \alpha|$ を満たす点 z 全体が原点を中心とする円 C を描くとき，複素数 β を α で表せ．

(3) 点 z が (2) の円 C 上を動くとき，点 i と z を結ぶ線分の中点 w はどのような図形を描くか．

8 0 でない実数 a，b，c，d が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ．

9 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく．ただし，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) S と T を m と n を用いて表せ．

(2) $S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるような m と n を求めよ．

10 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底であり，$x > 0$ とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，その概形を描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

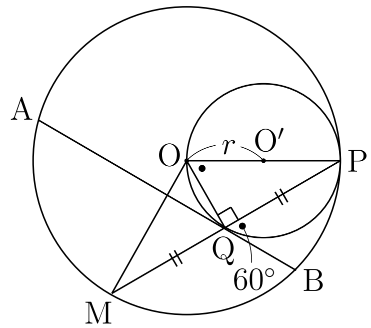
解答例

$\boxed{1}$ (1) 最初の文字が S または N のとき，ともに $\dfrac{5!}{2!}$ (通り)

最初の文字が T のとき　5! (通り)

よって，求める総数は　$\dfrac{5!}{2!}\times 2+5!=\mathbf{240}$ (通り)

(2) Q は弦 AB と円 O′ の接点であるから



$$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{PQB}=60^\circ$$

弦 OP は，円 O′ の直径であるから

$$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$$

$\triangle\mathrm{OMQ}\equiv\triangle\mathrm{OPQ}$ であるから

$$\mathrm{QM}=\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}\sin 60^\circ=2r\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{3}\,r}$$

(3) $37x+32y=1\cdots(*)$ より，$37\equiv 5,\ \ 32\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 32)$ であるから

$$5x\equiv 1\quad(\mathrm{mod}\ 32)\quad ゆえに\quad 13{\cdot}5x\equiv 13\quad(\mathrm{mod}\ 32)$$

すなわち　$x\equiv 13\ (\mathrm{mod}\ 32)$　これを満たす整数 x の 1 つは　13

$(*)$ より，$5x+32(x+y)=1$ であるから

$$5\times 13+32(13+y)=1\quad ゆえに\quad 64+32(13+y)=0$$

これを解いて　$y=-15$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(13,-15)}$

別解 (基本的な性質) 互いに素な整数 a，b に対して $ax+by=1$ を満たす整数 x，y は存在する．$37x+32y=1$ より

$$\begin{aligned}5x+32(x+y)&=1\quad(37=32+5)\\5\{x+6(x+y)\}+2(x+y)&=1\quad(32=5{\cdot}6+2)\\5(7x+6y)+2(x+y)&=1\\7x+6y+2\{2(7x+6y)+(x+y)\}&=1\quad(5=2{\cdot}2+1)\\7x+6y+2(15x+13y)&=1\end{aligned}$$

$15x+13y=n\cdots①$ とおくと (n は整数)，$7x+6y=1-2n\cdots②$

① − ② × 2 より　　$x+y=5n-2\cdots③$

②，③ を解いて　　$(x,\ y)=(13-32n,-15+37n)$　■

2 (1) $3^a = 5^b = 7^c = 105^d = M$ とおく．

a，b，c は 0 でない実数であるから，M は 1 でない正数．

したがって

$$a = \log_3 M = \frac{1}{\log_M 3} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 3 = \frac{1}{a}$$

$$b = \log_5 M = \frac{1}{\log_M 5} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 5 = \frac{1}{b}$$

$$c = \log_7 M = \frac{1}{\log_M 7} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 7 = \frac{1}{c}$$

$$d = \log_{105} M = \frac{1}{\log_M 105} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 105 = \frac{1}{d}$$

$\log_M 3 + \log_M 5 + \log_M 7 = \log_M 105$ であるから　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{d}$

(2) (a) $S = \displaystyle\int_0^2 (-3mx + 2n)\,dx = \left[-\frac{3}{2}mx^2 + 2nx\right]_0^2 = \boldsymbol{-6m + 4n}$

$T = \displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 2nx - m)\,dx = \left[2x^3 - nx^2 - mx\right]_0^2 = \boldsymbol{-2m - 4n + 16}$

(b) (a) の結果から

$$m = 2 - \frac{1}{8}S - \frac{1}{8}T, \quad n = 3 + \frac{1}{16}S - \frac{3}{16}T$$

したがって　$m + n = 5 - \dfrac{1}{16}S - \dfrac{5}{16}T$

$S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるのは，上の諸式より

$$S = T = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{m = 2,\ n = 3}$$

■

3　(1) $a_1=0$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n\{1+(-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$　$\cdots(*)$

$(*)$ に $n=1,2,3,4$ を代入すると

$$a_2-a_1=1,\quad a_3-a_2=0,\quad a_4-a_3=3,\quad a_5-a_4=0$$

$a_1=0$ であるから　$\boldsymbol{a_2=1，a_3=1，a_4=4，a_5=4}$

(2) $(*)$ の n をそれぞれ，$2n$，$2n+1$ に置き換えると

$$\begin{aligned}a_{2n+1}-a_{2n}&=\frac{2n\{1+(-1)^{2n+1}\}}{2}=0\\ a_{2n+2}-a_{2n+1}&=\frac{(2n+1)\{1+(-1)^{2n+2}\}}{2}=2n+1\end{aligned}$$

したがって　$\begin{cases} b_{n+1}-c_n=0 & \cdots① \\ c_{n+1}-b_{n+1}=2n+1 & \cdots② \end{cases}$

上の 2 式から b_{n+1} を消去すると　$c_{n+1}-c_n=2n+1$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

したがって　$c_n-c_1=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)+n-1=n^2-1$

$c_1=a_2=1$ であるから　$c_n=n^2$

上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

① から，$n \geqq 2$ のとき　$b_n=c_{n-1}=(n-1)^2$

$b_1=a_1=0$ であるから，上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

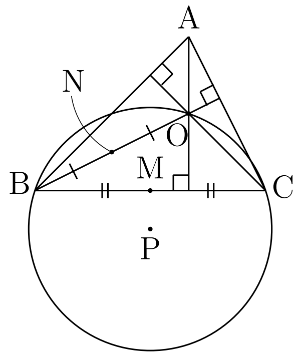
よって，求める一般項は　$\boldsymbol{b_n=(n-1)^2，c_n=n^2}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n&=\sum_{k=1}^{25}\{(-1)^{2k-1}a_{2k-1}+(-1)^{2k}a_{2k}\}\\ &=\sum_{k=1}^{25}(-b_k+c_k)=\sum_{k=1}^{25}\{-(k-1)^2+k^2\}\\ &=\sum_{k=1}^{25}(2k-1)=25^2=\mathbf{625}\end{aligned}$$

■

4 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より



$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

したがって，O は △ABC の垂心であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{O}\neq\mathrm{A}$$

以上のことから　　OA⊥BC　…①

また，P は △OBC の外心であるから，P は線分 BC の垂直二等分線上にある．したがって　MP⊥BC　…②

①，② から　　MP//OA

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+t\vec{a}=\boldsymbol{t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{2}\vec{b}=\boldsymbol{t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

(3) N は外接円の弦 OB の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NP}}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}}=0$ より

$$\vec{b}\cdot\left(t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=0 \quad \text{ゆえに} \quad t\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$ であるから　　$t=-\dfrac{1}{2}$

これを (2) の結果に代入すると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{NP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

■

5 (1) $k \leqq n-1$ のとき，

$P(X_n = k)$ は，k 回目で初めて 2 枚とも表が出る確率であるから

$$P(X_n = k) = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$$

また，$P(X_n > 3)$ は，上式により

$$\begin{aligned} P(X_n > 3) &= 1 - P(X_n \leqq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{3} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{27}{64}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= 1 - P(X_n \leqq n-1) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) + nP(X_n = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

上式の n を $n+1$ に置き換えると

$$E_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

上の 2 式から

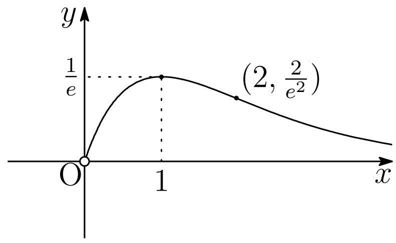
$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= \frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^n - n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left\{\frac{n}{4} + \frac{3}{4}(n+1) - n\right\} = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^n} \end{aligned}$$

■

6 (1) $f(x)=xe^{-x}$ より　$f'(x)=(1-x)e^{-x}$,　$f''(x)=(x-2)e^{-x}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘



また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ より，グラフの概形は右上の図のようになる．

よって，極大値は　$f(1)=\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) (1) のグラフから

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t xe^{-x}\,dx \\ &= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^t = \boldsymbol{1-(t+1)e^{-t}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$h(t)=g(t+1)-g(t)$

$g'(t)=f(t)$ に注意して，$h(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} h'(t) &= g'(t+1)-g'(t) = f(t+1)-f(t) \\ &= (t+1)e^{-t-1}-te^{-t} = e^{-t-1}\{(t+1)-et\} \\ &= e^{-t-1}\{1-(e-1)t\} \end{aligned}$$

$t>0$ における $h(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
$h'(t)$		$+$	0	$-$
$h(t)$		↗	極大	↘

よって，$h(t)$ が最大となる t の値は　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{e-1}}$ ■

7　(1) 方程式の解 z の極形式を　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$\cdots$①

とすると　$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

-1 を極形式で表すと　$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$

よって　$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 1,\quad 4\theta = \pi + 2k\pi\quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから　$r = 1$　$\cdots$②

また　$\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると，$k = 0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\quad \cdots③$$

②，③ を ① に代入すると，求める解は

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

(2) $|z-\beta| = \sqrt{2}|z-\alpha|$ の両辺を 2 乗することにより

$$|z-\beta|^2 = 2|z-\alpha|^2$$
$$(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta}) = 2(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$$

両辺を展開して整理すると

$$z\overline{z} - (2\overline{\alpha}-\overline{\beta})z - (2\alpha-\beta)\overline{z} = -2\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}$$
$$\{z-(2\alpha-\beta)\}\{\overline{z}-(2\overline{\alpha}-\overline{\beta})\} = 2(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$$
$$|z-(2\alpha-\beta)|^2 = 2|\alpha-\beta|^2$$

したがって　$|z-(2\alpha-\beta)| = \sqrt{2}|\alpha-\beta|$　$\cdots(*)$

このとき，点 z 全体が原点を中心とする円であるから

$$2\alpha - \beta = 0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\beta = 2\alpha}$$

(3) $\beta = 2\alpha$ を $(*)$ に代入すると　　$|z| = \sqrt{2}|\alpha|$　$\cdots$④

また，α は $z^4 = -1$ の解であるから

$$\alpha^4 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha^4| = |-1|$$

したがって　$|\alpha|^4 = 1$　すなわち　$|\alpha| = 1$

これを ④ に代入すると　　$|z| = \sqrt{2}$　$\cdots$⑤

w は i と z の中点であるから

$$w = \frac{i+z}{2} \quad \text{ゆえに} \quad z = 2w - i$$

これを ⑤ に代入すると

$$|2w - i| = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \left|w - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，点 w は，**点 $\boldsymbol{\frac{i}{2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ の円を描く．** ■

8　2 (1) と同じ ■

9　2 (2) と同じ ■

10　(1) 6 (1) と同じ

(2) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1 = \boldsymbol{1 - \frac{2}{e}}$$

■

9.2　2016 年

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) △ABC において ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする．AB = 6，BC = 5，BD = 3 のとき，辺 AC の長さを求めよ．

(2) 自然数 n が 6 と互いに素であるとき，n^2-1 が 6 で割り切れることを示せ．

(3) xy 平面で次の不等式で表される領域を図示せよ．

$$|x| \leqq y \leqq 1-|x|$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 整式 $P(x)$ を 0 でない整式 $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とおく．方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解であることを示せ．また逆に方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解であることを示せ．

(2) 整式 $P(x)$，$Q(x)$ を

$$P(x)=x^4+2x^3+x^2-1, \quad Q(x)=x^3+2x^2-1$$

とおく．方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解をすべて求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．また α を $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ を満たす正の実数とする．次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ で定める．b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $b_n \geqq 1$ となることを示せ．

(3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_{n+1} - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n - \alpha|$ となることを示せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_n - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

4 四面体 OABC を考える．辺 OA を 1 : 1 に内分する点を P とする．また辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q として，辺 OC を 3 : 1 に内分する点を R とする．さらに三角形 ABC の重心を G とする．3 点 P，Q，R を通る平面と線分 OG の交点を K とする．線分 OK と KG の長さの比を求めよ．

5 次の各問いに答えよ．

(1) 1 個のさいころを 10 回投げるとき，1 または 2 の目が出る回数 X の期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = \dfrac{2}{25}x$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ で与えられているとき，X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 2 つの事象 A，B について，A と B が独立なら $\overline{A}$ と B も独立であることを示せ．ただし $\overline{A}$ は A の余事象を表す．

6 関数 $f(x) = (\log x)^2 - \log x$ $(x > 0)$ を考える．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．また関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし関数 $y = f(x)$ の増減，凹凸，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を明示すること．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{7}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 複素数 z，w について，次の関係が成立することを示せ．ただし複素数 α に対し，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(2) 方程式 $z^2 - z + 1 = 0$ の 2 つの解を α，β とする．次の各問いに答えよ．

(a) α，β を求めよ．さらにそれらを極形式で表せ．

(b) $\alpha^{100} + \beta^{100}$ を求めよ．

$\boxed{8}$ 関数 $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ．

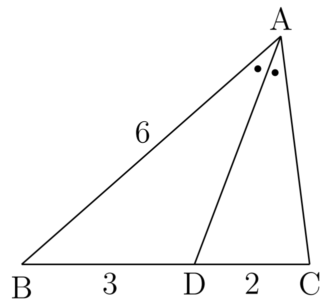
解答例

1 (1) $\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{BD}=3$ より

$$\mathrm{DC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BD}=5-3=2$$

AD は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線であるから，
$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{AD}:\mathrm{DC}$ より

$$6:\mathrm{AC}=3:2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{AC=4}$$

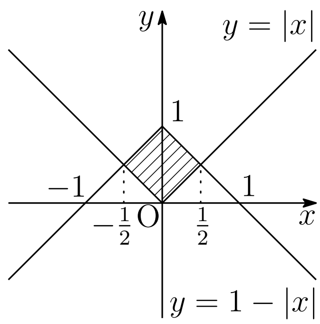


(2) 連続する3数 $n-1$，n，$n+1$ の中には，必ず偶数と3の倍数がある．
n が6と互いに素であるから，n は偶数でなく，3の倍数でもない．
したがって，$(n-1)(n+1)$ は偶数であり，かつ3の倍数である．
よって　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ は6で割り切れる．

補足　このとき，n は奇数であるから，$n-1$，$n+1$ はともに偶数である．
実際は，n^2-1 は12で割り切れる．

(3)
$$x \geqq 0 \text{ のとき} \quad x \leqq y \leqq 1-x$$
$$x < 0 \text{ のとき} \quad -x \leqq y \leqq 1+x$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で，
境界線を含む．



2 (1) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると

$$P(x)=Q(x)S(x)+R(x) \quad \cdots ①$$
$$R(x)=P(x)-Q(x)S(x) \quad \cdots ②$$

② より，$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は，$R(x)=0$ の解である．
① より，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は，$P(x)=0$ の解である．
よって，上の1番目の結論から
$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解である．
また，上の2番目の結論から
$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は，$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解である．

(2) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ることにより　$P(x) = xQ(x) + x^2 + x - 1$

$P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とすると　$R(x) = x^2 + x - 1$

$Q(x)$ を $R(x)$ で割ることにより　$Q(x) = R(x)(x + 1)$

(1) の結果から，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解であることと $Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解であることは同値である．したがって，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は，$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解であるから

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

■

3 (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ より

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = \boldsymbol{1 + \frac{1}{b_n}}$$

(2) $a_1 = a_2 = 1$，$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = 1$

(1) で求めた $\{b_n\}$ の漸化式を

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \qquad \cdots (*)$$

とすると，$b_1 = 1$ および $(*)$ から　$b_n > 0$

さらに，$(*)$ から，$n = 2, 3, 4 \cdots$ に対して　$b_n > 1$

よって，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して　$b_n \geqq 1$

(3) $(*)$ および $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha} \cdots$ ① に注意して

$$b_{n+1} - \alpha = 1 - \alpha + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\alpha}$$

したがって，(2) の結果により

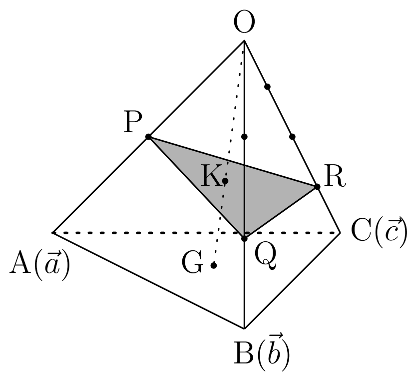
$$|b_{n+1} - \alpha| = \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha b_n}|b_n - \alpha| \leqq \frac{1}{\alpha}|b_n - \alpha|$$

(4) (3) の結果および ① に注意して $(\alpha > 0)$

$$|b_n - \alpha| \leqq \frac{1}{\alpha^{n-1}}|b_1 - \alpha| = \frac{1}{\alpha^{n-1}}|1 - \alpha| = \frac{1}{\alpha^{n-1}}\left|-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha^n}$$

■

4 K は OG 上の点であるから，実数 k を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{k}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) \\ &= \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{4k}{9}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}$$

また，K は平面 PQR 上の点であるから

$$\frac{2k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{4k}{9} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{18}{29}$$

よって　　**OK : KG = 18 : 11**

■

5 (1) 1 個のさいころをなげて 1 または 2 の目が出る確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

確率変数 X は，二項分布 $B\left(10,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従うから

$$E(X) = 10\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{10}{3}}, \quad \sigma(X) = \sqrt{10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$$

(2) $E(X) = \displaystyle\int_0^5 xf(x)\,dx = \int_0^5 \frac{2}{25}x^2\,dx = \left[\frac{2}{75}x^3\right]_0^5 = \mathbf{\frac{10}{3}}$

$$\begin{aligned}V(X) &= \int_0^5 x^2f(x)\,dx - \{E(X)\}^2 = \int_0^5 \frac{2}{25}x^3\,dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{50}x^4\right]_0^5 - \frac{100}{9} = \mathbf{\frac{25}{18}}\end{aligned}$$

(3) A と B が独立であるとき

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

が成立するから

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap B) &= P(B) - P(A\cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1-P(A)\}P(B) = P(\overline{A})P(B)\end{aligned}$$

よって，$\overline{A}$ と B は独立である．

補足 条件付き確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

について，A と B が独立であるとは

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{および} \quad P_B(A) = P(A)$$

が成り立つことである．また，A と B が独立であるとき

$$\begin{aligned} P_B(\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B) - P(A)P(B)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\overline{A}) \\ P_{\overline{A}}(B) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{P(B) - P(A)P(B)}{1 - P(A)} = P(B) \end{aligned}$$

したがって，A と B が独立のとき，$\overline{A}$ と B は独立である．
同様に，　A と B が独立のとき，A と $\overline{B}$ は独立である．
A と B が独立のとき，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は独立である．

最後の定理は，次のように示してもよい．

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} \\ &= P(\overline{A})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

■

6 (1) $f(x)=(\log x)^2-\log x$ より，$f(x)=0$ のとき

$$\log x(\log x-1)=0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{x=1,\ e}$$

(2)
$$f'(x)=2(\log x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2\log x-1}{x}$$
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\log x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{3-2\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{1}{2}}$，　$f''(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{3}{2}}$

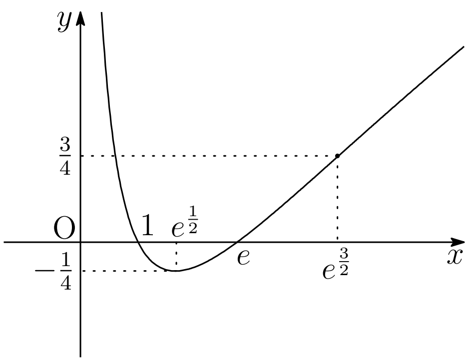
よって，$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小 $-\frac{1}{4}$	↗	変曲点 $\frac{3}{4}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\left\{\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\infty$$

以上から，この関数のグラフの概形は，下の図のようになる．



(3) 求める面積を S とすると，グラフの概形から

$$S=-\int_1^e\{(\log x)^2-\log x\}\,dx$$
$$=-\Big[x(\log x)^2-3x\log x+3x\Big]_1^e=\boldsymbol{3-e}$$

■

$\boxed{7}$ (1) $z = x_1 + y_1 i$，$w = x_2 + y_2 i$ とおくと

(a) $z + w = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) \\ &= \overline{z} + \overline{w}\end{aligned}$$

(b) $zw = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$ より

$$\overline{zw} = (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i \quad \cdots ①$$

$\overline{z} = x_1 - y_1 i$，$\overline{w} = x_2 - y_2 i$ より

$$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{w} &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より　$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(2) $z^2 - z + 1 = 0$ を解いて　$z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(a) よって，求める α，β は

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}},$$
$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}}$$

(b) $\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3}$　であるから

$$\begin{aligned}\alpha^{100} + \beta^{100} &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100} + \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100} \\ &= \left(\cos\frac{100}{3}\pi + i\sin\frac{100}{3}\pi\right) + \left(\cos\frac{100}{3}\pi - i\sin\frac{100}{3}\pi\right) \\ &= 2\cos\frac{100}{3}\pi = 2\cos\left(32\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-1}\end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ より

$$\boldsymbol{f'(x) = -\sin x + x,\quad f''(x) = -\cos x + 1}$$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$f''(x) \geqq 0$，$f'(0) = 0$ であるから

$$x \geqq 0 \text{ のとき}\quad f'(x) \geqq f'(0) \quad \text{すなわち}\quad f'(x) \geqq 0$$

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$，$f(0) = 0$ であるから

$$x \geqq 0 \text{ のとき}\quad f(x) \geqq f(0) \quad \text{すなわち}\quad f(x) \geqq 0$$

(3)
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{x}\right) dx$$
$$= \left[\ \sin x - x + \frac{x^3}{6}\ \right]_0^1 = \sin 1 - \frac{5}{6}$$

(2) の結果から，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq 0$$

したがって　$\sin 1 - \dfrac{5}{6} \geqq 0$　よって　$\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$　■

9.3 2017 年

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部 $\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

1 次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = |x-1| - 2$ について，次の各問いに答えよ．

(a) $y = f(x)$ のグラフを描け．

(b) $|f(x)| > 1$ となる x の範囲を求めよ．

(2) 実数 α は $\sqrt{2} < \alpha$ を満たすとする．$\sqrt{2} < \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{\alpha} < \alpha$ を示せ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = 2x^2 - 3\int_{-1}^{0} xf(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

2 関数 $y = \cos 2\theta - a\sin\theta + 2 \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $t = \sin\theta$ とするとき，y を t を用いて表せ．

(2) y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ．また，そのときの t の値も求めよ．

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

$$a_1 = 2,\quad b_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_{n+1} = a_n + 4b_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の各問いに答えよ．

(1) $c_n = a_n - b_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $d_n = a_n + 3b_n$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4 一辺の長さが1の立方体 OABC − DEFG において，線分 BF を 2 : 1 に内分する点を P，線分 EF の中点を Q とする．また，線分 OF と平面 PQG の交点を R とする．次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を満たす実数 s を求めよ．

(3) △PQG の重心を S とするとき，線分 RS の長さを求めよ．

5 1枚のコイン投げを $2n$ 回行う．この $2n$ 回のコイン投げで，表が出る合計回数を X とする．ただし，コインの表と裏の出る確率は等しいとする．次の各問いに答えよ．　※ n は自然数とする

(1) X の期待値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{P(X = k + 1)}{P(X = k)}$ を求めよ．ただし，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n - 1$ とする．

(3) $P(X = k)$ を最大にする k の値を求めよ．

(4) $n = 200$ とする，試行回数が大きいとき，X の確率分布は正規分布で近似できることが知られており，試行回数400はこのような近似が成り立つのに十分大きいとみなせる．このことを利用して，X の値が

$$190 \leqq X \leqq 210$$

となる確率の近似値を求めよ．ただし，標準正規分布に従う確率変数 Z に対する $P(Z > 1)$ の近似値としては0.159を用いよ．

6 O を原点とする座標平面において，C_1 を曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$，C_2 を直線 $y=2$ とする．点 P は第 1 象限にある C_1 上のある点とし，点 P における C_1 の接線を ℓ，この接線 ℓ と C_2 との交点を Q とおく．次の各問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表すとき，接線 ℓ の方程式，および点 Q の座標を θ を用いて求めよ．

(2) △POQ の面積を最小にする点 P の座標，および接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C_1 で囲まれた図形と △POQ との共通部分の面積を求めよ．

7 O を原点とする複素数平面において，4 点 O，A，B，C が，時計の針の回転と逆の向きに正方形をなすとする．複素数 z，w を表す点 $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ が，点 A，B，C のいずれかに一致しているとき，次の各問いに答えよ．

(1) z，w が条件 $0<\arg\left(\dfrac{w}{z}\right)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．このとき，点 P，Q は点 A，B，C のいずれに一致しうるか，条件を満たす P，Q の組をすべて求めよ．

(2) z，w が (1) の条件に加え，さらに $w=z^2$ を満たすとする．このとき，(1) で求めた P，Q のそれぞれの組に対して，複素数 z の値を求め，対応する正方形 OABC を複素数平面上に図示せよ．

8 曲線 $y=e^{-2x}$ を考える．この曲線上の点 $(t,\ e^{-2t})$ における接線 ℓ が点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るとき，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) t の値と接線 ℓ の方程式を求めよ．

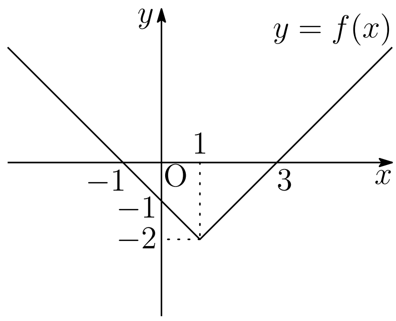
(2) 曲線 $y=e^{-2x}$ と接線，x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1　(1)　(a)　$f(x) = |x-1| - 2$ より

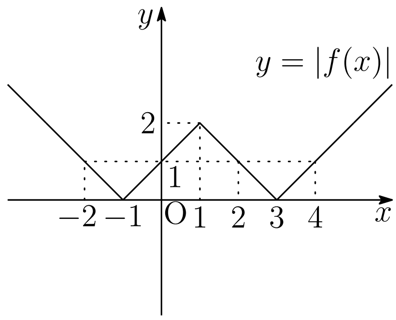
$$f(x) = \begin{cases} x-3 & (x \geqq 1) \\ -x-1 & (x < 1) \end{cases}$$

したがって，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．



(b)　(a) の結果から，$y = |f(x)|$ のグラフは，右の図のようになる．
よって，$|f(x)| > 1$ となる x の範囲は

$$\boldsymbol{x < -2,\ 0 < x < 2,\ 4 < x}$$



(2)　実数 α は $\sqrt{2} < \alpha$ を満たすから

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha} - \sqrt{2} = \frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2) = \frac{1}{2\alpha}(\alpha - \sqrt{2})^2 > 0,$$
$$\alpha - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 - 2) = \frac{1}{2\alpha}(\alpha + \sqrt{2})(\alpha - \sqrt{2}) > 0$$

よって　　$\sqrt{2} < \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{\alpha} < \alpha$

(3)　$A = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$，$B = \displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x) = 2x^2 - 3Ax - B$ より

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} (2t^2 - 3At - B)\,dt = \left[\,\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}At^2 - Bt\,\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{3}{2}A - B, \\ B &= \int_{0}^{1} (2t^2 - 3At - B)\,dt = \left[\,\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}At^2 - Bt\,\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{3}{2}A - B \end{aligned}$$

整理すると　　$-\dfrac{1}{2}A + B = \dfrac{2}{3}$，　$\dfrac{3}{2}A + 2B = \dfrac{2}{3}$

ゆえに　$A = -\dfrac{4}{15}$，$B = \dfrac{8}{15}$　　よって　$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{5}x - \dfrac{8}{15}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \cos 2\theta - a\sin\theta + 2 = (1 - 2\sin^2\theta) - a\sin\theta + 2$
$= -2\sin^2\theta - a\sin\theta + 3$

$t = \sin\theta$ より　　$\boldsymbol{y = -2t^2 - at + 3}$

(2) (1) の結果から　$y = -2\left(t + \dfrac{a}{4}\right)^2 + \dfrac{a^2}{8} + 3$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$ であるから

$$f(t) = -2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 3 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

とおく．$f(t)$ の最大値は軸の方程式 $x = -\dfrac{a}{4}$ および $a > 0$ に注意して

(i) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} < 0$，すなわち，$0 < a \leqq 4$ のとき

$$M = f\left(-\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{8} + 3$$

(ii) $-\dfrac{a}{4} < -1$，すなわち，$a > 4$ のとき

$$M = f(-1) = a + 1$$

$f(t)$ の最小値は，定義域の中央 $\dfrac{-1+1}{2} = 0$ に対して，$-\dfrac{a}{4} < 0$ より

$$m = f(1) = -a + 1$$

よって　　$\boldsymbol{0 < a \leqq 4}$ **のとき，**$\boldsymbol{t = -\dfrac{a}{4}}$ **で，**　$\boldsymbol{M = \dfrac{a^2}{8} + 3}$

$\boldsymbol{a > 4}$ **のとき，**$\boldsymbol{t = -1}$ **で，**　$\boldsymbol{M = a + 1}$

$\boldsymbol{t = 1}$ **で，**　$\boldsymbol{m = -a + 1}$

補足　上に凸の 2 次関数の最小値は，定義域の中央が放物線の軸より右側にあるときは，定義域の右端で最小値をとり，定義域の中央が放物線の軸より左側にあるときは，定義域の左端で最小値をとる．■

$\boxed{3}$ (1)

$$a_1 = 2,\quad b_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2 \quad \cdots ① \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_{n+1} = a_n + 4b_n + 2 \quad \cdots ② \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

①，② から
$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= (2a_n + 3b_n - 2) - (a_n + 4b_n + 2) \\ &= a_n - b_n - 4 \end{aligned}$$

すなわち　$c_{n+1} = c_n - 4$　また　$c_1 = a_1 - b_1 = 2 - 1 = 1$

したがって，数列 $\{c_n\}$ は，初項が 1，公差が -4 の等差数列である．

よって　$c_n = 1 + (n-1)\cdot(-4) = \boldsymbol{-4n+5}$

(2) ①，② から
$$\begin{aligned} a_{n+1} + 3b_{n+1} &= (2a_n + 3b_n - 2) + 3(a_n + 4b_n + 2) \\ &= 5(a_n + 3b_n) + 4 \end{aligned}$$

すなわち　$d_{n+1}+1 = 5(d_n+1)$　また　$d_1+1 = a_1+3b_1+1 = 2+3\cdot1+1 = 6$

したがって，数列 $\{d_n + 1\}$ は，初項が 6，公比が 5 の等比数列である．

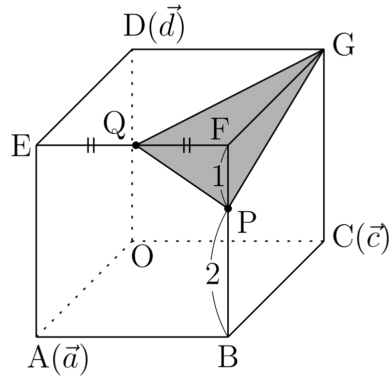
ゆえに　$d_n + 1 = 6\cdot5^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{d_n = 6\cdot5^{n-1} - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$a_n - b_n = -4n + 5,\quad a_n + 3b_n = 6\cdot5^{n-1} - 1$$

上の 2 式から，b_n を消去すると　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3}{2}\cdot5^{n-1} - 3n + \dfrac{7}{2}}$ ■

4　(1) 右の図から



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}} \quad \cdots①$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}} \quad \cdots②$$

(2) また　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \vec{c} + \vec{d}$　$\cdots③$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は，1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を実数 x，y，z を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= x\overrightarrow{\mathrm{OP}} + y\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + z\overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= x\left(\vec{a} + \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\right) + y\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) + z\left(\vec{c} + \vec{d}\right) \\ &= (x+y)\vec{a} + \left(x + \frac{1}{2}y + z\right)\vec{c} + \left(\frac{2}{3}x + y + z\right)\vec{d}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$ であるから

$$x + y = 1, \quad x + \frac{1}{2}y + z = 1, \quad \frac{2}{3}x + y + z = 1$$

これを解いて　$x = \dfrac{3}{5}$，$y = \dfrac{2}{5}$，$z = \dfrac{1}{5}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ により　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{3s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \dfrac{2s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \dfrac{s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

このとき，R は平面 PQG 上の点であるから

$$\frac{3s}{5} + \frac{2s}{5} + \frac{s}{5} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{s = \frac{5}{6}}$$

(3) (2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{5}{6}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d})$

①〜③ により，△PQG の重心 S は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OG}}) \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\vec{a} + \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\right) + \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) + \left(\vec{c} + \vec{d}\right)\right\} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{c} + \frac{8}{9}\vec{d}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{c} + \frac{8}{9}\vec{d}\right) - \frac{5}{6}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}) \\ &= -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{18}\vec{d} = \frac{1}{18}(-3\vec{a} + \vec{d})\end{aligned}$$

$|\vec{a}| = |\vec{d}| = 1$，$\vec{a} \perp \vec{d}$ より $\vec{a}\cdot\vec{d} = 0$ であるから

$$|-3\vec{a} + \vec{d}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{d} + |\vec{d}|^2 = 10$$

したがって $|-3\vec{a} + \vec{d}| = \sqrt{10}$

よって $\mathrm{RS} = |\overrightarrow{\mathrm{RS}}| = \dfrac{1}{18}|-3\vec{a} + \vec{d}| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{18}}$ ■

5 (1) コインの表と裏の出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$

確率変数 X は二項分布 $B\left(2n,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う．

よって，期待値 $E(X)$ と標準偏差 σ は

$$E(X) = 2n\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{n},\quad \sigma = \sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{n}{2}}}$$

(2) $P(X = k) = {}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$，$P(X = k+1) = {}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ より

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2n}\mathrm{C}_k} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}\cdot\frac{k!(2n-k)!}{(2n)!}\\ &= \boldsymbol{\frac{2n-k}{k+1}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} - 1 = \dfrac{2n-2k-1}{k+1}$

したがって　$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} > 1$

$n \leqq k \leqq 2n$ のとき $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} < 1$

よって，$P(X = k)$ を最大にする k の値は　$\boldsymbol{n}$

(4) $n = 200$ のとき，確率変数 X は二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う．

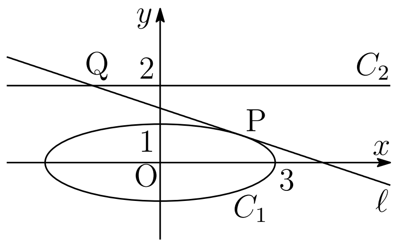
$B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ は，正規分布 $N(200,\ 100)$ で近似されるから

$$Z = \frac{X-200}{\sqrt{100}}$$

とおくと，確率変数 Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned}P(190 \leqq X \leqq 210) &= P\left(-1 \leqq \frac{X-200}{10} \leqq 1\right)\\ &= P(-1 \leqq Z \leqq 1)\\ &= 2P(0 \leqq Z \leqq 1)\\ &= 2\{0.5 - P(Z > 1)\}\\ &= 2(0.5 - 0.159) = \mathbf{0.682}\end{aligned}$$

■



$\boxed{6}$ (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$ 上の点 P$(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{(3\cos\theta)x}{3^2} + (\sin\theta)y = 1$$

すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{x\cos\theta}{3} + y\sin\theta = 1}$

上式に $y = 2$ を代入すると

$$\frac{x\cos\theta}{3} + 2\sin\theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}$$

よって，点 Q の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)}$

(2) 3 点 O，P$(3\cos\theta,\ \sin\theta)$，Q$\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)$ を頂点とする三角形の面積を $f(\theta)$ とすると $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2}\left|3\cos\theta\cdot 2 - \sin\theta\cdot\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}\right| \\ &= \frac{3}{2\cos\theta}(2-\sin\theta) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta\right) \end{aligned}$$

したがって　$f'(\theta) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right) = \dfrac{3(2\sin\theta - 1)}{2\cos^2\theta}$

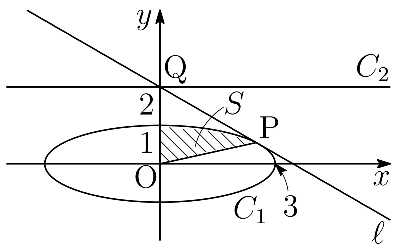
θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

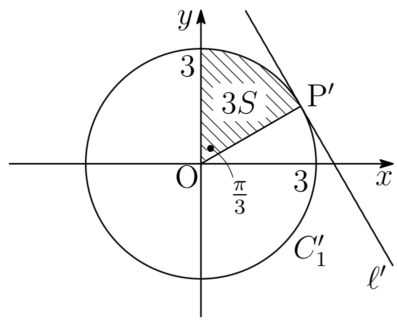
$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(\theta)$ は最小となるから，このとき　$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

また，ℓ は (1) の結果から　$\boldsymbol{\dfrac{x}{2\sqrt{3}} + \dfrac{y}{2} = 1}$

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$.

求める面積を S とし，C_1 および OP を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，OP$'$ とすると，$\mathrm{P}'\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ 3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.





OP$'$ と y 軸の正の向きのなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$3S = \frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{\pi}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{S = \frac{\pi}{2}}$$

■

$\boxed{7}$ (1) 複素数平面上の 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ α，β，γ とすると

$$|\alpha| = \frac{|\beta|}{\sqrt{2}} = |\gamma|, \quad \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \arg\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \cdots(*)$$

上の第 2 式および $\arg\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \arg\left(\dfrac{w}{z}\right) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす点 P(z)，Q(w) の組は，次の 3 組.

$$\textbf{(P, Q) = (A, B), (B, C), (A, C)}$$

(2) (i) $z = \alpha$，$w = \beta$ のとき，$\beta = \alpha^2$ より，$\alpha = \dfrac{\beta}{\alpha}$ であるから

$$|\alpha| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \sqrt{2}, \quad \arg\alpha = \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$(*)$ により　$|\beta| = 2$，$\arg\beta = \dfrac{\pi}{2}$，$|\gamma| = \sqrt{2}$，$\arg\gamma = \dfrac{3}{4}\pi$

(ii) $z = \beta$，$w = \gamma$ のとき，$\gamma = \beta^2$ より，$\beta = \dfrac{\gamma}{\beta}$ であるから

$$|\beta| = \frac{|\gamma|}{|\beta|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg\beta = \arg\left(\frac{\gamma}{\beta}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$(*)$ により　$|\alpha| = \dfrac{1}{2}$，$\arg\alpha = 0$，$|\gamma| = \dfrac{1}{2}$，$\arg\gamma = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $z=\alpha$，$w=\gamma$ のとき，$\gamma=\alpha^2$ より，$\alpha=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ であるから

$$|\alpha|=\frac{|\gamma|}{|\alpha|}=1,\quad \arg\alpha=\arg\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{2}$$

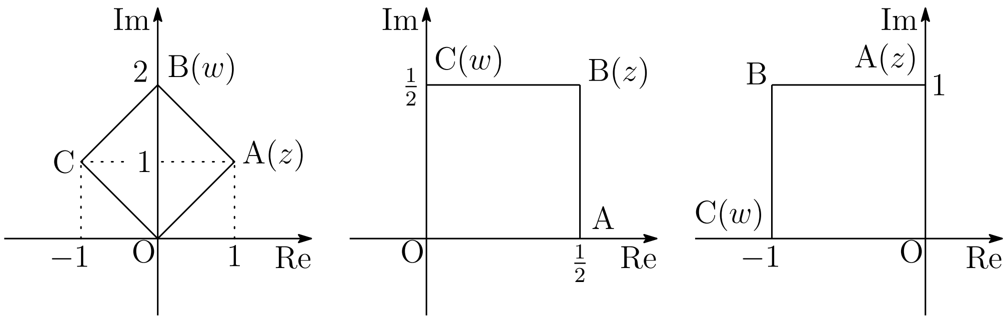
$(*)$ により　$|\beta|=\sqrt{2}$，$\arg\beta=\dfrac{3}{4}\pi$，$|\gamma|=1$，$\arg\gamma=\pi$

(i)〜(iii) の結果から

$\boldsymbol{z=1+i}$ のとき　A$(1+i)$，B$(2i)$，C$(-1+i)$

$\boldsymbol{z=\dfrac{1+i}{2}}$ のとき　A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，B$\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$，C$\left(\dfrac{i}{2}\right)$

$\boldsymbol{z=i}$ のとき　A(i)，B$(-1+i)$，C(-1)



■

8 (1) $y=e^{-2x}$ を微分すると　$y=-2e^{-2x}$

曲線 $y=e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-2t})$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=e^{-2t}(-2x+2t+1)\quad \cdots①$$

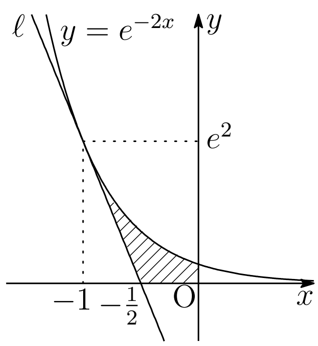
ℓ は，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

$$0=e^{-2t}(2t+2)\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{t=-1}$$

求める ℓ の方程式は，これを ① に代入して　$\boldsymbol{y=-e^2(2x+1)}$

(2) 求める面積を S とすると，右の図から

$$S=\int_{-1}^{0}e^{-2x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^2$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{4}e^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}}$$



■

9.4　2018 年

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

1 次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{CA}=\sqrt{3}$ のとき，三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ．

(2) $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\sin(x-y)$ を示せ．

(3) p を素数とするとき，$1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす自然数 k に対して，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ．

2 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=4$ の交点を A，B とする．点 P が曲線 $y=x^2$ 上を $-2<x<2$ の範囲で動くとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 三角形 ABP の重心 G の軌跡を求めよ．

(2) (1) で求めた軌跡と直線 $y=4$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ が自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して関係式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad \cdots (*)$$

を満たすとき,「数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $(*)$ を満たす」という．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 初項と公比がともに $r(\neq 0)$ である等比数列で漸化式 $(*)$ を満たす数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．ただし，$b_1 > c_1$ とする．

(2) 二つの数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$ がともに漸化式 $(*)$ を満たすとき，二つの実数 k，l に対して $f_n = kd_n + le_n$ で定められる数列 $\{f_n\}$ も漸化式 $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) (1) で得られた数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ と二つの実数 k，l に対して，$a_n = kb_n + lc_n$ とおくとき $a_1 = 21$，$a_2 = 57$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4 三角形 ABC とその内部に点 O があり，正の実数 k，l に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + l\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

を満たしていると仮定する．さらに直線 OA と辺 BC，直線 OB と辺 CA，直線 OC と辺 AB の交点をそれぞれ D，E，F とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくとき，x を k，l を用いて表せ．さらに $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}$ を k，l を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，y を k，l を用いて表せ．さらに $\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}$ を k，l を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}} + \dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}} + \dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}} = 1$ を示せ．

5 1 個のサイコロを投げ，1 の目が出るまでこれを繰り返し行う．ただし，このサイコロ投げを繰り返す最大の回数は N 回とし $(N \geqq 2)$，N 回まで繰り返して 1 の目が出なければ，終了する．このサイコロ投げにおける繰り返し回数を X とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 確率 $P(X = k)$ を，$k < N$ と $k = N$ の場合に分けて求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

6 関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$x \geqq 0$ とする．また，$\log(x+1)$ は $x+1$ の自然対数を表す．

(1) 自然対数の底 e に対して，$t \geqq 0$ のとき $e^t > \dfrac{t^2}{2}$ が成立することを用いて

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

を示せ．

(2) $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ．

(3) 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して正の数 a_n を，曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積が n^2 に等しくなるように定める．この a_n を求めよ．

(4) (3) で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

7 複素数平面上の点 z が $|4 - 3i - iz| = 2$ を満たすとする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 点 z の全体が表す図形を求めよ．

(2) $|z|$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $w = \dfrac{1}{z+1+4i}$ とする．点 w の全体が表す図形を求めよ．さらに，$|w|$ の最小値を与える w を求めよ．ただし，$z \neq -1-4i$ とする．

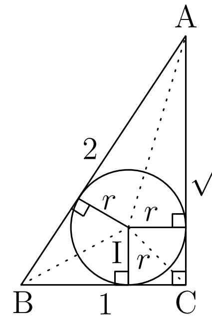
8 平面上で二つの曲線 $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ を考える．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ の共有点を求めよ．

(2) 二つの曲線 $y = \sin x$，$y = \cos 2x$ と二つの直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

1　(1)　△ABC の内心を I とすると



$$\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}=\triangle\mathrm{ABC}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1r+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r+\frac{1}{2}\cdot 2r=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$
$$(1+\sqrt{3}+2)r=\sqrt{3}$$

よって　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y)&=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)\\&=\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y\\&=\sin^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\sin^2 x)\sin^2 y\\&=\sin^2 x-\sin^2 y\end{aligned}$$

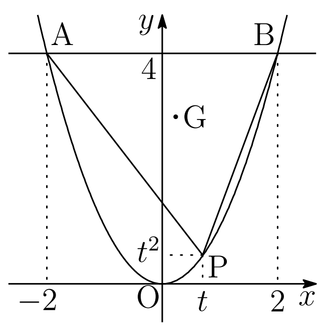
別解
$$\begin{aligned}\sin^2 x-\sin^2 y&=(\sin x+\sin y)(\sin x-\sin y)\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\cdot 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cdot 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\&=\sin(x+y)\sin(x-y)\end{aligned}$$

(3)
$$_{p}\mathrm{C}_k=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p}{k}\cdot\frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!}=\frac{p}{k}\times{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

素数 p は整数 k $(1\leqq k\leqq p-1)$ で割り切れない．

よって，$_{p}\mathrm{C}_k$ は p の倍数である．■

2　(1)　A$(-2,\ 4)$，B$(2,\ 4)$，P$(t,\ t^2)$，G$(x,\ y)$ とおく．
G は三角形 ABP の重心であるから



$$x=\frac{-2+2+t}{3},\quad y=\frac{4+4+t^2}{3}$$

ゆえに　$t=3x,\ \ t^2=3y-8,\ \ (-2<t<2)$

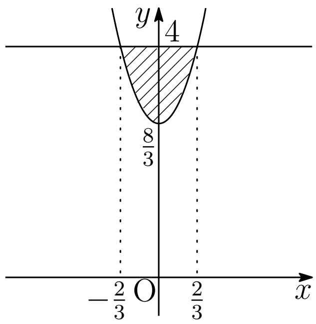
上の 2 式から t を消去すると

$$\boldsymbol{y=3x^2+\frac{8}{3}\quad\left(-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}\right)}$$

(2) (1) の軌跡と直線 $y=4$ の交点の x 座標は

$$3x^2+\frac{8}{3}=4 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\frac{2}{3}$$

右の図から求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{4-\left(3x^2+\frac{8}{3}\right)\right\} dx \\ &= -3\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{32}{27}} \end{aligned}$$

■

3 (1) 初項と公比がともに $r(\neq 0)$ である等比数列の一般項は　r^n

これを $(*)$ に代入すると

$$r^{n+2}-5r^{n+1}+6r^n=0 \quad \text{ゆえに} \quad r^2-5r+6=0$$

したがって　$r=2,\ 3$　よって　$\boldsymbol{b_n=3^n}$，$\boldsymbol{c_n=2^n}$

(2) 漸化式 $(*)$ を満たす数列 $\{d_n\}$，$\{e_n\}$ によって，数列 $\{f_n\}$ が関係式

$$f_n=kd_n+le_n$$

で定められるから $(k,\ l$ は定数$)$

$$\begin{aligned} f_{n+2}-5f_{n+1}+6f_n &= (kd_{n+2}+le_{n+2})-5(kd_{n+1}+le_{n+1})+6(kd_n+le_n) \\ &= k(d_{n+2}-5d_{n+1}+6d_n)+l(e_{n+2}-5e_{n+1}+6e_n) \\ &= k\cdot 0+l\cdot 0=0 \end{aligned}$$

よって，$\{f_n\}$ も漸化式 $(*)$ を満たす．

(3) (1) の結果から　$a_n=k\cdot 3^n+l\cdot 2^n$

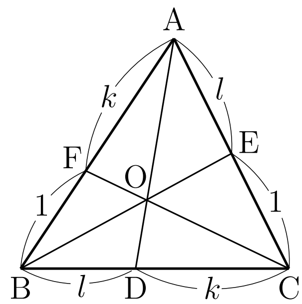
$a_1=21$，$a_2=57$ であるから

$$\begin{cases} 3k+2l=21 \\ 9k+4l=57 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad k=5,\ l=3$$

よって，求める一般項は　$\boldsymbol{a_n=5\cdot 3^n+3\cdot 2^n}$

■

$\boxed{4}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}\quad\cdots(*)$



$(*)$ より　$\dfrac{k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+l\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{l+k}=-\dfrac{1}{k+l}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\dfrac{1}{k+l}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad\cdots①$

よって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{k+l}}$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\dfrac{1}{k+l}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}})$　ゆえに　$(k+l+1)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{k+l+1}}$

(2) $(*)$ より　$\dfrac{l\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{1+l}=-\dfrac{k}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\dfrac{k}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots②$

よって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{k}{l+1}}$

② より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\dfrac{k}{l+1}(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}})$　ゆえに　$(k+l+1)\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{k}{k+l+1}}$

(3) $(*)$ より　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{k+1}=-\dfrac{l}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=-\dfrac{l}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots③$

③ より　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=-\dfrac{l}{k+1}(\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}})$　ゆえに　$(k+l+1)\overrightarrow{\mathrm{OF}}=l\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

よって　$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}}=\dfrac{l}{k+l+1}$

したがって，上式および (1)，(2) の結果から

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}+\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}}+\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}}=\frac{1}{k+l+1}+\frac{k}{k+l+1}+\frac{l}{k+l+1}=1$$

■

5 (1) (i) $1 < k < N$ のとき，$k-1$ 回まで 1 以外の目，k 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

1 回目に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから，$k=1$ のときも成立する．

よって，$k < N$ のとき　$\boldsymbol{P(X=k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}$

(ii) $k = N$ のとき，$N-1$ 回目まで 1 以外の目が出る確率であるから

$$\boldsymbol{P(X=N) = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}}$$

(2) $r = \frac{5}{6}$ とし，求める期待値を $E(X)$ とおくと

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{N-1} k\cdot P(X=k) + N\cdot P(X=N) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} k\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + N\left(\frac{5}{6}\right)^{N} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} kr^{k-1} + Nr^N
\end{aligned}$$

ここで，$S = \sum_{k=1}^{N} kr^{k-1}$ とおくと　$E(X) = \frac{1}{6}S + Nr^N \quad \cdots (*)$

$$\begin{aligned}
S - rS &= \sum_{k=1}^{N} kr^{k-1} - \sum_{k=1}^{N} kr^k = \sum_{k=1}^{N} kr^{k-1} - \sum_{k=2}^{N+1}(k-1)r^{k-1} \\
(1-r)S &= \sum_{k=1}^{N} r^{k-1} - Nr^N = \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N \\
\frac{1}{6}S &= 6(1-r^N) - Nr^N
\end{aligned}$$

これを $(*)$ に代入すると　$E(X) = 6(1-r^N) = \boldsymbol{6\left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right\}}$ ■

6 (1) $t>0$ のとき，$e^t>\dfrac{t^2}{2}$ であるから　$0<\dfrac{t}{e^t}<\dfrac{2}{t}$

$t=\log(x+1)$ とおくと $(x>0)$，$t>0$ であるから，上式により

$$0<\frac{\log(x+1)}{x+1}<\frac{2}{\log(x+1)}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\log(x+1)}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}=0$$

(2) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x+1}$ より

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x+1}\cdot(x+1)-\log(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\dfrac{1}{x+1}\cdot(x+1)^2-\{1-\log(x+1)\}\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{-1-2\{1-\log(x+1)\}}{(x+1)^3}=\frac{2\log(x+1)-3}{(x+1)^3}$$

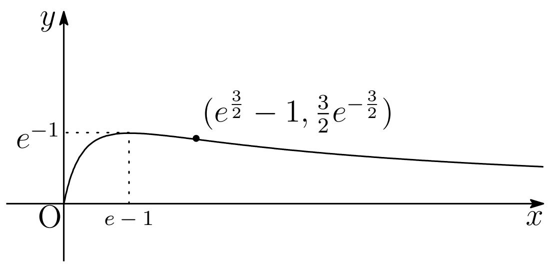
したがって，$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

また，(1) の結果から　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

よって　極大値 $f(e-1)=\boldsymbol{e^{-1}}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{e^{\frac{3}{2}}-1,\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}}\right)$

グラフの概形は，下の図のようになる．



(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{a_n}\frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\,\{\log(x+1)\}^2\,\Big]_0^{a_n}=\frac{1}{2}\{\log(a_n+1)\}^2$$

この面積が n^2 であるから $(a_n>0)$

$$\frac{1}{2}\{\log(a_n+1)\}^2=n^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_n=e^{\sqrt{2}n}-1}$$

(4) (3) の結果を利用して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{2}(n+1)}-1}{e^{\sqrt{2}n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}n}}{1-e^{-\sqrt{2}n}}=\boldsymbol{e^{\sqrt{2}}}$$

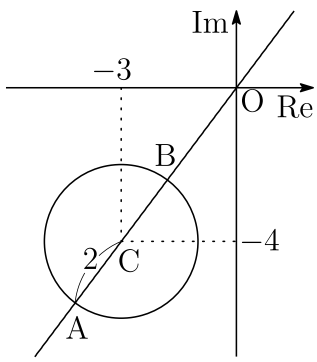
■

$\boxed{7}$ (1) $|4-3i-iz|=2$ より

$$|i||4-3i-iz|=2 \quad \text{ゆえに} \quad |z+3+4i|=2 \quad \cdots(*)$$

よって，点 z の表す図形は　**中心 $-3-4i$，半径 2 の円**

(2) (1) で求めた円の中心を C とし，右の図のように直線 OC と円の交点を A，B とすると



$$\mathrm{OC}=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$$

円の半径は 2 であるから

$|z|$ の最大値は　　$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}+2=\mathbf{7}$

$|z|$ の最大値は　　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}-2=\mathbf{3}$

(3) $z\neq-1-4i$ より，$w=\dfrac{1}{z+1+4i}$ $(\neq 0)$ であるから

$$z=\frac{1}{w}-1-4i$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\left|\frac{1}{w}+2\right|=2 \quad \text{ゆえに} \quad |2w+1|=2|w| \quad \text{すなわち} \quad |w|=\left|w+\frac{1}{2}\right|$$

よって，w は 2 点 $0,\ -\dfrac{1}{2}$ を結ぶ垂直二等分線，すなわち，$\boldsymbol{w=-\dfrac{1}{4}}$

また，$|w|$ は点 $-\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

解説　1 次分数変換 (メビウス変換)

$$w = \frac{1}{z+1+4i}$$

は，まず，点 z を $-1-4i$ だけ平行移動し，さらに反転 $\dfrac{1}{z}$ を行っている．このとき，平行移動後の円 $|z+2|=2$ は原点を通るため，反転を行うと直線に変換される．逆に，直線は反転により円に変換される．

本題の直線 $w = -\dfrac{1}{4}$ 上の点

$$w = -\frac{1}{4}(1+i\tan\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

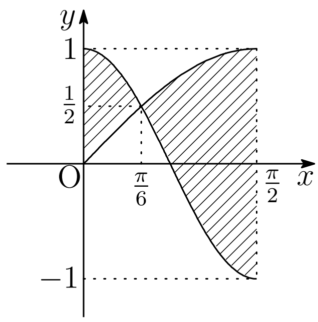
を反転させると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w} &= -\frac{4}{1+i\tan\theta} = -\frac{4\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = -4\cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta)\\
&= -2(2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta) = -2(\cos 2\theta + 1 - i\sin 2\theta)\\
&= -2-2(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\\
&= -2+2\{\cos(\pi-2\theta)+i\sin(\pi-2\theta)\} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

これは，点 -2 を中心とする半径 2 の円を表す．

なお，原点を通らない円 $|z-a|=r$ は，反転により円に変換される．■

$\boxed{8}$ (1) $y=\sin x$ と $y=\cos 2x$ から，y を消去すると



$$\sin x = \cos 2x \quad ゆえに \quad \sin x = 1-2\sin^2 x$$

したがって　　$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{\pi}{6}$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos 2x)\,dx\\
&= \left[\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\cos x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3}-1}
\end{aligned}$$

■

9.5　2019年

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$ 必答．数I・II・III・A・B(120分)
- 理[生命化]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から1問選択．数I・II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育]学部は，$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{2}$，$\boxed{8}$ の2題から1問選択．数I・II・A・Bまたは数I・III・A・B(90分)

1 次の各問いに答えよ．

(1) 平面上で2点A(3, 1)，B(1, 4)から等距離にある点全体のなす直線 l の方程式を求めよ．さらに，点P(2, 2)は，直線 l が分ける2つの領域のうち，点Aのある領域，点Bのある領域のどちらに属するかを調べよ．

(2) 有限集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにする．全体集合 U は有限集合で $n(U)=100$ とし，A，B は U の部分集合で $n(A)=30$，$n(B)=80$ とする．$n(A\cap B)$ のとり得る値の最大値および最小値を求めよ．

(3) 方程式 $5x+8y=139$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

2 実数 α，β に対して，整式

$$f(x)=x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2-\beta^2+2)x^2+2\alpha x+1$$

を考える．

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$ とおく．このとき $\dfrac{1}{x^2}f(x)$ を y の整式で表せ．

(2) $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=0$ がちょうど1つの解をもつような $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ．

3 実数 p に対して，数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + 3n^2 + 3n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots (*)$$

を満たす．

(1) $p = 1$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) p が 1 でないとき，漸化式 $(*)$ は実数 α，β，γ を用いて

$$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = p(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

とかき表せる．α，β，γ を p を用いて表せ．

(3) $p = 2$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4 xyz 空間上に，点 A$(1,\ 0,\ 0)$，点 B$(-1,\ b,\ b)$，球 $S : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ がある．ただし，b は実数とする．原点を O とする．

(1) 直線 AB 上の点 P を，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すとき，点 P の座標を b，t を用いて表せ．

(2) 直線 AB が球 S と共有点をもつような b の値の範囲を求めよ．

(3) 球 S の中心を C とする．b が (2) の値の範囲を動くとき，三角形 ABC の面積 T の最大値と最小値を求めよ．

5 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを無作為に取り出し，書かれた数を記録してもとに戻す．この試行を n 回行い，i 回目に取り出したカードに書かれた数を X_i とする．さらに，それらの n 個の数 X_1，$X_2, \cdots, X_n$ を小さい順に並べかえたものを $X_{(1)} \leqq X_{(2)} \leqq \cdots \leqq X_{(n)}$ とする．

(1) 確率 $P(X_{(n)} \leqq 8)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_{(n)} = 8)$ を求めよ．

(3) n を 2 以上とするとき，$X_{(2)}$ が 6 以上となる確率が $\dfrac{1}{2}$ 未満となる最小の試行回数 n を求めよ．

6 0 でない複素数 z に対して，$w=x+yi$ を $w=z^2+\dfrac{\overline{z}}{z}$ とする．ただし，x と y は実数，i は虚数単位とし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数とする．

(1) 0 でない複素数 z について，z の絶対値を r，偏角を θ とするとき，z，$\dfrac{1}{z}$，$\overline{z}$ を，それぞれ r，θ を用いて極形式で表せ．

(2) 複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くとき，点 w が描く図形を求めよ．

(3) $r>1$ とする．複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径 r の円の周上を動くとき，点 w が描く曲線 C の方程式を x，y を用いて表せ．

(4) $r>1$ とする．(3) の曲線 C で囲まれた部分の面積を r を用いて表せ．

7 関数 $f(x)=\log(1+x)\ (x \geqq 0)$ を考える．xy 平面上の $y=f(x)$ のグラフを y 軸のまわりで一回転させてできる形の容器がある．はじめ空である容器に，時刻 t における水の量が vt になるように，単位時間あたり v の一定の割合で水を静かに注ぐ．ただし，v は正の定数とし，容器は回転軸 (y 軸) が水平面に垂直で，y 軸の正の側を上向きにして固定されている．

(1) xy 平面で $y=f(x)$ の増減と凹凸を調べてグラフをかけ．

(2) 水面の高さが h になったときの，容器内の水の量 V を h を用いて表せ．

(3) 水面の高さが $h=\log 2$ になったときの，水面の高さの変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を求めよ．

8 曲線 $y=e^x$ の接線で，原点を通るものを l とする．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=e^x$，接線 l および直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 平面上の点を $\mathrm{X}(x,\ y)$ とする．$\mathrm{A}(3,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 4)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BX}^2-\mathrm{AX}^2&=\{(x-1)^2+(y-4)^2\}-\{(x-3)^2+(y-1)^2\}\\&=4x-6y+7\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

l は $\mathrm{AX}=\mathrm{BX}$ を満たす点 X の軌跡の方程式であるから

$$\boldsymbol{l:4x-6y+7=0}$$

$(*)$ により　$\mathrm{BP}^2-\mathrm{AP}^2=4{\cdot}2-6{\cdot}2+7=3>0$　ゆえに　$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$
よって，点 P は点 A のある領域に属する．

別解 $\mathrm{AP}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{5}$ より　$\mathrm{AP}<\mathrm{BP}$
よって，点 P は点 A のある領域に属する．

(2) $n(A\cap B)=x$ とおくと，右の表から

$$\begin{cases}x\geqq 0\\30-x\geqq 0\\80-x\geqq 0\\x-10\geqq 0\end{cases}$$

	B	$\overline{B}$	合計
A	x	$30-x$	30
$\overline{A}$	$80-x$	$x-10$	70
合計	80	20	100

これを解いて　$10\leqq x\leqq 30$　よって　$\boldsymbol{10\leqq n(A\cap B)\leqq 30}$

(3) $5x+8y=139\cdots(*)$ より，$5\equiv 0,\ 8\equiv 3,\ 139\equiv 4 \pmod 5$ であるから

$$3y\equiv 4\quad\text{ゆえに}\quad 2{\cdot}3y\equiv 2{\cdot}4\quad\text{すなわち}\quad y\equiv 3\pmod 5$$

$y=3+5k$ (k は整数)$\cdots$① を $(*)$ に代入すると

$$5x+8(3+5k)=139\quad\text{ゆえに}\quad x=23-8k\quad\cdots②$$

x，y は正の整数であるから，①，② より

$$\begin{cases}23-8k>0\\3+5k>0\end{cases}\quad\text{これを満たす整数}\ k\ \text{は}\quad k=0,\ 1,\ 2$$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(23,\ 3),\ (15,\ 8),\ (7,\ 13)}$ ■

2 (1) $f(x)=x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2-\beta^2+2)x^2+2\alpha x+1$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}f(x)&=x^2+2+\frac{1}{x^2}+2\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)+\alpha^2-\beta^2\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)+\alpha^2-\beta^2\\&=\boldsymbol{y^2+2\alpha y+\alpha^2-\beta^2}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$\dfrac{1}{x^2}f(x)=(y+\alpha+\beta)(y+\alpha-\beta)\quad\cdots(*)$

これに $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を代入すると

$$\frac{1}{x^2}f(x)=(y+2)(y-1)=\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$$

したがって
$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+2x+1)(x^2-x+1)\\&=(x+1)^2(x^2-x+1)\end{aligned}$$

よって，方程式 $f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-1}$ **(2 重解)，** $\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(3) $f(x)=0$ のとき，$(*)$ より

$$y=-\alpha\pm\beta\quad すなわち\quad x+\frac{1}{x}=-\alpha\pm\beta\quad\cdots(**)$$

ここで，$x+\dfrac{1}{x}=k$ とおくと (k は定数)　$x^2-kx+1=0\quad\cdots$①

① が重解をもつとき，係数について

$$(-k)^2-4\cdot1=0\quad これを解いて\quad k=\pm2,\quad 重解\ \frac{k}{2}$$

$k=2$ (重解 1) のとき，$(**)$ より

$$-\alpha+\beta=-\alpha-\beta=2\quad ゆえに\quad (\alpha,\ \beta)=(-2,\ 0)$$

$k=-2$ (重解 -1) のとき，$(**)$ より

$$-\alpha+\beta=-\alpha-\beta=-2\quad ゆえに\quad (\alpha,\ \beta)=(2,\ 0)$$

よって，$f(x)=0$ がちょうど 1 つの解をもつとき　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(\pm2,\ 0)}$ ■

3 (1) $p=1$ より，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=3n^2+3n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+3k) \\ &= 1+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \\ &= n^3-n+1 \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=n^3-n+1}$

別解 $a_{n+1}-a_n=3n(n+1)=\{(n+2)-(n-1)\}n(n+1)$ より

$$a_{n+1}-a_n=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$$
$$a_{n+1}-n(n+1)(n+2)=a_n-(n-1)n(n+1)$$

したがって　$a_n-(n-1)n(n+1)=a_1-(1-1)\cdot1\cdot(1+1)$

よって　$a_n=n^3-n+1$

(2) $(*)$ より　$a_{n+1}-pa_n=3n^2+3n$　$\cdots$①

与えられた漸化式

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma) \quad \cdots(**)$$

を変形すると

$$\begin{aligned} a_{n+1}-pa_n=(p-1)\alpha n^2&+\{(p-1)\beta-2\alpha\}n \\ &+\{(p-1)\gamma-\alpha-\beta\} \quad \cdots② \end{aligned}$$

①，② の右辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$(p-1)\alpha=3, \quad (p-1)\beta-2\alpha=3, \quad (p-1)\gamma-\alpha-\beta=0$$

$p \neq 1$ に注意して　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3}{p-1}}$，　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{3(p+1)}{(p-1)^2}}$，　$\boldsymbol{\gamma=\dfrac{6p}{(p-1)^3}}$

(3) (2) の結果に $p=2$ を代入すると　$\alpha=3$,　$\beta=9$,　$\gamma=12$

$b_n=a_n+3n^2+9n+12$ とおくと　$b_1=25$　$(**)$ より　$b_{n+1}=2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 25，公比 2 の等比数列であるから　$b_n=25\cdot2^{n-1}$

したがって　$a_n+3n^2+9n+12=25\cdot2^{n-1}$

よって　$\boldsymbol{a_n=25\cdot2^{n-1}-3n^2-9n-12}$ ■

4 (1) 原点 O，A(1, 0, 0)，B(−1, b, b) より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ b,\ b)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 0,\ 0) + t(-2,\ b,\ b) = (1-2t,\ bt,\ bt)$$

よって　　$\mathbf{P(1-2\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{bt},\ \boldsymbol{bt})}$

(2) (1) で求めた点 P の座標を球 $S : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ に代入すると

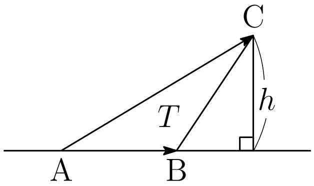
$$(1-2t)^2 + (bt-1)^2 + (bt)^2 = 1$$
$$2(b^2+2)t^2 - 2(b+2)t + 1 = 0$$

このとき，t に関する 2 次方程式が実数解をもつから，判別式 D について

$$D/4 = (b+2)^2 - 2(b^2+2)\cdot 1 = -b^2 + 4b \geqq 0$$

したがって　$b(b-4) \leqq 0$　　これを解いて　$\mathbf{0 \leqq \boldsymbol{b} \leqq 4}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ b,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 1,\ 0)$ より，
△ABC の面積 T は



$$T = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2b^2+4)\cdot 2 - (2+b)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3b^2-4b+4} \quad \cdots (*)$$

C から直線 AB に下ろした垂線の長さを h とすると

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|h = T \quad \text{ゆえに} \quad h = \frac{2T}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{\sqrt{3b^2-4b+4}}{\sqrt{2b^2+4}}$$

このとき，$h \leqq 1$ であるから　　$\sqrt{\dfrac{3b^2-4b+4}{2b^2+4}} \leqq 1$

したがって　$3b^2-4b+4 \leqq 2b^2+4$　これを解いて　$\mathbf{0 \leqq \boldsymbol{b} \leqq 4}$

(3) $3b^2-4b+4 = 3\left(b-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{3}$ であるから，(∗) および (2) の結果より，

T は，$\boldsymbol{b} = \mathbf{4}$ のとき最大値 $\mathbf{3}$，$\boldsymbol{b} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}$ をとる．■

$\boxed{5}$ (1) $P(X_{(n)} \leqq 8)$ は n 回とも 8 以下の数字のカードを取り出す確率であるから

$$P(X_{(n)} \leqq 8) = \left(\frac{8}{10}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

(2) n 回とも 7 以下の数字のカードを取り出す確率は

$$P(X_{(n)} \leqq 7) = \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

これと (1) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X_{(n)} = 8) &= P(X_{(n)} \leqq 8) - P(X_{(n)} \leqq 7) \\ &= \left(\frac{8}{10}\right)^n - \left(\frac{7}{10}\right)^n = \boldsymbol{\frac{8^n - 7^n}{10^n}} \end{aligned}$$

(3) $X_{(2)}$ が 6 以上となるのは，n 回の試行で，5 以下のカードを取り出す回数が 1 回以下の場合で，その確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$$

この確率が $\dfrac{1}{2}$ 未満となるとき

$$\frac{n+1}{2^n} < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-1} - n - 1 > 0$$

$f(n) = 2^{n-1} - n - 1$ とおくと，$f(n) > 0$ をみたす最小の整数 n $(n \geqq 2)$ を求めればよい．

$$f(2) = -1, \quad f(3) = 0, \quad f(4) = 3 > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n = 4}$$

■

6　(1)　$z = \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \boldsymbol{\frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}},$$

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = \boldsymbol{r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}}$$

(2)　(1) の結果により

$$\begin{aligned} w = z^2 + \frac{\overline{z}}{z} &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^2 \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta) \\ &= (r^2+1)\cos 2\theta + (r^2-1)i\sin 2\theta \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くから，$r = 1$ より

$$w = 2\cos 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leqq w \leqq 2$$

よって，点 w は **2 点 2, −2 を両端とする線分を描く.**

(3)　$(*)$ より　$x = (r^2+1)\cos 2\theta$，$y = (r^2-1)\sin 2\theta$

$r > 1$ に注意して　$\cos 2\theta = \dfrac{x}{r^2+1}$，　$\sin 2\theta = \dfrac{y}{r^2-1}$

したがって　　$\boldsymbol{C : \dfrac{x^2}{(r^2+1)^2} + \dfrac{y^2}{(r^2-1)^2} = 1}$

(4)　(3) の結果より，C は原点を中心とする長軸の長さ $2(r^2+1)$，短軸の長さ $2(r^2-1)$ の楕円であるから，その面積は

$$\pi(r^2+1)(r^2-1) = \boldsymbol{\pi(r^4-1)}$$

■

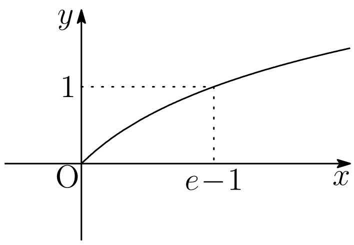
7　(1)　$f(x) = \log(1+x)$ $(x \geqq 0)$ より，

$x > 0$ において

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f''(x)$		$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$



(2)　$y = \log(1+x)$ より，$x = e^y - 1$ であるから

$$V = \pi\int_0^h x^2\,dy = \pi\int_0^h (e^y-1)^2\,dy \quad \cdots(*)$$

$$= \pi\int_0^h (e^{2y} - 2e^y + 1)\,dy$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2y}}{2} - 2e^y + y\right]_0^h = \boldsymbol{\pi\left(\frac{e^{2h}}{2} - 2e^h + h + \frac{3}{2}\right)}$$

(3)　$V = vt$ より　$\dfrac{dV}{dt} = v$,　　$(*)$ より　$\dfrac{dV}{dh} = \pi(e^h-1)^2$,

これらを $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ に代入すると　$v = \pi(e^h-1)^2\dfrac{dh}{dt}$　　$\cdots(**)$

$h = \log 2$ のとき，$e^h = 2$ を $(**)$ に代入すると

$$v = \pi(2-1)^2\frac{dh}{dt} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{dh}{dt} = \frac{v}{\pi}}$$

8 (1) $y = e^x$ より　$y' = e^x$

曲線 $y = e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

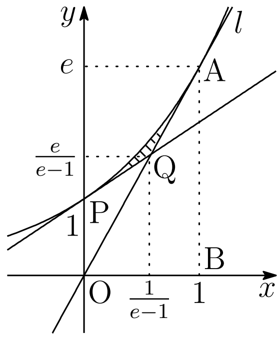
$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = e^t(x - t + 1) \quad \cdots (*)$$

これが原点を通るとき　$0 = e^t(-t + 1)$　ゆえに　$t = 1$

$t = 1$ を $(*)$ に代入することにより，l の方程式は　$\boldsymbol{y = ex}$

(2) (1) で求めた接点を $\mathrm{A}(1,\ e)$ とし，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とおく．
直線 $y = x + 1$ は，$(*)$ により，点 $(0,\ 1)$ における接線で，その接点を P とする．
$l : y = ex$ と直線 $y = x + 1$ の交点を Q とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{e-1},\ \frac{e}{e-1}\right)$$



求める面積は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 e^x\,dx - \triangle\mathrm{OAB} - \triangle\mathrm{OPQ} \\ &= \Big[\, e^x \,\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot e - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{e-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{e}{2} - \frac{1}{2(e-1)} - 1} \end{aligned}$$

■

9.6　2020 年

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) a，b は自然数で，$p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$ とする．p が素数となるような a，b をすべて求めよ．

(2) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1$ を解け．

(3) n を自然数とする．1 から $2n$ までの数字が 1 つずつ書かれた $2n$ 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを等確率で選ぶ試行において，選ばれたカードに書かれた数が偶数であることがわかっているとき，その数が n 以下である確率を求めよ．

2 t を正の実数とする．実数全体の集合の，2 つの部分集合 A，B を次のように定める．

$$A = \{a \mid \text{すべての実数 } x \text{ に対して } x^2 + (a+1)x + 2a > 0 \text{ が成り立つ}\}$$
$$B = \{b \mid bx^2 + tx + (b+t) < 0 \text{ を満たす実数 } x \text{ が存在する}\}$$

(1) 集合 A に属する実数 a の範囲を求めよ．

(2) 集合 B に属する実数 b の範囲を，t を用いて表せ．

(3) $A \cap B$ が空集合でないような t の範囲を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1 = 0$，$b_1 = 1$，および次の漸化式で定める．

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+3} = -8a_n$，$b_{n+3} = -8b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} a_n$ を求めよ．

(4) 次で定まる T の値を求めよ．

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020} + \sum_{n=1}^{2020} a_n$$

4 鋭角三角形 OAB の頂点 A から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB の交点を D，頂点 B から辺 OA に下ろした垂線と辺 OA の交点を E とする．また，AD と BE の交点を H とする．OA $= 1$，OB $= k$ とし，$\angle$OAD $= \theta$ とする．

(1) OD と OE を k，θ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を k，θ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) H が三角形 OAB の重心 G と一致するとき，k，θ を求めよ．

5 1 個のさいころを 3 回投げる．

(1) 3 回とも偶数の目が出る事象を A，出る目の数がすべて異なる事象を B とする．このとき，A と B は独立であるか，独立でないか，答えよ．

(2) 出る目の数の和を X とし，$Y = 2X$ とおく．確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ．

(3) 出る目の数の最大値を Z_1，最小値を Z_2 とする．このとき，$Z_1 = 5$ かつ $Z_2 = 2$ となる確率 $P(Z_1 = 5,\ Z_2 = 2)$ を求めよ．

6 xy 平面上で双曲線 H と放物線 C が，次の方程式で与えられている．

$$H : x^2 - y^2 = 1, \quad C : y = \frac{a}{2}x^2 + b \quad (\text{ただし}, a, b \text{ は実数}, a > 0)$$

H と C は，第 1 象限においてただ一つの共有点 P をもち，点 P で共通の接線 l_1 をもつとする．このとき，H と C が第 2 象限にただ一つもつ共有点を Q とし，H と C が点 Q でもつ共通の接線を l_2 とする．

(1) 点 P の座標 $(s,\ t)$ と b を，a を用いて表せ．

(2) 接線 l_1 の方程式を，a を用いて表せ．

(3) 放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S を，a を用いて表せ．

(4) a が正の実数を動くとき，面積 S の最小値を求めよ．

7 xy 平面上を運動する点 P の描く曲線 C が，時刻関数 t によって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

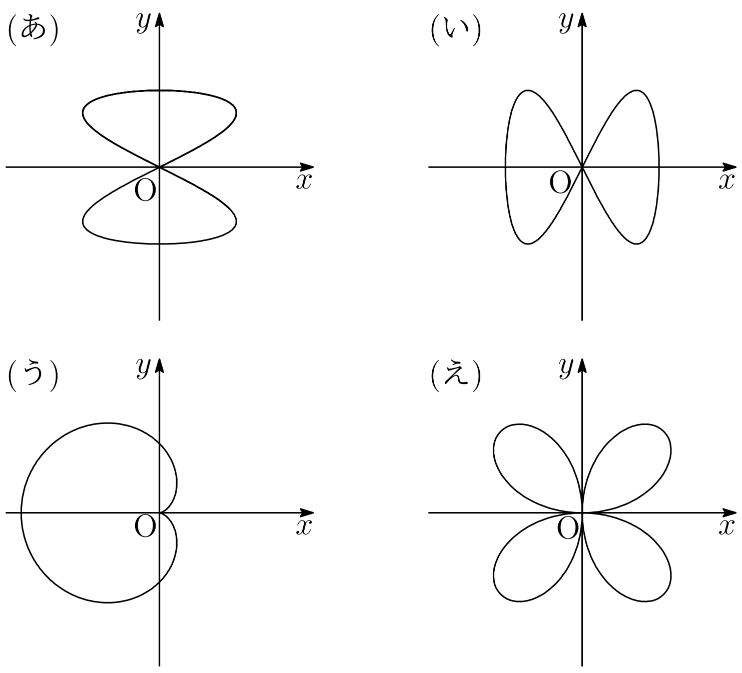
と媒介変数表示されているとする．

(1) 点 P の速度ベクトル $\vec{v}$ を，t を用いて表せ．

(2) t が動くとき，点 P の速さ $|\vec{v}|$ の最小値を求めよ．ただし，最小値をとるときの t の値は求めなくてよい．

(3) x，y で表した曲線 C の方程式を求め，そのグラフの概形を下の図 (あ)〜(え) の中からひとつ選べ．

(4) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．



8 $f(x) = \log x\ (x > 0)$ とする．xy 平面において，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものを $y = g(x)$ とする．

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ となることを，導関数の定義を用いて示せ．
ただし，$e = \lim_{k \to 0}(1 + k)^{\frac{1}{k}}$ とする．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) $y = f(x)$，$y = g(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(4) (3) の部分を y 軸のまわりで回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

1　(1) $p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$ より

$$p = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$$

a，b は自然数より，$a+b$，$a+b-1$ は整数である．これらの積が素数 p であるから，$1 \leqq a+b-1 < a+b$ より，次の $(*)$ を満たせばよい．

$$a+b-1 = 1 \quad \text{かつ} \quad a+b = p \quad \cdots(*)$$

$a+b = 2$ $(a \geqq 1,\ b \geqq 1)$，すなわち，$a = b = 1$ は $(*)$ を満たす．
よって　　$\boldsymbol{a = b = 1}$

(2) $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1$ より　$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x = 2$
$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$ より，上の第 2 式の両辺を $2\sqrt{2}$ で割ると

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\pi \leqq x < \pi$ より，$-\pi - \dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \pi - \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$x - \frac{\pi}{3} = -\pi - \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = -\frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{12}\pi}$$

(3) 選ばれたカードが，偶数である事象を A，n 以下である事象を B とする．

$$P(A) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n}$$

であるから（$[x]$ は，x を超えない最大の整数），求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n} \cdot 2 = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]$$

n が偶数のとき $\left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n}{2}$，$n$ が奇数のとき $\left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n-1}{2}$ であるから

$$P_A(B) = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数)} \\[2ex] \boldsymbol{\dfrac{n-1}{2n}} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数)} \end{cases}$$

■

2 (1) すべての実数 x に対して，$x^2+(a+1)x+2a>0$ を満たすから，係数について

$$(a+1)^2-4\cdot1\cdot2a<0 \quad ゆえに \quad a^2-6a+1<0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}}$

(2) $bx^2+tx+(b+t)<0\cdots(*)$ を満たす実数 x が存在するとき，b について次の場合分けを行う．

(i) $b<0$ のとき，$(*)$ の 2 次の係数が負であるから，条件を満たす．

(ii) $b=0$ のとき，$(*)$ より

$$tx+t<0\ (t>0) \quad ゆえに \quad x<-1$$

したがって，$(*)$ を満たす．

(iii) $b>0$ のとき，$(*)$ の係数について

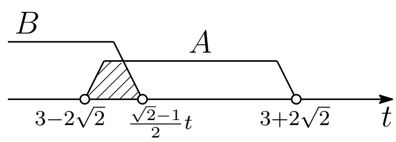
$$t^2-4b(b+t)>0 \quad 整理すると \quad 4b^2+4tb-t^2<0$$

$t>0$ に注意してこれを解くと　$\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}t<b<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}t$

$b>0$ であるから　　$0<b<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}t$

(i)〜(iii) より，b の値の範囲は　　$\boldsymbol{b<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t}$

(3) $A\cap B\neq\phi$ のとき，(1)，(2) の結果から



$$3-2\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}-1}{2}t$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t>2(\sqrt{2}-1)}$

■

3　(1) 与えられた漸化式

$$a_1 = 0,\quad b_1 = 1,\quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \sqrt{3}b_1 \\ &= 0 + \sqrt{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\sqrt{3}}, \\ a_3 &= a_2 + \sqrt{3}b_2 \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot 1 = \boldsymbol{2\sqrt{3}}, \\ a_4 &= a_3 + \sqrt{3}b_3 \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot(-2) = \boldsymbol{0}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_2 &= -\sqrt{3}a_1 + b_1 \\ &= -\sqrt{3}\cdot 0 + 1 = \boldsymbol{1}, \\ b_3 &= -\sqrt{3}a_2 + b_2 \\ &= -\sqrt{3}\sqrt{3} + 1 = \boldsymbol{-2}, \\ b_4 &= -\sqrt{3}a_3 + b_3 \\ &= -\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} + (-2) = \boldsymbol{-8} \end{aligned}$$

(2) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+2} + \sqrt{3}b_{n+2} \\ &= (a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= -2a_{n+1} + 2\sqrt{3}b_{n+1} \\ &= -2(a_n + \sqrt{3}b_n) + 2\sqrt{3}(-\sqrt{3}a_n + b_n) = -8a_n, \\ b_{n+3} &= -\sqrt{3}a_{n+2} + b_{n+2} \\ &= -\sqrt{3}(a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}) + (-\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= -2\sqrt{3}a_{n+1} - 2b_{n+1} \\ &= -2\sqrt{3}(a_n + \sqrt{3}b_n) - 2(-\sqrt{3}a_n + b_n) = -8b_n \end{aligned}$$

(3) (2) の結果により

$$\begin{aligned} &a_4 = -8a_1, &&a_5 = -8a_2, &&a_6 = -8a_3 \\ &a_7 = -8a_4 = 64a_1, &&a_8 = -8a_5 = 64a_2, &&a_9 = -8a_6 = 64a_3 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{9} a_n &= (a_1 + a_4 + a_7) + (a_2 + a_5 + a_8) + (a_3 + a_6 + a_9) \\ &= (a_1 - 8a_1 + 64a_1) + (a_2 - 8a_2 + 64a_2) + (a_3 - 8a_3 + 64a_3) \\ &= 57(a_1 + a_2 + a_3) = 57(0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \boldsymbol{171\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(4) (2) の結果から，$2020 = 673{\cdot}3 + 1$ に注意して

$$b_{2020} = b_1{\cdot}(-8)^{673} = (-8)^{673}$$

$S_k = a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}$ とおくと (k は自然数)

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a_{3k+1} + a_{3k+2} + a_{3k+3} \\ &= -8a_{3k-2} - 8a_{3k-1} - 8a_{3k} = -8S_k \end{aligned}$$

数列 $\{S_k\}$ は，初項 $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 3\sqrt{3}$，公比 -8 の等比数列である．

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2020} a_n &= \sum_{k=1}^{673} S_k + a_{2020} \\ &= \frac{3\sqrt{3}\{1-(-8)^{673}\}}{1-(-8)} + a_1{\cdot}(-8)^{673} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-(-8)^{673}\right\} + 0{\cdot}(-8)^{673} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-(-8)^{673}\right\} \end{aligned}$$

よって　$T = \dfrac{1}{\sqrt{3}}b_{2020} + \displaystyle\sum_{n=1}^{2020} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}{\cdot}(-8)^{673} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-(-8)^{673}\right\} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

解説 $z_n = a_n + b_n i$ とおくと (i は虚数単位)

$$\begin{aligned} z_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}i &= (a_n + \sqrt{3}b_n) + (-\sqrt{3}a_n + b_n)i \\ &= (1 - \sqrt{3}i)(a_n + b_n i) \\ &= (1 - \sqrt{3}i)z_n \end{aligned}$$

$w = 1 - \sqrt{3}i = 2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ とおく．数列 $\{z_n\}$ は初項 i，公比 w の等比数列であるから，$z_1 = i$ より

$$\begin{aligned} z_n &= iw^{n-1} \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2^{n-1}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1} \end{aligned}$$

$\theta_n = \dfrac{\pi}{2} + \left(-\dfrac{\pi}{3}\right)(n-1) = \dfrac{5-2n}{6}\pi$ とおくと

$$z_n = 2^{n-1}(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

したがって　$a_n = 2^{n-1}\cos\dfrac{5-2n}{6}\pi$,　$b_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{5-2n}{6}\pi$

また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} z_k &= \frac{i(1-w^n)}{1-w} = \frac{i(1-w^n)}{\sqrt{3}i} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-w^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - 2^n\cos\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{2^n i}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

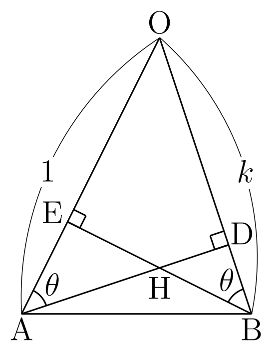
よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - 2^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)$,　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$　■

$\boxed{4}$ (1) $\triangle\mathrm{OAD} \backsim \triangle\mathrm{OBE}$ であるから

$$\angle\mathrm{OAD} = \angle\mathrm{OBE}$$

よって　$\mathrm{OD} = \mathrm{OA}\sin\theta = \boldsymbol{\sin\theta}$

$\mathrm{OE} = \mathrm{OB}\sin\theta = \boldsymbol{k\sin\theta}$



(2) (1) の結果から

$$\mathrm{OE} = k\sin\theta = (k\sin\theta)\cdot 1 = (k\sin\theta)\mathrm{OA},$$
$$\mathrm{OD} = \sin\theta = \frac{\sin\theta}{k}\cdot k = \frac{\sin\theta}{k}\mathrm{OB}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (k\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\sin\theta}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{k\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{k}{\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと (x, y は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ky}{\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{x}{k\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

H は直線 AD および直線 BE 上の点であるから

$$x + \frac{ky}{\sin\theta} = 1, \quad \frac{x}{k\sin\theta} + y = 1 \quad \cdots(*)$$

上の 2 式から　$x\sin\theta + ky = \sin\theta \qquad \cdots ① \quad (第 1 式 \times \sin\theta)$

$x\sin\theta + ky\sin^2\theta = k\sin^2\theta \quad \cdots ② \quad (第 2 式 \times k\sin^2\theta)$

① − ② より

$$ky(1-\sin^2\theta) = (1-k\sin\theta)\sin\theta \quad ゆえに \quad y = \frac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}$$

これを (∗) の第 1 式に代入すると　$x + \dfrac{1-k\sin\theta}{\cos^2\theta} = 1$

ゆえに　$x = \dfrac{\cos^2\theta - 1 + k\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

別解 △OAD と直線 BE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{k-\sin\theta}{k}\cdot\frac{k\sin\theta}{1-k\sin\theta}=1$$

したがって　$\mathrm{AH}:\mathrm{HD}:\mathrm{AD}=1-k\sin\theta:(k-\sin\theta)\sin\theta:\cos^2\theta$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-k\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\sin\theta}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) H が △OAB の重心であるから

$$\frac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}=\frac{1}{3} \quad \cdots(*)$$

したがって　$k-\sin\theta=\dfrac{1-k\sin\theta}{k}$　ゆえに　$k^2=1$　すなわち　$\boldsymbol{k=1}$

$$\frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1}{3}$$

これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　条件により θ は鋭角であるから　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $P(A)=\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(B)=\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{9}$，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

したがって　$P(A)P(B)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{72}$　ゆえに　$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

よって，事象 A，B は独立ではない．

補足 事象 A，B が独立であるとは，A が起きたときの B が起きる確率，すなわち，条件付き確率 $P_A(B)$ (大学等では $P(B|A)$ と表記することが多い) が，A に関係なく $P(B)$ に等しいことである．

$$B \text{ が } A \text{ と独立} \iff P_A(B)=P(B)$$

また，A が B と独立であるとは，$P_B(A)=P(A)$ が成立することであるが，これら 2 式の成立については，同値関係にある．実際，

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B) \iff \frac{P(B\cap A)}{P(B)}=P(A)$$

このとき，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成立する．したがって，A，B が独立であることを示すには，次のどれか 1 つを示せばよい．

$$P_A(B)=P(B) \iff P_B(A)=P(A) \iff P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

本題では，$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ により，事象 A，B は独立ではない．

(2) k 回目に出た目を X_k とすると $(k = 1, 2, 3)$

X_k	1	2	3	4	5	6	計
${X_k}^2$	1	4	9	16	25	36	
$P(X_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X_k) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$
$$E({X_k}^2) = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$
$$V(X_k) = E({X_k}^2) - E(X_k)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$X = X_1 + X_2 + X_3$ より

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{7}{2} \times 3 = \frac{21}{2} \\ V(X) &= V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{35}{12} \times 3 = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

$Y = 2X$ より

$$E(Y) = E(2X) = 2E(X) = 2 \times \frac{21}{2} = \mathbf{21}$$
$$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4 \times \frac{35}{4} = \mathbf{35}$$

(3) $Z_1 = 5$ かつ $Z_2 = 2$ となる目の組合せは

$$\{2, 2, 5\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 5,\ 5\}$$

である．

(i) $\{2, 2, 5\}$，$\{2,\ 5,\ 5\}$ である確率は，ともに

$$\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

(ii) $\{2, 3, 5\}$，$\{2,\ 4,\ 5\}$ である確率は，ともに

$$\frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

よって，求める確率は $\displaystyle \frac{1}{72} \times 2 + \frac{1}{36} \times 2 = \mathbf{\frac{1}{12}}$ ■

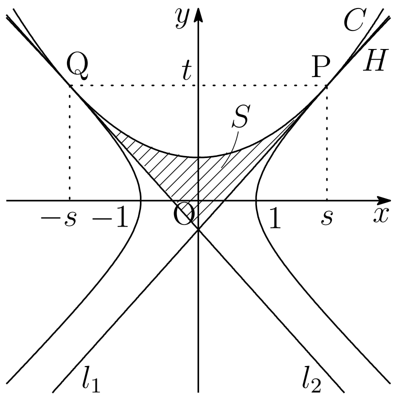
6　(1) $H: x^2-y^2=1$，$C: y=\dfrac{a}{2}x^2+b\ (a>0)$

点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H および C 上の点であるから

$$(*)\quad s^2-t^2=1,\quad t=\frac{a}{2}s^2+b$$

H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l_1 は

$$sx-ty=1\quad すなわち\quad y=\frac{s}{t}x-\frac{1}{t}$$



C を x で微分すると　$y'=ax$

l_1 は第 1 象限の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C および H の共通接線であるから

$$\frac{s}{t}=as\quad ゆえに\quad t=\frac{1}{a}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると，$a>0,\ s>0$ に注意して

$$s^2-\frac{1}{a^2}=1\quad ゆえに\quad s=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$

したがって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ \dfrac{1}{a}}\right)$　上の 2 式を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2+b\quad よって\quad \boldsymbol{b=\frac{1-a^2}{2a}}$$

(2) (1) で求めた s，t を l_1 の方程式に代入すると

$$\boldsymbol{y=\sqrt{a^2+1}x-a}$$

(3) (1) の結果から C の方程式は　$y=\dfrac{a}{2}x^2+\dfrac{1-a^2}{2a}$

H，C は，y 軸に関して対称であるから，第 2 象限の H と C の接点 Q および共通接線 l_2 は，それぞれ，y 軸に関して P および l_1 と対称であるから

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^s\left\{\frac{a}{2}x^2+\frac{1-a^2}{2a}-(\sqrt{a^2+1}x-a)\right\}dx\\
&=a\int_0^s\left(x^2-2\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}x+\frac{a^2+1}{a^2}\right)dx\\
&=a\int_0^s\left(x-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2dx=a\int_0^s(x-s)^2\,dx\\
&=a\left[\frac{1}{3}(x-s)^3\right]_0^s=\frac{as^3}{3}=\boldsymbol{\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}}
\end{aligned}$$

補足 一般に，放物線 C 上の 2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線 l_1，l_2 の交点の x 座標は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．また，C，l_1，l_2 で囲まれた部分の面積が S であるとき，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2S$ である [1]．

本題において，C の x^2 の係数および 2 点 P，Q の座標から，1/6 公式を用いて，次のように求めることもできる．

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{2}\left\{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}-\left(-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\right\}^3=\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$$

(4) (3) の結果から，$u=a^2$ とおくと　$S=\dfrac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$

$f(u)=\dfrac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$ $(u>0)$ とすると

$$f'(u)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}\sqrt{u+1}\cdot u-(u+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{u^2}=\frac{(u-2)\sqrt{u+1}}{6u^2}$$

u	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(u)$		$-$	0	$+$
$f(u)$		↘	極小	↗

よって，求める最小値は　$f(2)=\dfrac{(2+1)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

別解 $S=\dfrac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2+1}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\left(a^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}}=\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　$S\geqq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　よって　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

上式において，等号が成立するとき　$\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{2}=\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}$　すなわち　$a=\sqrt{2}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

$\boxed{7}$ (1) $x=\sin t,\quad y=\sin 2t\quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ より

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\boldsymbol{(\cos t,\ 2\cos 2t)}$$

(2) $\vec{v}=(\cos t,\ 2(2\cos^2 t-1))$ であるから，$u=\cos^2 t$ とおくと $(0 \leqq u \leqq 1)$

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2&=\cos^2 t+4(2\cos^2 t-1)^2=u+4(2u-1)^2\\&=16u^2-15u+4=16\left(u-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{31}{64}\end{aligned}$$

よって，$u=\dfrac{15}{32}$ のとき，$|v|$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{31}}{8}}$ をとる．

(3) $f(t)=\sin t$，$g(t)=\sin 2t$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$f(2\pi-t)=-f(t),\quad g(2\pi-t)=-g(t)$$

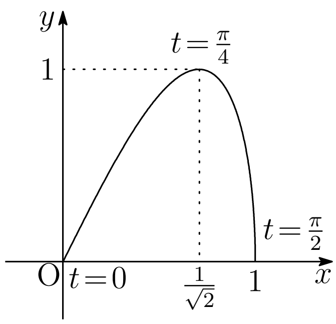
上式から，点 P が $0 \leqq t \leqq \pi$ で描く曲線と $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ で描く曲線は原点対称である．さらに

$$f(\pi-t)=f(t),\quad g(\pi-t)=-g(t)$$

であるから，点 P の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で描く曲線と $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ で描く曲線は y 軸対称である．これから，点 P の描く曲線 C は x 軸に関しても対称である．そこで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における C の概形を調べる．

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=g'(t)=2\cos 2t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\vec{v}$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	
(x,y)	$(0,0)$		$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$		$(1,0)$



したがって，C の描く図形は，(い) である．
C は，x 軸および y 軸に関して対称であるから，

$$y^2=(\sin 2t)^2=(2\sin t\cos t)^2=4\sin^2 t(1-\sin^2 t)=4x^2(1-x^2)$$

よって，C の方程式は　$\boldsymbol{y^2=4x^2(1-x^2)}$

補足 第 1 象限において $f'(t)>0$ より，x は単調増加であることや，点 $(1,\ 0)$ を通ることから，(い) であることは明らか．

解説 必要があれば，曲線 C の凹凸なども調べることもできる．

本問では，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} = f'(t) \neq 0$ であるから，$\dfrac{dy}{dx}$ や $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ も求めることができる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2\cos 2t}{\cos t}$$

これをさらに x について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right) = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\right\}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} \\ &= \frac{-4\sin 2t\cos t - 2\cos 2t(-\sin t)}{\cos^3 t} \\ &= -\frac{2\sin t(2\cos^2 t + 1)}{\cos^3 t}\end{aligned}$$

曲線 C は，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，第 1 象限において，上に凸である．

(4) (1) で求めた対称性により，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos^2 t\,dt \\ &= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

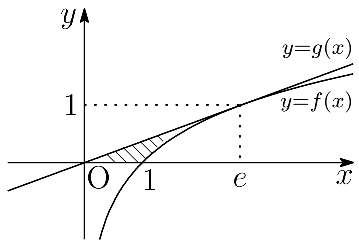
よって　　$S = \boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$ ■

$\boxed{8}$ (1) 関数 $f(x)=\log x$ について，導関数の定義を適用すると

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線は



$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad\cdots①$$

これが原点を通るから

$$-\log t=-1\quad ゆえに\quad t=e$$

これを ① に代入して整理すると　$y=\dfrac{x}{e}$　よって　$\boldsymbol{g(x)=\dfrac{x}{e}}$

(3) 求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_1^e\log x\,dx$$

$$=\frac{e}{2}-\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^e=\boldsymbol{\frac{e}{2}-1}$$

(4) $f^{-1}(y)=e^y$ であるから，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1(e^y)^2\,dy-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot 1=\pi\Big[\,\frac{e^{2y}}{2}\,\Big]_0^1-\frac{\pi e^2}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi(e^2-3)}{6}}$$

別解　
$$\frac{V}{2\pi}=\int_0^e xg(x)\,dx-\int_1^e xf(x)\,dx=\int_0^e\frac{x^2}{e}\,dx-\int_1^e x\log x\,dx$$

$$=\Big[\,\frac{x^3}{3e}\,\Big]_0^e-\Big[\,\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\,\Big]_1^e=\frac{e^2-3}{12}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\dfrac{\pi(e^2-3)}{6}}$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

第 10 章　琉球大学

出題分野

(理・工・医・教 [数]　　農・教 [学生])

理・工・医・教 [数] 出題分野 (2011-2020) 120 分

◀	琉大 理・工・医・教 [数]	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式										
	三角関数										
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法								1		1
III	式と曲線			2		4					
	複素数平面						1	3			
	関数										
	極限		3				3				
	微分法とその応用		1		1	3		1	3		2
	積分法	4	4		1·3	1·2	2·3	1·2			
	積分法の応用			1		2				1·2	
A	場合の数と確率	3*	2*	3*	4	3	4	4	4	4	4
	整数の性質										
	図形の性質										
B	平面上のベクトル										
	空間のベクトル	2									
	数列				4				2	3	3·4
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)	1		4	2						

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

農・教 [学生] 出題分野 (2011-2020) 60 分

◀	琉大 農・教 [学生]	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	数と式	5									
I	2 次関数										
	図形と計量			6							
	データの分析						5				
	式と証明										
	複素数と方程式	5				5	5				
II	図形と方程式										
	三角関数		6							5	5
	指数関数と対数関数	5	5			5			5		5
	微分法と積分法	6	5·6	5	6	6	6	5	6	6	6
	場合の数と確率										
A	整数の性質								5	5	
	図形の性質										
	平面上のベクトル		5		5	5			5		5
B	空間のベクトル						5	6			
	数列		5								
	確率分布と統計										

数字は問題番号

10.1 2015 年

- 理・工・医・教育 [数学] 学部 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部 $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^t\,dt$ とするとき，$F(1)$ および $F'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が，

$$\begin{cases} f(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = 2\sin x - 3 \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x \end{cases}$$

を満たすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ．

2 関数 $f(x) = |\,x\,|\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，最大値，最小値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ．

3 確率 p $(0 < p < 1)$ で「当たり」が出るくじを繰り返して引く．2 回目の「当たり」が出たときにこの試行を終える．$n \geqq 2$ として，n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) $N \geqq 2$ として，$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ を求めよ．

4 t を媒介変数として，$x = t + \dfrac{1}{t} + \dfrac{5}{2}$，$y = 2t - \dfrac{2}{t}$ で表される曲線を考える．次の問いに答えよ．

(1) t を消去して，x と y の関係式を求めよ．

(2) a を定数とするとき，直線 $y = ax + 5$ とこの曲線との共有点の個数を調べよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 3 次方程式 $x^3 - ax - 6 = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．

(2) $\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4}$ の値を求めよ．

(3) 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ \sqrt{3})$，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

6 頂点が点 A$(0,\ 4)$ で，点 B$(2,\ 0)$ を通る放物線を考える．次の問いに答えよ．

(1) この放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

(2) この放物線上にあり，x 座標が $2a$ $(a > 0)$ である点を C とする．この放物線と x 軸との交点で，点 B と異なる点を D とする．点 C における放物線の接線 l_1 と点 D における放物線の接線 l_2 との交点 E の座標を，a を使って表せ．

(3) この放物線と直線 l_2，および点 E を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $F(x)=\int_x^{2x} e^t\,dt=\Big[\ e^t\ \Big]_x^{2x}=e^{2x}-e^x$

ゆえに　$\boldsymbol{F(1)=e^2-e}$　また　$\boldsymbol{F'(x)=2e^{2x}-e^x}$

(2)
$$\begin{cases} f(x)+\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt=2\sin x-3 & \cdots ① \\ f'(x)g(x)=\cos^2 x & \cdots ② \end{cases}$$

① の両辺を微分すると

$$f'(x)+g(x)=2\cos x \quad \text{ゆえに} \quad f'(x)=2\cos x-g(x)$$

上の第 2 式を ② に代入すると

$$\{2\cos x-g(x)\}g(x)=\cos^2 x \quad \text{整理すると} \quad \{g(x)-\cos x\}^2=0$$

よって　$\boldsymbol{g(x)=\cos x}$　これを ① に代入すると

$$f(x)+\int_0^x \cos t\,dt=2\sin x-3$$
$$f(x)+\Big[\ \sin t\ \Big]_0^x=2\sin x-3$$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=\sin x-3}$ ■

2 (1) $f(x) = |\,x\,|\sqrt{1-x^2}$ について

$$f(-x) = |-x|\sqrt{1-(-x)^2} = |\,x\,|\sqrt{1-x^2} = f(x)$$

したがって，$f(x)$ は偶関数である．

$x \geqq 0$ において，$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ であるから

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

よって　$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$x = 0,\ \pm 1$ のとき　**最小値 0**

(2) $f(x)$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= 2\int_0^1 f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

■

3 (1) $q = 1 - p$ とおくと

$$\begin{aligned} p_2 &= pp = \boldsymbol{p^2} \\ p_3 &= (pq + qp)p = 2p^2q = \boldsymbol{2p^2(1-p)} \\ p_4 &= (pqq + qpq + qqp)p = 3p^2q^2 = \boldsymbol{3p^2(1-p)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様にして

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 pq^{n-2} \times p = (n-1)p^2q^{n-2} = \boldsymbol{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

(3) $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{N} x^{k-1} = \frac{1-x^N}{1-x}$ の両辺を x で微分すると

$$\sum_{k=2}^{N}(k-1)x^{k-2} = \frac{-Nx^{N-1}(1-x) - (1-x^N)(-1)}{(1-x)^2}$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=2}^{N}(k-1)(1-x)^2x^{k-2} = 1 - x^{N-1}\{N(1-x) + x\}$

上式に $x = 1 - p$ を代入すると

$$\sum_{k=2}^{N}(k-1)p^2(1-p)^{k-2} = 1 - (1-p)^{N-1}(Np + 1 - p)$$

(2) の結果から

$$\sum_{k=2}^{N} p_k = \boldsymbol{1 - (1-p)^{N-1}(Np + 1 - p)}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $x = t + \dfrac{1}{t} + \dfrac{5}{2}$，$y = 2t - \dfrac{2}{t}$ から

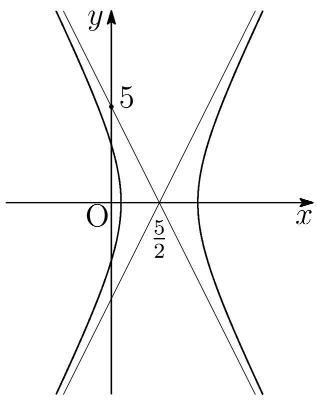
$$2x + y = 4t + 5, \quad 2x - y = \frac{4}{t} + 5$$

上の2式から，t を消去すると

$$(2x + y - 5)(2x - y - 5) = 16 \quad \text{ゆえに} \quad (2x - 5)^2 - y^2 = 16 \quad \cdots (*)$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

(2) (1) で求めた曲線は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ を x 軸方向に $\dfrac{5}{2}$ だけ平行移動したもの．$(*)$ から，この曲線の漸近線は　$y = 2x - 5$，$y = -2x + 5$



$(*)$ に $y = ax + 5$ を代入すると

$$(2x - 5)^2 - (ax + 5)^2 = 16$$

これを x について整理すると

$$(a^2 - 4)x^2 + 2(5a + 10)x + 16 = 0 \quad \cdots (**)$$

(i) $a = 2$ のとき，$y = 2x + 5$ は，$(*)$ の漸近線に平行となるので，求める共有点の個数は1個．

(ii) $a = -2$ のとき，$y = -2x + 5$ は，$(*)$ の漸近線と一致するので，求める共有点の個数は0個．

(iii) $a \neq \pm 2$ のとき，$(**)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (5a + 10)^2 - (a^2 - 4)\cdot 16 \\ &= 9a^2 + 100a + 164 = (a + 2)(9a + 82) \end{aligned}$$

ゆえに　$a < -\dfrac{82}{9}$，$-2 < a$ のとき　共有点の個数は2個

$a = -\dfrac{82}{9}$ のとき　共有点の個数は1個

$-\dfrac{82}{9} < a < -2$ のとき　共有点の個数は0個

(i)～(iii) から，共有点の個数は

$$\boldsymbol{\begin{cases} a < -\dfrac{82}{9},\ -2 < a < 2,\ 2 < a \text{ のとき} & 2\text{個} \\ a = -\dfrac{82}{9},\ 2 \text{ のとき} & 1\text{個} \\ -\dfrac{82}{9} < a \leqq -2 \text{ のとき} & 0\text{個} \end{cases}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $x^3 - ax - 6 = 0 \cdots (*)$ が $x = -1$ を解にもつから

$$(-1)^3 - a(-1) - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = 7}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x+2)(x-3) = 0$$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{x = -2,\ 3}$

(2) $\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = \mathbf{-3}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}} \text{ のとき} \quad \text{最大値 } \mathbf{2}$$

■

6 (1) 点 A(0, 4) を頂点とする放物線を $y = kx^2 + 4$ とおく (k は定数).
これが点 B(2, 0) を通るから

$$k \cdot 2^2 + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -1$$

よって，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{y = -x^2 + 4}$

(2) (1) の結果から　$y = -(x+2)(x-2)$
放物線と x 軸との交点で点 B(2, 0) と異なる点 D の座標は　$(-2,\ 0)$
$y = -x^2 + 4$ を微分すると　$y' = -2x$
放物線上の点 C$(2a, -4a^2 + 4)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y - (-4a^2 + 4) = -4a(x - 2a)$$

すなわち　　$y = -4ax + 4a^2 + 4 \quad \cdots ①$

また，放物線上の点 D$(-2,\ 0)$ における接線 l_2 の方程式は，① に $a = -1$ に代入して　　$y = 4x + 8 \quad \cdots ②$

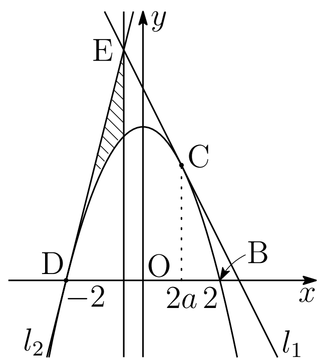
①，② から y を消去すると

$$-4ax + 4a^2 + 4 = 4x + 8 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)x = a^2 - 1$$

$a > 0$ より，$a + 1 \neq 0$ であるから　$x = a - 1$
これを ② に代入して　$y = 4a + 4$　よって，E の座標は　$\boldsymbol{(a-1,\ 4a+4)}$

(3) 求める面積を S とすると，(2) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{a-1} \{(4x+8) - (-x^2+4)\}\,dx \\ &= \int_{-2}^{a-1} (x+2)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{a-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a+1)^3} \end{aligned}$$



10.2　2016 年

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

1 i を虚数単位とし，$z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) z^5 および $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ．

(2) $t = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．$t^2 + t$ の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さの 2 乗を求めよ．

2 定積分 $\displaystyle\int_a^{a+1} |e^x - 1|\,dx$ の値を $I(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$I(a)$ を a で表せ．

(2) a が実数全体を動くとき，$I(a)$ を最小にするような a の値を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \log(1+x)}\,dx$ を求めよ．

4 N を 3 以上の自然数とする．

1 から N までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードを袋に入れ，「無作為に 1 枚カードを取り出し，そのカードを袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作業を 3 枚のカードを取り出すまで繰り返す．取り出された 3 枚のカードに書かれた数の最大値を X とする．

また，1 から N までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードを袋に入れ，「無作為に 1 枚カードを取り出してはそれに書かれた数を記録し，袋に戻す」という作業を 3 回行い，記録された数の最大値を Y とする．

n を N 以下の自然数とする．$X = n$ となる確率を p_n とし，$Y = n$ となる確率を q_n とする．

次の問いに答えよ．

(1) p_3，q_1，q_2，q_3 を求めよ．

(2) p_n と q_n を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 整式 $P(x)$ は，$P\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$ と $P\left(-\dfrac{7}{2}\right) = -\dfrac{5}{2}$ を満たす．
$P(x)$ を $6x^2 + 11x - 35$ で割った余りを求めよ．

(2) 座標空間内の 3 点 A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(1, s, t) を頂点とする三角形 ABC の重心を G，原点を O とする．OG⊥AG，OG⊥AB となるときの s と t の値を求めよ．

(3) 変量 x の値が x_1，x_2，x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ とする．分散 s^2 を

$$\frac{1}{3}\{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2\}$$

で定義するとき，$s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ となることを示せ．ただし $\overline{x^2}$ は $x_1{}^2$，$x_2{}^2$，$x_3{}^2$ の平均値を表す．

6 座標平面上の原点 O，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ の 3 点を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C_1 とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．

次の問いに答えよ．

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) 放物線 C_1 と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_1 の上側の部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より

$$z^5 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \mathbf{1}$$

$z^5 - 1 = 0$ より　　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$

$z \neq 1$ であるから　　$z^4+z^3+z^2+z+1 = \mathbf{0}$

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を $z^2 \neq 0$ で割ると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)=1$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ より　　$t^2 + t = \mathbf{1}$

(3) $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，$\dfrac{1}{z} = \cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるから

$$t = z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}t$$

上式より，$t>0$ であることに注意して，$t^2+t=1$ を解くと

$$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}t = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

(4) 正五角形の一辺の長さを x とすると，中心角 $\dfrac{2\pi}{5}$，等しい 2 辺の長さが 1 の二等辺三角形に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cos\frac{2\pi}{5} \\ &= 2 - 2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \boldsymbol{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

■

2 (1) $f(x) = |e^x - 1|$ とおくと

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & (x \geqq 0) \\ -(e^x - 1) & (x < 0) \end{cases}$$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$a \leqq 0 \leqq a+1$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = -\int_a^0 (e^x - 1)\,dx + \int_0^{a+1} (e^x - 1)\,dx \\ &= -\Big[\, e^x - x \,\Big]_a^0 + \Big[\, e^x - x \,\Big]_0^{a+1} \\ &= (e^a - a) + (e^{a+1} - a - 1) - 2\cdot 1 \\ &= \boldsymbol{e^a + e^{a+1} - 2a - 3} \end{aligned}$$

(2) $a < -1$ のとき，$a < a+1 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = -\int_a^{a+1} (e^x - 1)\,dx \\ &= -\Big[\, e^x - x \,\Big]_a^{a+1} = e^a - e^{a+1} + 1 \end{aligned}$$

$0 < a$ のとき，$0 < a < a+1$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = \int_a^{a+1} (e^x - 1)\,dx \\ &= \Big[\, e^x - x \,\Big]_a^{a+1} = -e^a + e^{a+1} - 1 \end{aligned}$$

$a < -1$ のとき　$I'(a) = e^a - e^{a+1} = e^a(1-e) < 0$

$0 < a$ のとき　$I'(a) = -e^a + e^{a+1} = e^a(e-1) > 0$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$I'(a) = e^a + e^{a+1} - 2 = (e+1)\left(e^a - \frac{2}{e+1}\right)$

ここで　$\dfrac{2}{e+1} - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e(e+1)} > 0,\quad 1 - \dfrac{2}{e+1} = \dfrac{e-1}{e+1} > 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{e} < \dfrac{2}{e+1} < 1$　すなわち　$-1 < \log\dfrac{2}{e+1} < 0$

したがって　$-1 < a < \log\dfrac{2}{e+1}$ のとき　$I'(a) < 0$

$\log\dfrac{2}{e+1} < a < 0$ のとき　$I'(a) > 0$

よって，$I(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a = \log\dfrac{2}{e+1}}$ ■

3 (1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \mathbf{log\,2}$

(2) $t > 0$ のとき

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} > 0 \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{1}{1+t} < 1$$

$$(1+t)(1-t) = 1 - t^2 < 1 \qquad \text{ゆえに} \qquad 1 - t < \frac{1}{1+t}$$

したがって，$t > 0$ のとき　$1 - t < \dfrac{1}{1+t} < 1$

$x > 0$ のとき　$\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt < \int_0^x dt$

よって，$x > 0$ のとき　$x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$

(3) (2) の結果から，$x > 0$ のとき　$\dfrac{x(4-x)}{2} < x + \log(1+x) < 2x$

とくに，$0 < x < 4$ のとき　$\dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{x + \log(1+x)} < \dfrac{2}{x(4-x)}$

自然数 n について，$0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n} < 4$ であるから

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{2}{x(4-x)}\,dx \qquad \cdots (*)$$

(1) の結果に注意して

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{2}{x(4-x)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x-4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\Big[\ \log(4-x)\ \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\ &= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}} = 0$ であるから，$(*)$ についてはさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)} = \mathbf{\frac{1}{2}\,log\,2}$$

■

4 (1) p_3 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (非復元抽出)，1，2，3 を取り出す確率であるから

$$p_3 = \frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_N\mathrm{P}_3} = \boldsymbol{\frac{6}{N(N-1)(N-2)}}$$

q_1 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 1 だけの確率であるから

$$q_1 = \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{N^3}}$$

q_2 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 2 以下の確率からすべて 1 だけの確率を引いた確率であるから

$$q_2 = \left(\frac{2}{N}\right)^3 - \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{7}{N^3}}$$

q_3 は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 3 以下の確率からすべての 2 以下の確率を引いた確率であるから

$$q_3 = \left(\frac{3}{N}\right)^3 - \left(\frac{2}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{19}{N^3}}$$

(2) p_n は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (非復元抽出)，1 枚は n で，残りの 2 枚が $n-1$ 以下の確率であるから

$$p_n = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times 3!}{{}_N\mathrm{P}_3} = \boldsymbol{\frac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}}$$

q_n は，N 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて n 以下の確率からすべての $n-1$ 以下の確率を引いた確率であるから

$$q_n = \left(\frac{n}{N}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{3n^2-3n+1}{N^3}}$$

■

5　(1) $P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$\begin{aligned}P(x) &= (6x^2+11x-35)Q(x)+ax+b\\ &= (3x-5)(2x+7)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$，$P\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ であるから

$$\frac{5}{3}a+b=\frac{8}{3},\quad -\frac{7}{2}a+b=-\frac{5}{2}$$

これを解いて　$a=b=1$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{x+1}$

(2) A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(1,\ s,\ t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{s}{3}+1,\ \frac{t}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\frac{5}{3},\ \frac{s}{3}+1,\ \frac{t}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ 3,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=0$ であるから

$$-\frac{20}{9}+\left(\frac{s}{3}+1\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0\quad\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$-4+3\left(\frac{s}{3}+1\right)=0\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{s=1}$$

$s=1$ を ① に代入すると

$$-\frac{20}{9}+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0\quad\text{これを解いて}\quad \boldsymbol{t=\pm 2}$$

(3) 分散 s^2 の定義により

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}\\ &= \frac{1}{3}\{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2\overline{x}(x_1+x_2+x_3)+3\overline{x}^2\}\end{aligned}$$

$\overline{x}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ より，$x_1+x_2+x_3=3\overline{x}$ であるから

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{3}\{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2\overline{x}\cdot 3\overline{x}+3\overline{x}^2\}\\ &= \frac{1}{3}({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-\overline{x}^2\\ &= \overline{x^2}-\overline{x}^2\end{aligned}$$

■

6 (1) C_1 は原点 O を通るから　$\boldsymbol{c=0}$

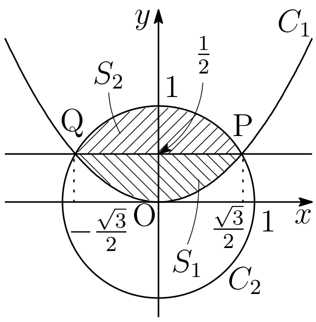
2 点 P，Q の y 座標が等しいので，C_1 の軸は，線分 PQ の垂直二等分線であるから，C_1 は y 軸に関して対称な放物線である．したがって

$$\boldsymbol{b=0}$$

さらに，$C_1 : y = ax^2$ が点 P を通ることから

$$\frac{1}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

(2) 求める部分の面積を S_1 とすると



$$S_1 = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) C_2 と直線 PQ で囲まれた図形のうち，線分 PQ の上側の部分の面積を S_2 とすると，$\angle\text{POQ} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \triangle\text{POQ}$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

求める面積を S とすると

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}}$$

■

10.3　2017 年

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$ を求めよ．

(2) $t > 0$ とする．座標平面上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になる t の値とそのときの距離を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，方程式 $2\sin\theta = \sin 3\theta$ を満たす θ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin\theta|\, d\theta$ を求めよ．

3 z を複素数とする．$z + \dfrac{3}{z}$ が実数であり，$3 \leqq z + \dfrac{3}{z} \leqq 4$ となる z の動く範囲を複素数平面上に図示せよ．

4 袋の中に赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．A が玉を 2 個取り出し，取り出した玉の色を確認して，もし 2 個とも赤玉なら赤玉 1 個を，それ以外の場合は白玉 1 個を袋に戻し，次に B がその袋から玉を 2 個取り出す．次の問いに答えよ．

(1) A が白玉 2 個を取り出し，かつ B が赤玉 2 個を取り出す確率を求めよ．

(2) B が赤玉 2 個を取り出す確率を求めよ．

(3) B が取り出した玉が赤玉 2 個であったとき，A が取り出した玉が白玉 2 個である条件付き確率を求めよ．

5 $0 \leqq a \leqq 1$ とし，$f(a) = \displaystyle\int_0^1 |x(a - x)|\, dx$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x(1 - x)\, dx$ を求めよ．

(2) $f(a)$ を a の関数として表せ．

(3) $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの a の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{6}$ a，b を正の実数とする．座標空間における 4 点 O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(0, 0, 1) を頂点とする四面体 OABC を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積を求めよ．

(2) $\cos\angle\mathrm{ACB}$ と $\sin\angle\mathrm{ACB}$ を a，b を用いて表せ．

(3) 三角形 ABC の面積を a，b を用いて表せ．

(4) 四面体 OABC の体積が 1 であるとき，三角形 ABC の面積の最小値とそのときの a と b の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \Big[\,x-\log x\,\Big]_1^2 = \mathbf{1-\log 2}$

(2) 点 P$(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y=x$ $(x-y=0)$ との距離を d とすると

$$d = \frac{|\sqrt{t}-\log t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|\sqrt{t}-\log t|}{\sqrt{2}}$$

$f(t)=\sqrt{t}-\log t$ とおくと　　$f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{t}-2}{2t}$

$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(4)=2(1-\log 2)>0$ であるから，d は $\boldsymbol{t=4}$ のとき，最小値

$$\frac{|f(4)|}{\sqrt{2}} = \frac{2(1-\log 2)}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}(1-\log 2)}$$

をとる．■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より

$$2\sin\theta - \sin 3\theta = 2\sin\theta - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$$
$$= \sin\theta(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \quad \cdots ①$$

① より，方程式 $2\sin\theta = \sin 3\theta$ は

$$\sin\theta(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ により，求める方程式の解は　　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

(2) ① より　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき　$2\sin\theta - \sin 3\theta \leqq 0$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$2\sin\theta - \sin 3\theta \geqq 0$

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin\theta|\,d\theta$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta - \sin 3\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta - \sin 3\theta)\,d\theta$$
$$= -\left[-2\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-2\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -2\left(-2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right) + \left(-2\cos 0 + \frac{1}{3}\cos 0\right)$$
$$+ \left(-2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$= \boldsymbol{2\sqrt{3} - \frac{5}{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと (x, y は実数, $r > 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$)

$$\begin{aligned} z + \frac{3}{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{3}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \left(r + \frac{3}{r}\right)\cos\theta + \left(r - \frac{3}{r}\right)i\sin\theta \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$(*)$ が実数のとき，$\left(r - \dfrac{3}{r}\right)\sin\theta = 0$ である．

(i) $r - \dfrac{3}{r} = 0$ のとき，$r = \sqrt{3}$ より，$z + \dfrac{3}{z} = 2\sqrt{3}\cos\theta$ であるから

$$3 \leqq 2\sqrt{3}\cos\theta \leqq 4 \quad \text{すなわち} \quad \cos\theta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，$-\dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$$x^2 + y^2 = 3, \quad x \geqq \frac{3}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots(*)$$

(ii) $\sin\theta = 0$ のとき，z は実数であるから，$z = x$ より (x は実数)，

$$3 \leqq x + \frac{3}{x} \leqq 4$$

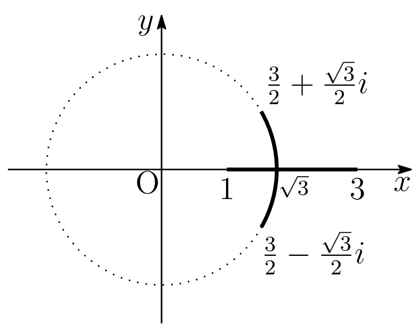
上式より，$x > 0$ であることに注意して

$$x^2 - 3x + 3 \geqq 0, \quad x^2 - 4x + 3 \leqq 0$$

したがって　$\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqq 0, \quad (x-1)(x-3) \leqq 0$

よって　$1 \leqq x \leqq 3, \quad y = 0 \quad \cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ より，z の動く範囲は



■

$\boxed{4}$ (1) A が赤玉 4 個と白玉 6 個の中から白玉 2 個を取り出し，次に B が赤玉 4 個と白玉 5 個の中から赤玉 2 個を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{1}{18}}$$

(2) (i) A が赤玉 4 個と白玉 6 個の中から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出し，次に B が赤玉 3 個と白玉 6 個の中から赤玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}\times\frac{1}{12}=\frac{2}{45}$$

(ii) A が赤玉 4 個と白玉 6 個の中から赤玉 2 個を取り出し，次に B が赤玉 3 個と白玉 6 個の中から赤玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{90}$$

(1) の結果と (i),(ii) より，B が赤玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{1}{18}+\frac{2}{45}+\frac{1}{90}=\frac{5+4+1}{90}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

(3) (1),(2) の結果より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

■

5 (1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}(1-0)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(2) $0 \leqq a \leqq 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 |x(a-x)|\,dx \\ &= \int_0^a x(a-x)\,dx + \int_a^1 x(x-a)\,dx \\ &= \frac{1}{6}a^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$f'(a) = a^2 - \dfrac{1}{2} = \left(a + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) $f(a)$ の増減表は

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	極小 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

よって　最大値 $\boldsymbol{f(0) = \frac{1}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}}$ ■

6 (1) $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a,\ 0, -1),\ \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0,\ b, -1)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = a\cdot 0 + 0\cdot b + (-1)\cdot(-1) = \mathbf{1}$

(2) $\cos\angle\mathrm{CAB} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}}$

また　$\sin\angle\mathrm{CAB} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{(a^2+1)(b^2+1)}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a^2b^2+a^2+b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}}}$

(3) (2) の結果から

$$\sin\angle\mathrm{CAB} = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\sin\angle\mathrm{CAB} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}$

(4) C から △OAB に下ろした垂線の長さが 1 であるから，四面体 OABC の体積から

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot 1 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab = 1 \quad \text{すなわち} \quad ab = 6$$

したがって，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{36 + a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + (a-b)^2 + 2ab} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{48 + (a-b)^2}\end{aligned}$$

よって　　$a - b = 0$，すなわち，$\boldsymbol{a = b = \sqrt{6}}$ のとき，
△ABC は最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$ をとる．

■

10.4　2018 年

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

1 a を正の実数とする．関数 $f(x)=-x^2+4x$ と $g(x)=2|x-a|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点が 1 点となるような a の値を求めよ．

(2) (1) で求めた a の値のときに，$y=f(x)$ のグラフ，$y=g(x)$ のグラフおよび x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるような a の値の範囲と，2 つの交点の x 座標を求めよ．

2 $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$a_n=n^2+n+1$ とおく．さらに，実数 x_n，y_n を

$$(a_1+i)(a_2+i)(a_3+i)\cdots(a_n+i)=x_n+y_ni \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．ただし i は虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1) x_2，y_2 および x_3，y_3 を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ が成り立つことを示せ．

3 関数 $y=e^{\sin x+\cos x}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ の増減，極値，凹凸を調べ，そのグラフをかけ．

4 2 つの箱 A，B があり，どちらの箱にも赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている．それぞれの箱から，無作為に玉を 1 個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す．n 回の操作の後，箱 A，B のどちらにも赤玉，白玉が 1 個ずつ入っている確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_n を用いて p_{n+1} を表せ．

(3) 自然数 n に対して，p_n を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 今日は日曜日で，10 日後は水曜日である．100 日後および 100 万日後はそれぞれ何曜日か，理由とともに答えよ．

(2) x の方程式 $\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = 1$ を解け．

(3) 三角形 OAB で，辺 OA を $2:1$ に内分する点を L，辺 OB の中点を M，辺 AB を $2:3$ に内分する点を N とする．線分 LM と ON の交点を P とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

6 関数 $f(x) = x|x-3|\ (0 \leqq x \leqq 4)$ について，次の問いに答えよ．

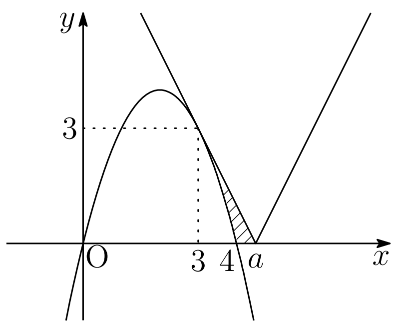
(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 微分係数 $f'(2)$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

解答例

1 (1) $a>0$ より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点が 1 点となるのは，2 次方程式



$$-x^2+4x=-2(x-a)$$

すなわち　$x^2-6x+2a=0$

が重解をもつときであるから，係数について

$$D/4=(-3)^2-1\cdot 2a=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=\dfrac{9}{2}}$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3\right)\cdot 3-\int_3^4(-x^2+4x)\,dx \\ &= \frac{9}{4}-\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_3^4=\boldsymbol{\frac{7}{12}} \end{aligned}$$

(3) (1) の図から，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$\boldsymbol{0<a<\frac{9}{2}}$$

また，そのときの交点の座標は

(i) $0<a\leqq 4$ のとき

$$-x^2+4x=2|x-a|$$

$0<x\leqq 4$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{x=3-\sqrt{9-2a},\ 1+\sqrt{1+2a}}$$

(ii) $4<a<\dfrac{9}{2}$ のとき

$$-x^2+4x=-2x+2a$$

これを解くと　　$\boldsymbol{x=3\pm\sqrt{9-2a}}$　■

2　(1) $a_n = n^2+n+1$ より，$a_1=3,\ a_2=7,\ a_3=13$ であるから，定義式より

$$\begin{aligned} x_2+y_2i &= (a_1+i)(a_2+i) = (3+i)(7+i) = 20+10i, \\ x_3+y_3i &= (a_1+i)(a_2+i)(a_3+i) \\ &= (20+10i)(13+i) = 250+150i \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x_2=20,\ y_2=10,\ x_3=250,\ y_3=150}$

(2)
$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{n}{n+2} \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n=1$ のとき　$x_1+y_1i = a_1+i = 3+i$

$x_1=3$，$y_1=1$ であるから，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} x_{k+1}+y_{k+1}i &= (a_{k+1}+i)(x_k+y_ki) \\ &= (a_{k+1}x_k-y_k)+(x_k+a_{k+1}y_k)i \end{aligned}$$

$x_{k+1}=a_{k+1}x_k-y_k$，$y_{k+1}=x_k+a_{k+1}y_k$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} &= \frac{x_k+a_{k+1}y_k}{a_{k+1}x_k-y_k} = \frac{1+a_{k+1}\cdot\dfrac{y_k}{x_k}}{a_{k+1}-\dfrac{y_k}{x_k}} \\ &= \frac{1+(k^2+3k+3)\cdot\dfrac{k}{k+2}}{k^2+3k+3-\dfrac{k}{k+2}} = \frac{k+2+(k^2+3k+3)k}{(k+2)(k^2+3k+3)-k} \\ &= \frac{k^3+3k^2+4k+2}{k^3+5k^2+8k+6} = \frac{(k+1)(k^2+2k+2)}{(k+3)(k^2+2k+2)} = \frac{k+1}{k+3} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$t'=\dfrac{dt}{dx}$，$t''=\dfrac{d^2t}{dx^2}$ とおくと，$y=e^t$ より

$$\frac{dy}{dx}=t'e^t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\{t''+(t')^2\}e^t$$

このとき　$t'=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$t''=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

したがって　$t''=-t$，$(t')^2=2-t^2$

ゆえに　$t''+(t')^2=-t+2-t^2=-(t+2)(t-1)\quad(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の符号は，それぞれ t'，$-(t-1)$ の符号と一致する．

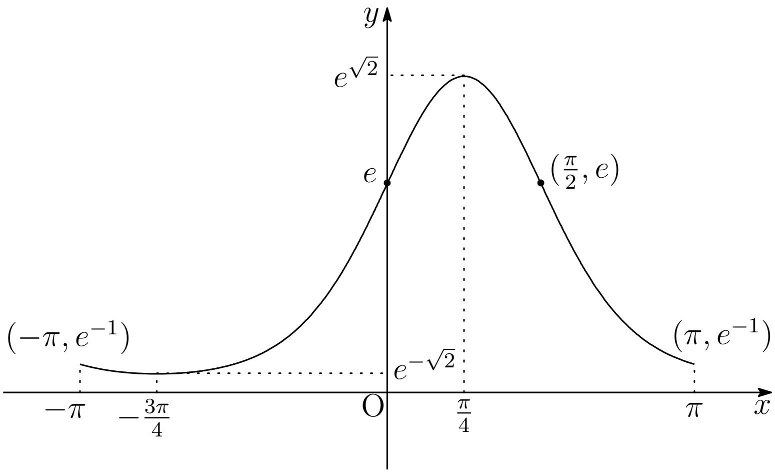
したがって，$y=e^{\sin x+\cos x}$ の増減・凹凸は次のようになる．

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	e^{-1}	↘	$e^{-\sqrt{2}}$	↗	e	↗	$e^{\sqrt{2}}$	↘	e	↘	e^{-1}

よって　極小値 $f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\boldsymbol{e^{-\sqrt{2}}}$，極大値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{e^{\sqrt{2}}}$

変曲点は　$\boldsymbol{(0,\ e)}$，$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{2},\ e\right)}$

以上の結果から，グラフの概形は次のようになる．



補足 $t=\sin x+\cos x\ (-\pi\leqq x\leqq\pi)$ が $x=-\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}$ でそれぞれ極小，極大となるから，$y=e^{\sin x+\cos x}$ も $x=-\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}$ でそれぞれ極小値，極大値をとる．

これを元にグラフの増減・凹凸を考えるとよい．■

4 (1) 箱 A に違う色の玉が入っているとき，1 回の操作の後，箱 A に違う色の玉が入る確率は，A，B 両方の箱から同じ色の玉を交換する確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

箱 A に違う色の玉が入っているとき，1 回の操作の後，箱 A に同じ色の玉が入る確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

また，箱 A に同じ色の玉が入っているとき，1 回の操作の後には箱 A に違う色の玉が入る．

p_n は n 回の操作の後，箱 A に違う色の玉が入っている確率と考えてもよい．また，n 回の操作の後，箱 A に同じ色の玉が入っている確率を q_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\boldsymbol{p_1=\frac{1}{2}},\quad q_1=\frac{1}{2},\quad (*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n \end{cases}$$

よって　$p_2=\dfrac{1}{2}p_1+q_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(2) $p_n+q_n=1$ であるから，これと $(*)$ の第 1 式から q_n を消去すると

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+(1-p_n)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+1\quad (n=1,2,3,\cdots)$

したがって　$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

■

5 (1) 整数を 7 で割った余りと曜日を次のように対応できる．

0	1	2	3	4	5	6
日	月	火	水	木	金	土

したがって　$100 \equiv 2 \pmod 7$
$100^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7$

よって，100 日後は **火曜日**，100 万日後は **月曜日**

(2) 真数は正であるから

$$x-1>0 \text{ かつ } x-4>0 \quad \text{すなわち} \quad x>4 \quad \cdots ①$$

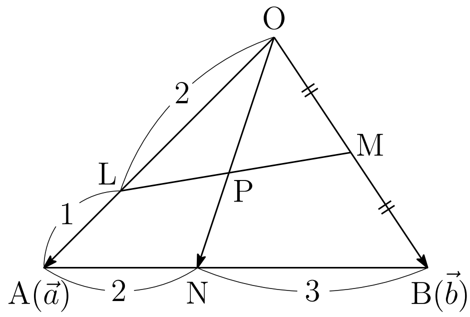
$\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = \dfrac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2(x-4)$ より，与えられた方程式は

$$\log_2(x-1)+\log_2(x-4)=1$$
$$\log_2(x-1)(x-4)=\log_2 2$$

したがって　$(x-1)(x-4)=2$　ゆえに　$x^2-5x+2=0$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}}$

(3) 点 N は辺 AB を 2 : 3 に内分する点であるから



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}}$$

$\vec{a} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\vec{b} = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を上式に代入すると

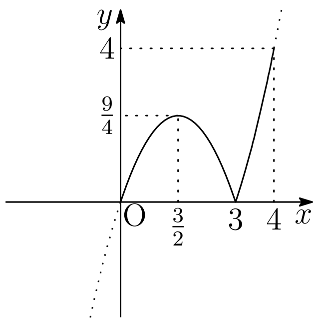
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + 2\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{5}$$
$$= \frac{17}{10}\cdot\frac{9\overrightarrow{\mathrm{OL}}+8\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{17} = \frac{17}{10}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{10}{17}\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{10}{17}\cdot\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5} = \boldsymbol{\dfrac{6\vec{a}+4\vec{b}}{17}}$　■

6 (1) $f(x)=x|x-3|\ (0 \leqq x \leqq 4)$ より

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-3) & (0 \leqq x \leqq 3) \\ x(x-3) & (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$

$-x(x-3)=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ より，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．



(2) $0 \leqq x \leqq 3$ において，$f(x)=-x^2+3x$ より

$$f'(x)=-2x+3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f'(2)=-1}$$

(3) (1) で示したグラフから

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx+\int_3^4(x^2-3x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4=\boldsymbol{\frac{19}{3}}$$

■

10.5　2019 年

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a と b は定数で，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ と $g(x) = e^{ax}\cos(bx)$ について，$af(x) - bg(x)$ と $bf(x) + ag(x)$ を微分せよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ と $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x > 0)$ とする．$f(x)$ の最大値を与える x を a とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べることにより，a の値および最大値 $f(a)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき，その接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とする．b_{n+2} を b_{n+1}，b_n を用いて表せ．

(2) (1) で求めた関係式を次のように表すとき，定数 p，q を求めよ．

$$\begin{cases} b_{n+2} - pb_{n+1} = q(b_{n+1} - pb_n) \\ b_{n+2} - qb_{n+1} = p(b_{n+1} - qb_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，$p \geqq q$ とする．

(3) (2) で求めた p，q を用いて数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を次のように定める．

$$c_n = b_{n+1} - pb_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$d_n = b_{n+1} - qb_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

一般項 c_n，d_n をそれぞれ求めよ．

(4) 一般項 b_n および極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ．

4 箱の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている．この箱から玉を 1 個取り出し，玉の色を見た上で箱に戻すという試行を n 回繰り返す．赤玉が連続して m 回以上出た確率を $P(n,\ m)$ とおく．ただし，$n \geqq m \geqq 2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $P(2,\ 2)$，$P(3,\ 2)$，$P(4,\ 2)$ を求めよ．

(2) $P(m,\ m)$, $P(m+1,\ m)$, $P(m+2,\ m)$ を求めよ．

(3) $n = m+1,\ m+2,\ m+3, \cdots, 2m$ に対し $P(n,\ m) - P(n-1,\ m)$ を求めよ．

(4) $P(2m,\ m)$ を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 不定方程式 $21x - 10y = 1$ の整数解で，$0 \leqq x \leqq 1000$ を満たすものの個数を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$n^5 - n$ は 30 で割り切れることを示せ．

(3) $0° \leqq \theta < 360°$ のとき，方程式 $\cos(2\theta) + \sin\theta = 1$ を解け．

6 aは正の実数とする．$y = 2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1$で表される放物線を$C$とする．次の問いに答えよ．

(1) 放物線Cはaの値によらず，2定点を通る．その2定点の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 放物線Cと放物線$y = x(1-x)$がただ1つの共有点をもつとき，その共有点の座標とaの値を求めよ．

(3) (1)で求めた2定点を通る直線と放物線Cで囲まれる部分の面積をSとする．Sの値をaを用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=e^{ax}\sin bx$，$g(x)=e^{ax}\cos bx$ を微分すると

$$f'(x)=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=af(x)+bg(x)$$
$$g'(x)=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx=-bf(x)+ag(x)$$

したがって
$$af'(x)-bg'(x)=(a^2+b^2)f(x)$$
$$bf'(x)+ag'(x)=(a^2+b^2)g(x)$$

よって
$$\boldsymbol{\{af(x)-bg(x)\}'=(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx}$$
$$\boldsymbol{\{bf(x)+ag(x)\}'=(a^2+b^2)e^{ax}\cos bx}$$

(2) (1) の結果を利用して (以下，C は積分定数とする)

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx\,dx&=\frac{1}{a^2+b^2}\{af(x)-bg(x)\}+C\\&=\boldsymbol{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,dx&=\frac{1}{a^2+b^2}\{bf(x)+ag(x)\}+C\\&=\boldsymbol{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C}\end{aligned}$$

(3) 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^\pi(e^{-x}\sin x)^2\,dx=\pi\int_0^\pi e^{-2x}\sin^2 x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{-2x}\,dx-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi e^{-2x}\cos 2x\,dx\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，(2) の結果の第 2 式に $a=-2$，$b=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\cos 2x\,dx&=\frac{e^{-2x}}{(-2)^2+2^2}(2\sin 2x-2\cos 2x)+C\\&=\frac{e^{-2x}}{4}(\sin 2x-\cos 2x)+C\end{aligned}$$

上式を利用して，① を計算すると

$$\begin{aligned}V&=-\frac{\pi}{4}\Big[\,e^{-2x}\,\Big]_0^\pi-\frac{\pi}{2}\left[\,\frac{e^{-2x}}{4}(\sin 2x-\cos 2x)\,\right]_0^\pi\\&=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2\pi})-\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})}\end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると　$f'(x) = \dfrac{1-2\log x}{x^3}$　$\cdots(*)$

右の増減表により

$\boldsymbol{a = \sqrt{e}}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2e}}$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

(2) $(*)$ より，曲線 $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - \frac{\log t}{t^2} = \frac{1-2\log t}{t^3}(x-t) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1-2\log t}{t^3}x + \frac{3\log t - 1}{t^2}$$

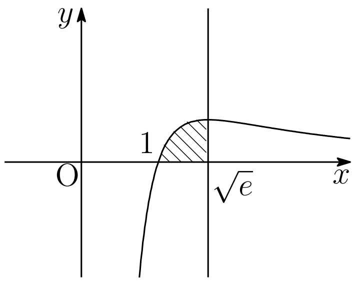
これが原点を通るから

$$\frac{3\log t - 1}{t^2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = e^{\frac{1}{3}}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y = \frac{1-2\log e^{\frac{1}{3}}}{(e^{\frac{1}{3}})^3}x \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{x}{3e}}$$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分でその面積を S とすると



$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}\right)' \log x\,dx$$

$$= -\left[\frac{\log x}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\left[\frac{\log x + 1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{1 - \frac{3}{2\sqrt{e}}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_{n+2} = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

漸化式より　$\log_2 a_{n+2} = \log_2 \sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}} = \dfrac{1}{2}\log_2 a_n - \dfrac{1}{2}\log_2 a_{n+1}$

よって　$\boldsymbol{b_{n+2} = -\dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_n}$

(2) $$(*)\begin{cases} b_{n+2} - pb_{n+1} = q(b_{n+1} - pb_n) \\ b_{n+2} - qb_{n+1} = p(b_{n+1} - qb_n) \end{cases}$$

(1) の結果から　$b_{n+2} + \dfrac{1}{2}b_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_n = 0$

関係式 $(*)$ から　$b_{n+2} - (p+q)b_{n+1} + pqb_n = 0$

上の 2 式から　$p + q = -\dfrac{1}{2},\quad pq = -\dfrac{1}{2}$

$p,\ q$ を解とする 2 次方程式は　$x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$

$p \geqq q$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{p = \dfrac{1}{2},\quad q = -1}$

(3) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0$，$b_2 = \log_2 a_2 = \log_2 2 = 1$

$$(**)\begin{cases} c_n = b_{n+1} - pb_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ d_n = b_{n+1} - qb_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

$(*)$，$(**)$ より　$c_{n+1} = qc_n$，$d_{n+1} = pd_n$，$c_1 = d_1 = 1$

よって　$c_n = c_1 \cdot q^{n-1} = \boldsymbol{(-1)^{n-1}}$，$d_n = d_1 \cdot p^{n-1} = \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(4) (3) の結果から　$b_{n+1} - \dfrac{1}{2}b_n = (-1)^{n-1}$，$b_{n+1} + b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

上の 2 式から b_{n+1} を消去すると　$\boldsymbol{b_n = \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}}$

ゆえに　$b_{2n} = \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1} + 1\right\}$，$b_{2n+1} = \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} - 1\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \frac{2}{3}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = -\frac{2}{3}$

よって　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2^{\frac{2}{3}},\quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2^{-\frac{2}{3}}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 初めて連続して 2 回赤玉を取り出す事象を A_2 とする．
また,「＊」は赤玉または白玉を表すこととする．
2 回目で事象 A_2 が起こるのは「赤赤」の順に取り出す確率

$$P(2,\ 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

3 回目で事象 A_2 が起こるのは「白赤赤」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

4 回目で事象 A_2 が起こるのは「＊白赤赤」の順に取り出す確率

$$1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$P(3,\ 2) = P(2,\ 2) + \dfrac{2}{27}$, $P(4,\ 2) = P(3,\ 2) + \dfrac{2}{27}$ であるから

$$P(2,\ 2) = \boldsymbol{\frac{1}{9}}, \quad P(3,\ 2) = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \boldsymbol{\frac{5}{27}}, \quad P(4,\ 2) = \frac{5}{27} + \frac{2}{27} = \boldsymbol{\frac{7}{27}}$$

(2) 初めて連続して m 回赤玉を取り出す事象を A_m とする．

m 回目で事象 A_m が起こるのは「$\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$P(m,\ m) = \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{1}{3^m}$$

$m+1$ 回目で事象 A_m が起こるのは「白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{2}{3^{m+1}}$$

$m+2$ 回目で事象 A_m が起こるのは「＊白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{2}{3^{m+1}}$$

よって　$P(m,\ m) = \boldsymbol{\dfrac{1}{3^m}}$,

$$P(m+1,\ m) = P(m,\ m) + \frac{2}{3^{m+1}} = \boldsymbol{\frac{5}{3^{m+1}}},$$

$$P(m+2,\ m) = P(m+1,\ m) + \frac{2}{3^{m+1}} = \boldsymbol{\frac{7}{3^{m+1}}}$$

(3) n 回目で事象 A_m が起こるのは「$\overbrace{* \cdots *}^{n-m-1\,\text{個}}$ 白 $\overbrace{\text{赤} \cdots \text{赤}}^{m\,\text{個}}$」の順に取り出す確率

$$P(n,\ m) - P(n-1,\ m) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m = \boldsymbol{\frac{2}{3^{m+1}}}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \{P(n,\ m) - P(n-1,\ m)\} = \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{2}{3^{m+1}}$$

$$P(2m,\ m) - P(m,\ m) = \frac{2m}{3^{m+1}}$$

よって　　$P(2m,\ m) = P(m,\ m) + \dfrac{2m}{3^{m+1}} = \boldsymbol{\dfrac{2m+3}{3^{m+1}}}$ ■

5 (1) $21x - 10y = 1$ より，$21 \equiv 1,\ 10 \equiv 0 \pmod{10}$ であるから

$$x \equiv 1 \pmod{10}$$

$x = 1 + 10(n-1)$ とおくと (n は整数)，$x = 10n - 9$ より

$$0 \leqq 10n - 9 \leqq 1000 \quad \text{ゆえに} \quad 9 \leqq 10n \leqq 1009$$

これを満たす整数 n は　$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 100$
よって，求める個数は　**100** (個)

(2)
$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^2+1)(n^2-1) \\ &= n\{(n^2-4)+5\}(n^2-1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は連続する 5 整数の積で 5! の倍数.
$5(n-1)n(n+1)$ は $5 \cdot 3!$ の倍数．よって，$n^5 - n$ は 30 で割り切れる.

(3) $\cos(2\theta) + \sin\theta = 1$ より

$$1 - 2\sin^2\theta + \sin\theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$

したがって　　$\sin\theta = 0,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ に注意して　　$\boldsymbol{\theta = 0^\circ,\ 30^\circ,\ 150^\circ,\ 180^\circ}$ ■

6 (1) 放物線 $C : y = 2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1$ より

$$y = a(2x-1)(x-2) + x + 1$$

よって，C は 2 定点 $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\frac{3}{2}}\right)$，**(2，3)** を通る．

(2) 放物線 C と放物線 $y = x(1-x) \cdots$ ① の方程式から y を消去すると

$$2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1 = x(1-x)$$

整理すると　$(2a+1)x^2 - 5ax + (2a+1) = 0 \quad \cdots$ ②

方程式 ② が重解をもつから，係数について

$$(-5a)^2 - 4(2a+1)(2a+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (9a+2)(a-2) = 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a = 2}$

これを ② に代入して　$5x^2 - 10x + 5 = 0$　ゆえに　$x = 1$

これを ① に代入して　$y = 0$　よって，共有点の座標は　**(1，0)**

(3) (1) で求めた 2 点を通る直線は　$y = x + 1$

この直線と放物線 C で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \{(x+1) - (2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1)\}dx \\ &= -2a \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx \\ &= -\frac{-2a}{6}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{9}{8}a} \end{aligned}$$

■

10.6 2020 年

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は， $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は， $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

1 関数 $y = x^3 + x - 1$ の表す曲線 C について，次の問いに答えよ．

(1) C 上の点 $(t,\ t^3 + t - 1)$ における接線の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 点 $(0,\ 1)$ を通る C の接線を ℓ とする．ℓ の方程式と接点の座標を求めよ．

(3) C と (2) で求めた ℓ で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

2 a を正の実数とする．$x > 0$ において，曲線 $y = \log x$ と曲線 $y = \sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

3 i を虚数単位とし，複素数 a_n を

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n + \sqrt{3}i \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．また，複素数 b_n を

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2) すべての正の整数 n について $a_{n+3} = a_n$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) b_n を求めよ．

4 1 から 7 までの数を 1 つずつ書いた 7 個の玉が，袋の中に入っている．袋から玉を 1 個取り出し，書かれている数を記録して袋に戻す．この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が 4 の倍数となる確率を p_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1 と p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3) p_n を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) $\cos 15^\circ$ の値を求めよ．

(2) 6400^{50} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(3) 平行四辺形 ABCD において，辺 BC を $2:3$ に内分する点を E とし，対角線 BD と線分 AE の交点を P とする．$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表すとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

6 実数 $a > 1$ に対して，$f(x) = x^2 + 2x - a^2 + 2a$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の解を a を用いて表せ．

(2) 放物線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ を示し，このときの a の値を求めよ．

解答例

1 (1) $C: y=x^3+x-1$ より　$y'=3x^2+1$

C 上の点 $(t,\ t^3+t-1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+t-1)=(3t^2+1)(x-t)$$

よって　$\boldsymbol{y=(3t^2+1)x-2t^3-1}$

(2) (1) で求めた接線が点 $(0,\ 1)$ を通るとき

$$1=-2t^3-1 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t^2-t+1)=0$$

t は実数であるから　$t=-1$　これを (1) の結果に代入して

$$\text{接点}\ \boldsymbol{(-1,\ -3)},\ \text{接線}\ \boldsymbol{\ell: y=4x+1}$$

(3) C，ℓ の方程式より

$$4x+1-(x^3+x-2)=(x+1)^2(2-x) \quad \cdots(*)$$

C と ℓ の共有点の x 座標は $x=-1,\ 2$

$(*)$ より，$-1 \leqq x \leqq 2$ において，$4x+1 \geqq x^3+x-2$ に注意して

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)^2(2-x)=\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

補足　積分公式[1]

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

■

2 $f(x)=\sqrt{ax}-\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{ax}-2}{2x}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき極小値 $f\left(\dfrac{4}{a}\right)=2-\log\dfrac{4}{a}>0$ であるから

$$2>\log\frac{4}{a} \quad \text{ゆえに} \quad e^2>\frac{4}{a} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a>4e^{-2}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

3　(1) 与えられた漸化式から

$$a_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1) + \sqrt{3}i = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$
$$a_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2} + \sqrt{3}i = \boldsymbol{-1+\sqrt{3}i}$$
$$a_4 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1+\sqrt{3}i) + \sqrt{3}i = \boldsymbol{-1}$$

(2) すべての自然数 m について，

$$a_{3m+1} = a_1,\ a_{3m+2} = a_2,\ a_{3m+3} = a_3 \qquad \cdots(\mathrm{A})$$

が成立する．

［1］(1) の結果より，$a_4 = a_1$．さらに，与えられた漸化式より

$$a_5 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_4 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = a_2$$
$$a_6 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_5 + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = a_3$$

したがって，$m=1$ のとき，(A) が成立する．

［2］$m=k$ のとき，(A) が成立する，すなわち

$$a_{3k+1} = a_1,\ a_{3k+2} = a_2,\ a_{3k+3} = a_3$$

が成立すると仮定すると，漸化式および (1) の結果により

$$a_{3k+4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+3} + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3 + \sqrt{3}i = a_4 = a_1,$$
$$a_{3k+5} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+4} + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = a_2,$$
$$a_{3k+6} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+5} + \sqrt{3}i = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = a_3$$

したがって，$m=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 m について，(A) が成立する．

(A) が成立することから，すべての正の整数 n について，次が成立する．

$$a_{n+3} = a_n \quad (n\ \text{は正の整数})$$

(3) (1) の結果から

$$a_1a_2a_3 = (-1)\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1+\sqrt{3}i) = 2$$

$b_{n+1} = a_nb_n$ より，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a_n$ であるから，これと (2) の結果より

$$\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4}\cdot\frac{b_6}{b_5}\cdot\frac{b_7}{b_6} = \cdots = \frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}}\cdot\frac{b_{3m}}{b_{3m-1}}\cdot\frac{b_{3m+1}}{b_{3m}} = a_1a_2a_3 = 2$$

これらの積をとると

$$\left(\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\right)\left(\frac{b_5}{b_4}\cdot\frac{b_6}{b_5}\cdot\frac{b_7}{b_6}\right)\cdots\left(\frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}}\cdot\frac{b_{3m}}{b_{3m-1}}\cdot\frac{b_{3m+1}}{b_{3m}}\right) = 2^m$$

したがって $\dfrac{b_{3m+1}}{b_1} = 2^m$ $b_1 = 1$ より $b_{3m+1} = 2^m$ $\cdots$①

① は，$m = 0$ のときも成立するから，次が成立する．

$$(*) \quad b_{3m-2} = 2^{m-1} \quad (m\text{ は自然数})$$

$(*)$ および漸化式 $b_{n+1} = a_nb_n$ により

$$\begin{aligned} b_{3m-1} &= a_{3m-2}b_{3m-2} = a_1b_{3m-2} \\ &= -1\cdot2^{m-1} = -2^{m-1}, \\ b_{3m} &= a_{3m-1}b_{3m-1} = a_2b_{3m-1} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-2^{m-1}) = -(1+\sqrt{3}i)2^{m-2} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 2^{m-1} & (n = 3m-2) \\ -2^{m-1} & (n = 3m-1) \\ -(1+\sqrt{3}i)2^{m-2} & (n = 3m) \end{cases}}$

■

4 (1) $\boldsymbol{p_1 = \dfrac{1}{7}}$

2 回繰り返して得られる 2 個の数の和が 4 の倍数となるのは，次の 13 通り

1 回目	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7
2 回目	3	7	2	6	1	5	4	3	7	2	6	1	5

よって　$p_2 = \dfrac{13}{7^2} = \boldsymbol{\dfrac{13}{49}}$

(2) n 回繰り返して得られる n 個の数の和を 4 で割った余りが 0，1，2，3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とすると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}q_n + \frac{2}{7}r_n + \frac{2}{7}s_n \\ &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(q_n + r_n + s_n) \end{aligned}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(1 - p_n) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{7}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{7}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} \\ p_n &= -\frac{3}{28}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{5}$ (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2) $6400^{50} = (2^6\cdot10^2)^{50} = 2^{300}\cdot10^{100}$ より

$$\begin{aligned}\log_{10} 6400^{50} &= \log_{10} 2^{300}\cdot10^{100}\\ &= \log_{10} 2^{300} + \log_{10} 10^{100} = 300\log_{10} 2 + 100\\ &= 300 \times 0.3010 + 100 = 190.30\end{aligned}$$

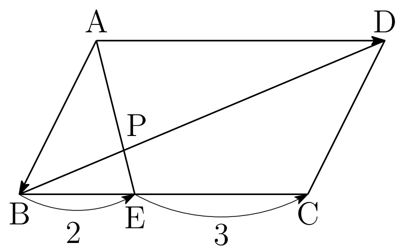
$190 < \log_{10} 6400^{50} < 191$ であるから

$$\log_{10} 10^{190} < \log_{10} 6400^{50} < \log_{10} 10^{191}$$

したがって　$10^{190} < 6400^{50} < 10^{191}$　よって　**191 桁**

(3) $\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = 2 : 3$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}\\ &= \frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{5} = \frac{7}{5}\cdot\frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}\end{aligned}$$



よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}}$

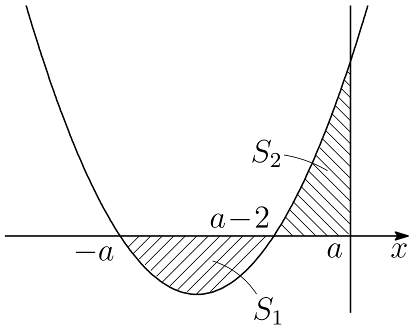
■

6　(1) $f(x)=x^2+2x-a^2+2a$ について，$f(x)=0$ とおくと

$$x^2+2x-a^2+2a=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+a)(x-a+2)=0$$

よって　　$\boldsymbol{x=-a,\ a-2}$

(2) (1) の結果から，右の図の斜線部分の面積を



$$S_1=-\int_{-a}^{a-2}f(x)\,dx$$
$$S_2=\int_{a-2}^{a}f(x)\,dx$$

とおくと，$S_1=S_2$ より

$$-\int_{-a}^{a-2}f(x)\,dx=\int_{a-2}^{a}f(x)\,dx \quad \text{ゆえに} \quad \int_{-a}^{a-2}f(x)\,dx+\int_{a-2}^{a}f(x)\,dx=0$$

よって　　$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0 \quad \cdots(*)$

(1) の結果から　$f(x)=(x+a)(x-a+2)$
$\qquad\qquad\qquad\quad =(x+a)\{(x+a)-2(a-1)\}$
$\qquad\qquad\qquad\quad =(x+a)^2-2(a-1)(x+a)$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx&=\int_{-a}^{a}\{(x+a)^2-2(a-1)(x+a)\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x+a)^3-(a-1)(x+a)^2\right]_{-a}^{a}\\&=\frac{8}{3}a^3-4(a-1)a^2\\&=\frac{4}{3}a^2\{2a-3(a-1)\}=\frac{4}{3}a^2(3-a)\end{aligned}$$

$(*)$ であるから，$a>1$ に注意して　　$\boldsymbol{a=3}$　■