令和６年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　令和 6 年 3 月 12 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ (1)(2)(3), $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 3 つのさいころを同時に投げるとき，次の問に答えよ．

(1) 出た目の合計が 15 以上になる確率を求めよ．

(2) 出た目の合計が 14 以下であったとき，1 の目が出たさいころが少なくとも 1 つある条件つき確率を求めよ．

(3) 出た目すべての積が 4 の倍数となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ を満たす α の値を求めよ．

(2) n を自然数とする．(1) の α について，不等式

$$a_n > a_{n+1} > \alpha$$

を数学的帰納法によって証明せよ．

(3) $a_n > 3$ を満たす自然数 n のうち，最大のものを求めよ．

(4) (1) の α について，不等式

$$a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{4}(a_n - \alpha)$$

が成り立つことを示せ．さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示せ．

$\boxed{\textbf{3}}$ 複素数平面上で，原点および $3+i$ を通る直線を ℓ とする．次の問に答えよ．

(1) 点 z を原点のまわりに $3+i$ の偏角だけ回転した点を w とする．w を z を用いて表せ．

(2) 複素数 z と共役な複素数を $\overline{z}$ とし，直線 ℓ に関して点 z と対称な点を $\overline{z'}$ とする．z' を $\overline{z}$ を用いて表せ．

(3) $\mathrm{A}(1+i)$，$\mathrm{B}(2+i)$ とする．点 P が直線 ℓ 上を動くとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値と，最小値を与える点 P を表す複素数を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ 関数

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$$

について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，凹凸，変曲点を調べる必要はないものとする．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

5 四面体 OABC は

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AC} = 1, \quad \angle\mathrm{AOB} = 60^\circ, \quad \angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{BOC} = 45^\circ$$

を満たすとする．次の問に答えよ．

(1) 辺 OC の長さを求めよ．

(2) 3 点 O，A，B の定める平面に点 C から下した垂線の長さを求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．また，この四面体のすべての面に内接する球の半径を求めよ．

6 関数 $f(x) = x^3 - 9x$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ．

(2) t を実数とし，区間 $t \leqq x \leqq t+3$ における $f(x)$ の最大値を $M(t)$ で表す．関数 $M(t)$ を求め，そのグラフをかけ．

(3) (2) のグラフと t 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 目の出方の総数は　6^3 (通り)

出た目の和が15以上について，次の場合に分けて個数を求める．

$\{5,\ 5,\ 5\}$, $\{6,\ 6,\ 6\}$ のとき　2 (通り)

$\{6,\ 6,\ 5\}$, $\{6,\ 6,\ 4\}$, $\{6,\ 6,\ 3\}$, $\{6,\ 5,\ 5\}$ のとき

$$\frac{3!}{2!1!}\times 4 = 12 \ \text{(通り)}$$

$\{6,\ 5,\ 4\}$ のとき　$3! = 6$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{2+12+6}{6^3} = \mathbf{\dfrac{5}{54}}$

(2) 1の目が少なくとも1回出る $\Longrightarrow$ 出る目の和は14以下

1の目が少なくとも1回出る確率は　$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{91}{216}$

出る目の和が合計が14以下の確率は，(1) の余事象の確率であるから

$$1-\frac{5}{54} = \frac{49}{54}$$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{91}{216}\Big/\dfrac{49}{54} = \mathbf{\dfrac{13}{28}}$

(3) 出た目の積が奇数になる事象，すなわち，出た目がすべて奇数である事象を A とし，その確率を $P(A)$ とすると

$$P(A) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

出た目の積が偶数で4の倍数でない事象，すなわち，出た目の2つが奇数で残りの1つが2または6の事象を B とし，その確率を $P(B)$ とすると

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 3^2\cdot 2}{6^3} = \frac{1}{4}$$

A，B は互いに排反で，求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$1-P(A)-P(B) = 1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$ の両辺を平方すると

$$\alpha^2 = \alpha + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$$

原方程式から $\alpha > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{\alpha = 2}$

(2) $\qquad (*) \quad a_n > a_{n+1} > \alpha$

［1］$a_1 = 100$ より，$a_2 = \sqrt{a_1 + 2} = \sqrt{102}$ であるから

$$a_1 > a_2 > 2$$

よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 2 &= \sqrt{a_k + 2} - 2 \\ &= \frac{a_k - 2}{\sqrt{a_k + 2} + 2} > 0 \qquad \text{(A)} \\ a_{k+1} - a_{k+2} &= \sqrt{a_k + 2} - \sqrt{a_{k+1} + 2} \\ &= \frac{a_k - a_{k+1}}{\sqrt{a_k + 2} + \sqrt{a_{k+1} + 2}} > 0 \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成立する．

(3) $a_1 = 100,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ より

$$\begin{aligned} a_2 = \sqrt{102} &\quad \text{ゆえに} \quad 10 < a_2 < 11 \\ \sqrt{12} < a_3 < \sqrt{13} &\quad \text{ゆえに} \quad 3 < a_3 < 4 \\ \sqrt{5} < a_4 < \sqrt{6} &\quad \text{ゆえに} \quad 2 < a_4 < 3 \end{aligned}$$

さらに，(2) の結論から，$n \geqq 5$ のとき　$a_n < a_4 < 3$

よって，$a_n > 3$ となる最大の自然数 n は　　$\boldsymbol{n = 3}$

(4) $a_n > 2$ および (A) を利用すると

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} < \frac{1}{4}(a_n - 2)$$

したがって　　$0 < a_{n+1} - 2 < \dfrac{1}{4}(a_n - 2)$

$$0 < a_n - 2 < (a_1 - 2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

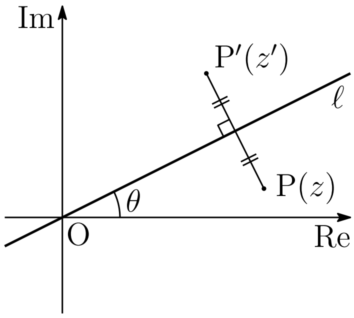
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1 - 2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

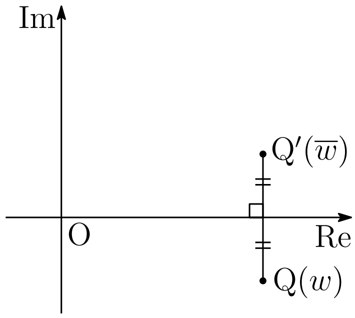
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $w = \dfrac{3+i}{|3+i|}z = \dfrac{3+i}{\sqrt{10}}z$

(2) 複素数平面上において，原点 O を通る直線を ℓ の偏角を θ とする．点 $\mathrm{P}(z)$ を ℓ に関して対称移動した点を $\mathrm{P}'(z')$ とし，2 点 P, P′ を O を中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ Q, Q′ とする．このとき，$\mathrm{Q}(w)$ とすると，Q′ は実軸に関して Q と対称であるから，$\mathrm{Q}'(\overline{w})$ である．P′ は Q′ を O を中心に θ だけ回転させたものである．以上から

$$w = z\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}, \quad \overline{w} = \overline{z}(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$z' = \overline{w}(\cos\theta + i\sin\theta) = \overline{z}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$





また，ℓ の傾きが m であるとき，$m = \tan\theta$ とおくと

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2m}{1+m^2}$$

したがって，次式が成立する．

$$z' = \frac{\overline{z}\{(1-m^2) + 2mi\}}{1+m^2}$$

直線 ℓ の傾きは $\dfrac{1}{3}$ であるから，$m = \dfrac{1}{3}$ を上式に代入すると

$$\boldsymbol{z' = \frac{\overline{z}(4+3i)}{5}}$$

(3) ℓ に関して点 A$(1+i)$ と対称な点を A$'(\alpha)$ とすると，(2) の結果を利用して

$$\alpha = \frac{(\overline{1+i})(4+3i)}{5} = \frac{(1-i)(4+3i)}{5} = \frac{7-i}{5}$$

AP + BP の最小値は，A$'\left(\dfrac{7-i}{5}\right)$，B$(2+i)$ の間の距離

$$\mathrm{A'B} = \left|2+i-\frac{7-i}{5}\right| = \frac{3}{5}|1+2i| = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

直線 A$'$B 上の点は，媒介変数 t を用いて

$$(1-t)\cdot\frac{7-i}{5} + t(1+i) = \frac{3t+7}{5} + \frac{6t-1}{5}i$$

これと ℓ の交点が P であるから

$$3\cdot\frac{6t-1}{5} = \frac{3t+7}{5} \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2}{3} \quad \text{よって} \quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{9+3i}{5}}\right)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 1 \pm \sqrt{2}$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

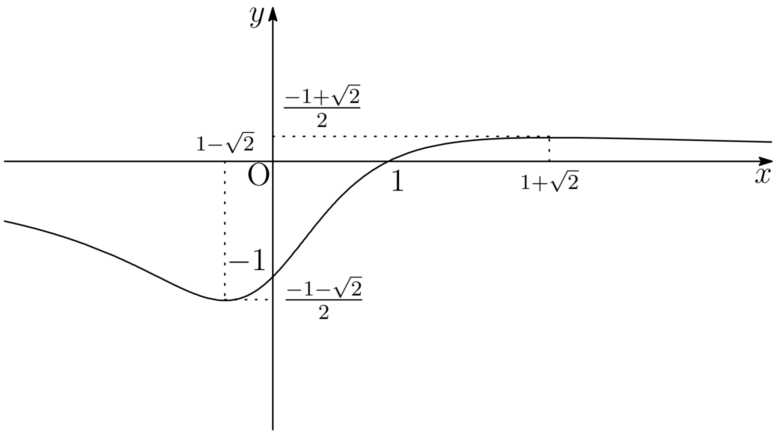
x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって　極小値 $f(-1-\sqrt{2}) = \boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}}$

極大値 $f(1+\sqrt{2}) = \boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}$

(2) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2+1} = 0$$

漸近線は x 軸でグラフの概形は，次のようになる．



(3) $0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \leqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$S = -\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ について，$x = \tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

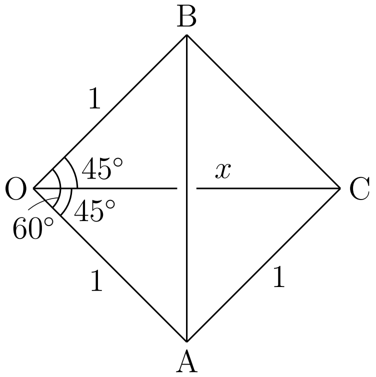
また $$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ \log(x^2+1)\ \Big]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$$

よって　$S = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $x = \mathrm{OC}$ とし，$\triangle\mathrm{OAC}$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cos 45^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x(x-\sqrt{2}) = 0$$

$x > 0$ であるから　　$\mathbf{OC} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$



(2) (1) の結果から　$\mathrm{BC} = 1$，　$\triangle\mathrm{OAB}$ は正三角形であるから　$\mathrm{AB} = 1$
A から平面 OBC に垂線 AM を引くと，$\triangle\mathrm{AMO} \equiv \triangle\mathrm{AMB} \equiv \triangle\mathrm{AMC}$ であるから，$\mathrm{OM} = \mathrm{BM} = \mathrm{CM}$．すなわち，M は $\triangle\mathrm{OBC}$ の外心である．$\angle\mathrm{OBC} = 90^\circ$ より，M は OC の中点であるから

$$\mathrm{OM} = \mathrm{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$ であるから，四面体 OABC の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，点 C から平面 OAB に下した垂線の長さを h とすると，$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot h = V$ より

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}h = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{h = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

(3) 四面体 OABC の体積 V は (2) の結果から　$\boldsymbol{V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}}$
四面体の側面積を S，内接球の半径を r とすると

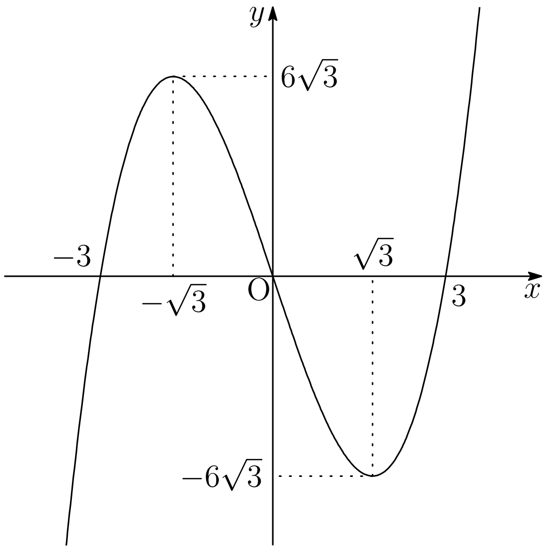
$$S = 2(\triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OAB}) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}Sr \text{ より} \quad r = \frac{3V}{S} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{2}{2+\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = x^3 - 9x$ より　$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}$	$\nearrow$

よって　極大値 $f(-\sqrt{3}) = \mathbf{6\sqrt{3}}$　極小値 $f(\sqrt{3}) = \mathbf{-6\sqrt{3}}$



(2) $f(t+3)-f(t)=(t+3)^3-9(t+3)-(t^3-9t)$

$\qquad\qquad\qquad\quad =9t^2+27t=9t(t+3)$

(i) $t \leqq -\sqrt{3} \leqq t+3$，すなわち，$-3-\sqrt{3} \leqq t \leqq -\sqrt{3}$ のとき

$f(-\sqrt{3})=f(2\sqrt{3})$, $t+3<2\sqrt{3}$ であるから

$$M(t)=f(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$$

(ii) $t \leqq -3-\sqrt{3}$ のとき，$f(t+3)>f(t)$ より　$M(t)=f(t+3)$

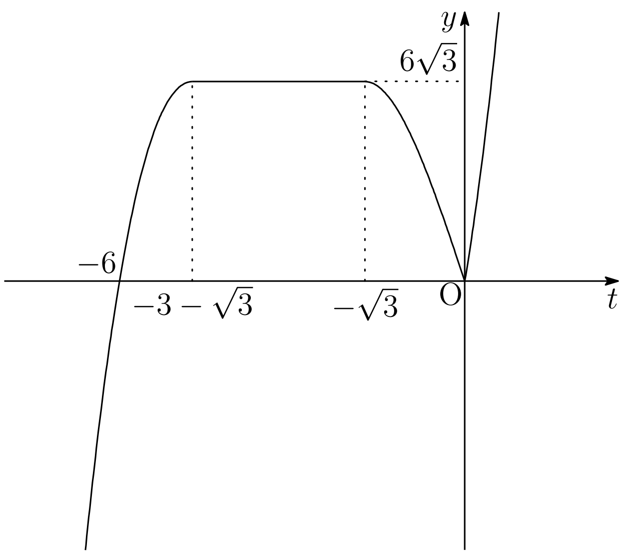
(iii) $-\sqrt{3} \leqq t \leqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(t+3)$ より　$M(t)=f(t)$

(iv) $0 \leqq t$ のとき，$f(t+3) \geqq f(t)$ より　$M(t)=f(t+3)$

(i)〜(iv) より

$$\boldsymbol{M(t)=\begin{cases} t^3+9t^2+18t & (t \leqq -3\sqrt{3},\ 0 \leqq t) \\ 6\sqrt{3} & (-3-\sqrt{3} \leqq t \leqq -\sqrt{3}) \\ t^3-9t & (-\sqrt{3} \leqq t \leqq 0) \end{cases}}$$

$y=M(t)$ のグラフの概形は，次のようになる．



(3) (2) で示したグラフの概形から，求める面積を S とすると

$$S=\{-\sqrt{3}-(-3-\sqrt{3})\}\cdot 6\sqrt{3}+\int_{-6}^{-3-\sqrt{3}} f(t+3)\,dt+\int_{-\sqrt{3}}^{0} f(t)\,dt$$

$$=18\sqrt{3}+\int_{-3}^{-\sqrt{3}} f(t)\,dt+\int_{-\sqrt{3}}^{0} f(t)\,dt$$

$$=18\sqrt{3}+\int_{-3}^{0} f(t)\,dt=18\sqrt{3}+\int_{-3}^{0}(t^3-9t)\,dt$$

$$=18\sqrt{3}+\left[\frac{t^4}{4}-\frac{9}{2}t^2\right]_{-3}^{0}=\boldsymbol{18\sqrt{3}+\frac{81}{4}}$$