令和７年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　令和７年３月12日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 4 人でじゃんけんを 1 回行い，その結果により，次の ①，②，③ のいずかを行う．

① 1 回目のじゃんけんで 1 人だけが勝ったとき，2 回目のじゃんけんは行わない．

② 1 回目のじゃんけんで勝った人が 2 人以上のとき，勝った人たちだけで 2 回目のじゃんけんを行う

③ 1 回目のじゃんけんで誰も勝たなかったとき，4 人全員で 2 回目のじゃんけんを行う．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 1 回目のじゃんけんで 1 人だけが勝つ確率を求めよ．

(2) 4 人全員で 2 回目のじゃんけんを行う確率を求めよ．

(3) 2 回目のじゃんけんで 1 人だけが勝ったとき，1 回目のじゃんけんで 2 人だけが勝っている条件付き確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 白玉と赤玉が入っている袋について，次の操作を行う．

白玉と赤玉の個数の和と同じ個数の赤玉を加え，続いて白玉の個数を 2 倍にし，さらに白玉を 3 個加える

はじめに袋の中に白玉が a_1 個，赤玉が b_1 個入っているとし，$n-1$ 個の操作を行ったあとの，袋の中の白玉の個数を a_n，赤玉の個数を b_n とすると，$b_1=3$，$b_2=7$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表し，a_1 の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数学的帰納法を用いて

$$b_n=(n-1)\cdot 2^n+3 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つことを証明せよ．

3 曲線 $y = \tan\dfrac{x}{4}$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ を C とし，曲線 C 上の点 $(\pi,\ 1)$ における接線を ℓ とする．次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (2) の図形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

4

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \beta = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\alpha,\ \beta$ および $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の極形式を求めよ．

(2) $\alpha^n = \beta^n$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを N とする．N の値を求めよ．

(3) (2) の N について，n が N 未満の自然数を動くとき，$|\alpha^n - \beta^n|^2$ の最小値を求めよ．また，最小値をとるときの n の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2$ と，$y = f(x)$ で表される曲線 C について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．また，曲線 C の概形をかけ．

(2) 曲線 C 上の点 $(1, -5)$ における接線の方程式を求めよ．また，接線と曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 曲線 C の点 $(t,\ f(t))$ における接線が $(0,\ a)$ を通るとき，a を t を用いて表せ．また，曲線 C に点 $(0,\ a)$ から 3 本の接線を引くことができるための，a についての条件を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 細胞 A は 1 分ごとに 4 倍に増殖し，細胞 B は 1 分ごとに 5 倍に増殖する．次の問に答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(1) $\log_{10} 4,\ \log_{10} 5,\ \log_{10} 6$ の値を求めよ．

(2) 1 個の細胞 A を培養するとき，m 分後に A の個数が初めて 10^{10} 個以上になったとする．このとき，自然数 m の値を求めよ．

(3) 16 個の細胞 A と 1 個の細胞 B を培養するとき，n 分後に A と B の個数の和が初めて 10^{10} 個以上になったとする．このとき，自然数 n の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ j 人で 1 回のじゃんけんをして k 人残る確率を $\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}$ とする．

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(3 + 3\cdot\frac{4!}{2!1!1!}\right)\Big/ 3^4 = \frac{13}{27}, \\
&\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot\frac{4!}{3!1!}\Big/ 3^4 = \frac{4}{27}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\cdot\frac{4!}{2!2!}\Big/ 3^4 = \frac{2}{9}, \\
&\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3+3!}{3^3} = \frac{1}{3}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot\frac{3!}{2!1!}\Big/ 3^3 = \frac{1}{3}, \\
&\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3\cdot 2!}{3^2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\dfrac{13}{27}}$

(3) 2 回目のじゃんけんで 1 人だけが勝つ事象を A とし，1 回目のじゃんけんで 2 人だけが勝つ事象を B とすると

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{13}{27} \times \frac{4}{27} + \frac{4}{27} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{196}{27^2}, \\
P(A \cap B) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}
\end{aligned}
$$

したがって，求める条件付き確率は

$$
P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{4}{27}\Big/\frac{196}{27^2} = \boldsymbol{\frac{27}{49}}
$$

■

$\boxed{2}$ (1) 条件から　$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 3}$

$$b_{n+1} = b_n + (a_n + b_n) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = a_n + 2b_n}$$

$b_2 = a_1 + 2b_1$ に $b_1 = 3$，$b_2 = 7$ を代入すると

$$7 = a_1 + 2{\cdot}3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_1 = 1}$$

(2) (1) の結果から　$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$

$\{a_n + 3\}$ は，初項 $a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 3 = 4{\cdot}2^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 3}$$

(3)　$(*)$　$b_n = (n-1){\cdot}2^n + 3 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

［1］ $n = 1$ のとき，$b_1 = (1-1){\cdot}2^1 + 3 = 3$ であるから，$(*)$ は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，$(*)$ が成立する仮定すると

$$b_k = (k-1){\cdot}2^k + 3$$

(1) の漸化式および (2) の結果から

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_n + 2b_k \\ &= 2^{k+1} - 3 + 2\{(k-1){\cdot}2^k + 3\} \\ &= k{\cdot}2^{k+1} + 3 \end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

補足 (1)，(2) の結果から　$b_{n+1} = 2^{n+1} - 3 + 2b_n$

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n} = 1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{b_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{b_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left\{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}$

$$\frac{b_n}{2^n} - \frac{b_1}{2} = (n-1) - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから，$b_1 = 3$ を代入して整理すると

$$\frac{b_n}{2^n} = (n-1) + \frac{3}{2^n} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = (n-1){\cdot}2^n + 3$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C : y = \tan\dfrac{x}{4}$ より　$y' = \dfrac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$

$x = \pi$ のとき，$y' = \dfrac{1}{2}$ であるから，C 上の点 $(\pi,\ 1)$ における接線 ℓ は

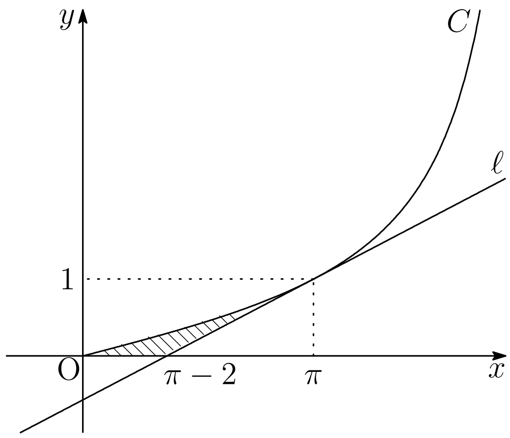
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - \pi) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1}$$

(2) 直線 ℓ の x 軸との共有点の x 座標は

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pi - 2$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \tan\frac{x}{4}\,dx - \frac{1}{2}\{\pi - (\pi - 2)\}\cdot 1 \\ &= \left[-4\log\cos\frac{x}{4}\right]_0^{\pi} - 1 = \mathbf{2\log 2 - 1} \end{aligned}$$



(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\pi} \tan^2\frac{x}{4}\,dx - \frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\{\pi - (\pi - 2)\} \\ &= \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}} - 1\right)dx - \frac{2}{3}\pi \\ &= \pi\left[\,4\tan\frac{x}{4} - x\,\right]_0^{\pi} - \frac{2}{3}\pi \\ &= \boldsymbol{\frac{10}{3}\pi - \pi^2} \end{aligned}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，$\beta = -\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,i)$ より

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \boldsymbol{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}, \\
\beta &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boldsymbol{\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi}, \\
\frac{\beta}{\alpha} &= \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \boldsymbol{\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi}
\end{aligned}$$

(2) $\alpha^n = \beta^n$，すなわち，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = 1$ を満たす自然数 n は，(1) の結果から

$$\frac{5}{12}n\pi = 2k\pi \quad \text{ゆえに} \quad \frac{5n}{24} = k \quad (k\text{ は整数})$$

上の第 2 式を満たす自然数 n は，24 の倍数であるから，これを満たす最小の自然数 N は

$$\boldsymbol{N = 24}$$

(3) $\theta = \dfrac{5n}{12}\pi$ とし，$z = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと，$|\alpha| = 1$ より

$$\begin{aligned}
|\alpha^n - \beta^n|^2 &= |\alpha|^{2n}\,|1-z|^2 = |1-(\cos\theta + i\sin\theta)|^2 \\
&= |(1-\cos\theta) + i(-\sin\theta)|^2 = (1-\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 \\
&= 2(1-\cos\theta) = 2\left(1-\cos\frac{5n}{12}\pi\right) = 4\sin^2\frac{5n}{24}\pi
\end{aligned}$$

上式が最小値をとるときの整数 n は $\quad 5n \equiv \pm 1 \pmod{24}$

$$5\cdot 5n \equiv \pm 5\cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad n \equiv \pm 5 \pmod{24}$$

これを満たす 24 未満の自然数 n は $\quad \boldsymbol{n = 5,\ 19}$

このとき，最小値は

$$\begin{aligned}
2\left(1-\cos\frac{5\cdot 5}{12}\pi\right) &= 2\left(1-\cos\frac{5\cdot 19}{12}\pi\right) = 2\left(1-\cos\frac{\pi}{12}\right) \\
&= 2\left(1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

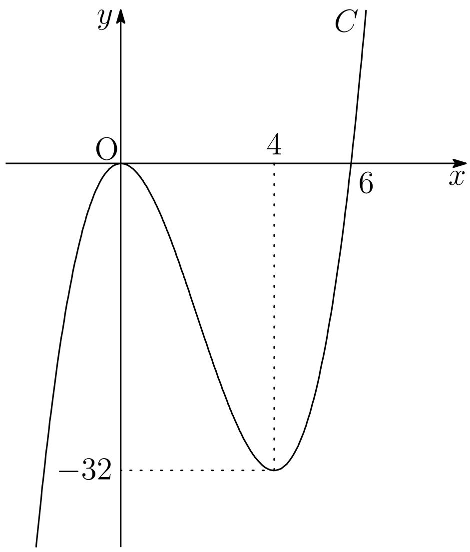
■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=x^3-6x^2$ より　$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 4$

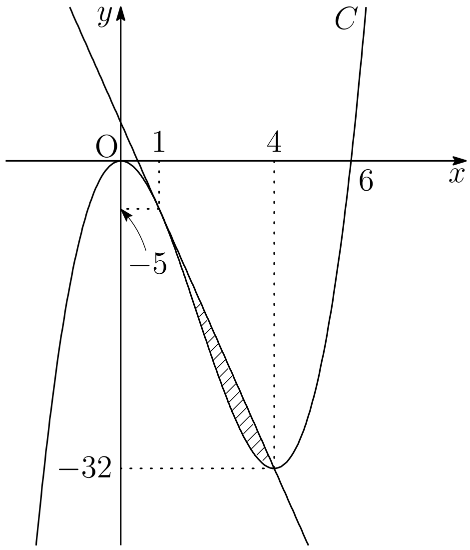
x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x=0}$ **で極大値** $\mathbf{0}$，$\boldsymbol{x=4}$ **で極小値** $\mathbf{-32}$ **をとる．**



(2) $f(1)=-5$，$f'(1)=-9$ であるから，求める接線の方程式は

$$y+5=-9(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-9x+4}$$



$y=x^3-6x^2$ と $y=-9x+4$ の 2 式から y を消去すると

$$x^3-6x^2=-9x+4 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)^2(x-4)=0$$

これを解いて　$x=1,\ 4$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \{(-9x+4)-(x^3-6x^2)\}\,dx \\ &= \int_1^4 (x-1)^2(4-x)\,dx \\ &= \frac{2!1!}{4!}(4-1)^4\,dx = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

補足　積分公式[1]

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

(3) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 12t)(x - t) + t^3 - 6t^2$$

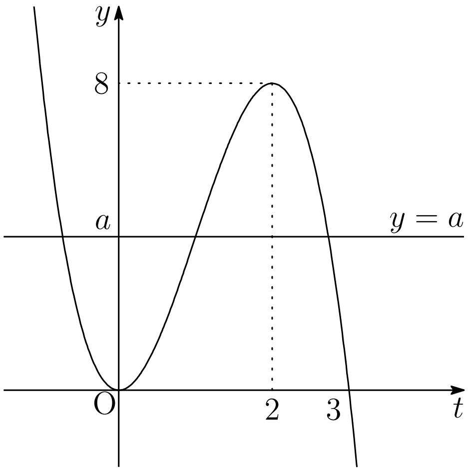
これが点 $(0,\ a)$ を通るとき　$a = -2t^3 + 6t^2 \quad \cdots (*)$
方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解，すなわち，曲線 $y = -2t^3 + 6t^2$ と直線 $y = a$ が異なる 3 つの共有点をもつから

$$y' = -6t^2 + 12t = -6t(t - 2)$$

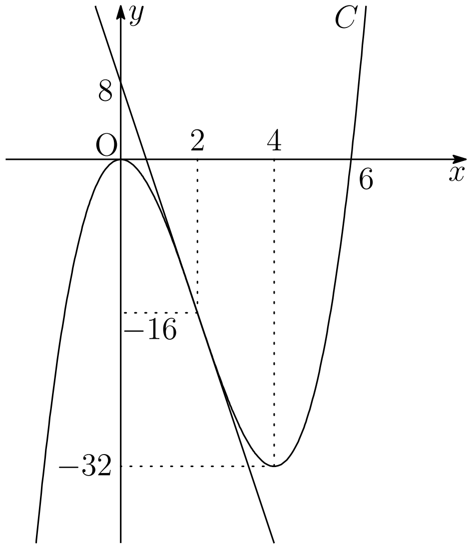
$y' = 0$ とすると　$t = 0,\ 2$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$

したがって，条件を満たす a の値の範囲は　$\boldsymbol{0 < a < 8}$



補足 C 上の変曲点 $(2, -16)$ で接線を引くとよい[2].



■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf $\boxed{6}$

$\boxed{6}$ (1)

$$\log_{10}4 = 2\log_{10}2 = 2\times 0.3010 = \mathbf{0.6020},$$
$$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1-\log_{10}2 = 1-0.3010 = \mathbf{0.6990},$$
$$\log_{10}6 = \log_{10}2+\log_{10}3 = 0.3010+0.4771 = \mathbf{0.7781}$$

(2) m 分後の細胞 A の個数は　4^m

この個数が 10^{10} 個以上となるとき　$4^m \geqq 10^{10}$

$$\log_{10}4^m \geqq \log_{10}10^{10} \quad \text{ゆえに} \quad m\log_{10}4 \geqq 10$$

したがって　$m \geqq \dfrac{10}{\log_{10}4} = \dfrac{10}{0.6020} = 16.6\cdots$

よって，求める最小の整数 m は　$\boldsymbol{m=17}$

(3) n 分後の A と B の個数の和は　$16{\cdot}4^n+5^n$

$$16{\cdot}4^n+5^n \geqq 10^{10} \qquad (*)$$

を満たす最小の自然数 n を求めればよい．

$16{\cdot}4^n+5^n > 5^n$ であるから，不等式 $5^n < 10^{10}$ を解くと

$$n < \frac{10}{\log_{10}5} = \frac{10}{0.6990} = 14.3\cdots$$

これを満たす自然数 n は　$n \leqq 14$　$\cdots$①

$16{\cdot}4^n+5^n < 24{\cdot}5^n+5^n = 5^{n+2}$ であるから，不等式 $5^{n+2} > 10^{10}$ を解くと

$$n > \frac{10}{\log_{10}5}-2 = \frac{10}{0.6990}-2 = 12.3\cdots$$

これを満たす自然数 n は　$n \geqq 13$　$\cdots$②

①，② より，$(*)$ を満たす自然数 n の必要条件は　$13 \leqq n \leqq 14$

$$16{\cdot}4^n+5^n = 5^n\left\{16\left(\frac{4}{5}\right)^n+1\right\}, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625} < \frac{1}{2},$$
$$16\left(\frac{4}{5}\right)^n < 16\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 16\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^4\right\}^2 < 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

$16{\cdot}4^n+5^n < 5^n(4+1) = 5^{n+1}$ であるから，不等式 $5^{n+1} > 10^{10}$ を解くと

$$n > \frac{10}{\log_{10}5}-1 = \frac{10}{0.6990}-1 = 13.3\cdots$$

これを満たす自然数 n は　$n \geqq 14$　$\cdots$③

①〜③ より，求める自然数 n は　$\boldsymbol{n=14}$　■