令和６年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　令和６年２月２５日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ (2)(3) $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面上に $\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$ を満たす $\triangle\mathrm{OAB}$ がある．頂点 B から直線 OA に下ろした垂線を BC とする．また，頂点 O から直線 AB に下ろした垂線を OD とする．このとき，点 C は辺 OA を $1:3$ に内分しているとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) 実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表すとき，s と t の値を求めよ．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ の値を求めよ．

(3) 直線 BC と直線 OD の交点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とし，1 個のさいころを投げて出た目によって次の通りに動くものとする．

出た目が奇数のとき，x 軸の正の向きに 1 だけ動く

出た目が 2 または 4 のとき，x 軸の負の向きに 1 だけ動く

出た目が 6 のとき，y 軸の正の向きに 1 だけ動く

n を 2 以上の自然数とするとき，次の問に答えよ．

(1) さいころを n 回投げるとき，点 P の座標が $(1,\ n-1)$ となる場合は何通りあるか．

(2) さいころを n 回投げるとき，点 P の座標が $(0,\ n-2)$ となる場合は何通りあるか．

(3) さいころを n 回投げるとき，点 P の座標が 0 以上，かつ y 座標が $n-2$ 以上となる場合は何通りあるか．

$\boxed{3}$ k を定数とする．曲線 $y=e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y=kx$ が 1 点 P で接しているとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y=e^{\sqrt{x}}$ の凹凸，変曲点を調べ，その概形をかけ．

(2) 定数 k の値と点 P の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y=e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y=kx$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ 複素数平面上に $|\alpha|=2$ を満たす点 A(α) がある．方程式

$$|z-1|=\sqrt{2} \quad \cdots ①$$
$$|z-\alpha|=\sqrt{5} \quad \cdots ②$$

について，次の問に答えよ．

(1) 複素数平面上で方程式 ① を満たす点 z の全体が表す図形を描け．また，方程式 ① および ② を満たす複素数 z の個数が 2 個であることを示せ．

(2) 方程式 ① および ② を満たす複素数 z について

$$\overline{z}(\alpha-1)+z(\overline{\alpha}-1)=0$$

が成り立つことを示せ．

(3) 方程式 ① および ② を満たす異なる 2 つの複素数を β，γ とする．2 点 B(β)，C(γ) と原点 O が一直線上にあることを示せ．また，$|\beta|=b$ とおくとき，$|\gamma|$ を b を用いて表せ．

5 t は $0<t<1$ を満たすとする．

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2tx+1,\quad g(x)=-\frac{1}{2}x^2-(t-2)x-2t+1$$

とおく．次の問に答えよ．

(1) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標をすべて求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ および直線 $x=2t$ で囲まれた 2 つの図形のうち，左側の図形の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，(2) の $S(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

6 $f(x)=4x^3-3x$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，方程式 $f(x)=a$ が異なる実数解を 3 個もつための，定数 a についての条件を求めよ．

(2) $\cos 3\theta=f(\cos\theta)$ を示せ．

(3) 方程式 $f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の実数解をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{OC}=1,\ \mathrm{OB}=\sqrt{2},\ \angle\mathrm{OCB}=90^\circ$ であるから　$\mathrm{BC}=1$

O を座標平面上の原点とし，A$(4,\ 0)$，B$(1,\ 1)$，C$(1,\ 0)$ とすると

$$\vec{a}=(4,\ 0),\ \vec{b}=(1,\ 1)\quad \text{よって}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{4}$$

(2) 直線 AB の方程式は

$$y=\frac{0-1}{4-1}(x-4)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

直線 AB に垂直な直線 OD の方程式は　$y=3x$

2 直線 AB，OD の交点 D の座標は　$\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$

$(1,\ 0)=\dfrac{1}{4}\vec{a},\ (0,\ 1)=-\dfrac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$ であるから

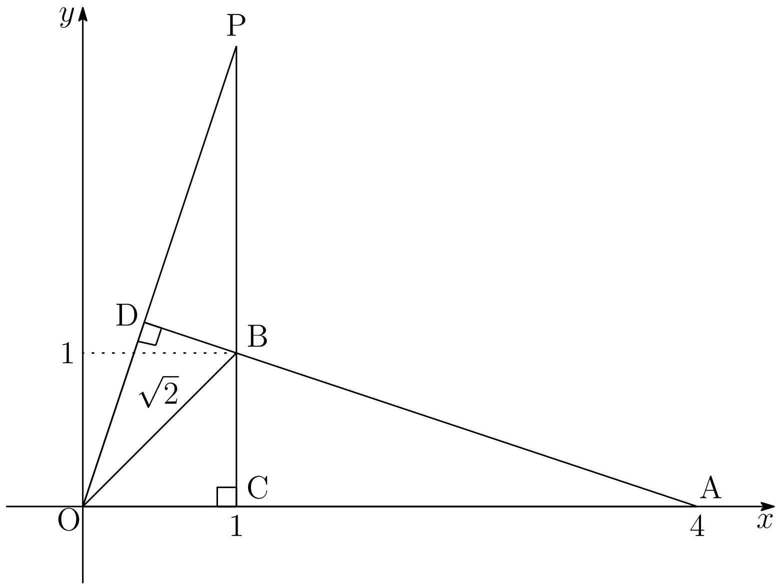
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{6}{5}\vec{b}$$

よって　$\boldsymbol{s=-\dfrac{1}{5},\ t=\dfrac{6}{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{5}(1,\ 3)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\dfrac{2}{5}\sqrt{1^2+3^2}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{10}}{5}}$

(3) 点 P の x 座標が 1 であり，P は直線 $y=3x$ 上の点であるから　P$(1,\ 3)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{1^2+3^2}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$



2 (1) n 回投げて点 P の座標が $(1,\ n-1)$，すなわち，n 回投げて奇数が 1 回，6 の目が $n-1$ 回出る場合の総数であるから

$$\frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot 3\cdot 1^{n-1} = \boldsymbol{3n} \quad (\text{通り})$$

(2) n 回投げて点 P の座標が $(0,\ n-2)$，すなわち，n 回投げて奇数が 1 回，2 または 4 が 1 回，6 の目が $n-2$ 回出る場合の総数であるから

$$\frac{n!}{1!1!(n-2)!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1^{n-2} = \boldsymbol{6n(n-1)} \quad (\text{通り})$$

(3) (i) n 回投げて点 P の座標が $(2,\ n-2)$，すなわち，n 回投げて奇数が 2 回，6 の目が $n-2$ 回出る場合の総数は

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot 3^2\cdot 1^{n-2} = \frac{9}{2}n(n-1)$$

(ii) n 回投げて点 P の座標が $(0,\ n)$，すなわち，n 回投げて 6 の目が n 回出る場合の総数は

$$1 \quad (\text{通り})$$

求める場合の総数は，(1)，(2) および (i)，(ii) の場合であるから

$$3n + 6n(n-1) + \frac{9}{2}n(n-1) + 1 = \boldsymbol{\frac{21}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 1} \quad (\text{通り})$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=e^{\sqrt{x}}$ より

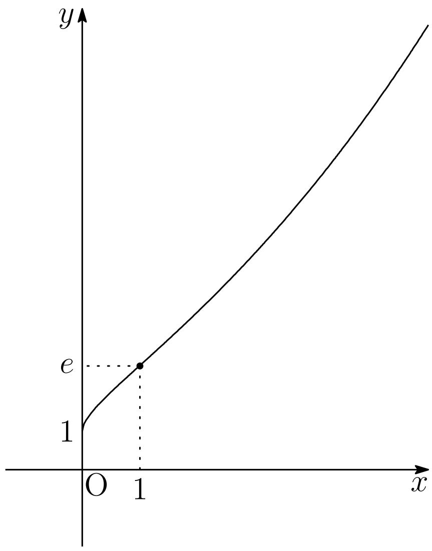
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}},$$
$$y''=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$$

したがって，y の増減および凹凸は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$+$	$+$	$+$
y''		$-$	0	$+$
y	1	↗	e	↗

$$\lim_{x\to\infty}y=\infty$$

$y=e^{\sqrt{x}}$ のグラフの概形は，次のようになる．変曲点は $\boldsymbol{(1,\ e)}$



(2) $y=e^{\sqrt{x}}$ 上の点 $(t,\ e^{\sqrt{t}})$ における接線の方程式は

$$y-e^{\sqrt{t}}=\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(x-t)\quad\text{すなわち}\quad y=\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}x+\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)e^{\sqrt{t}}$$

これが原点 O を通るから

$$1-\frac{\sqrt{t}}{2}=0\quad\text{これを解いて}\quad t=4$$

よって　$k=\dfrac{e^{\sqrt{4}}}{2\sqrt{4}}=\boldsymbol{\dfrac{e^2}{4}}$，$\mathrm{P}\boldsymbol{(4,\ e^2)}$

(3) 求める面積を S とすると，下の図から

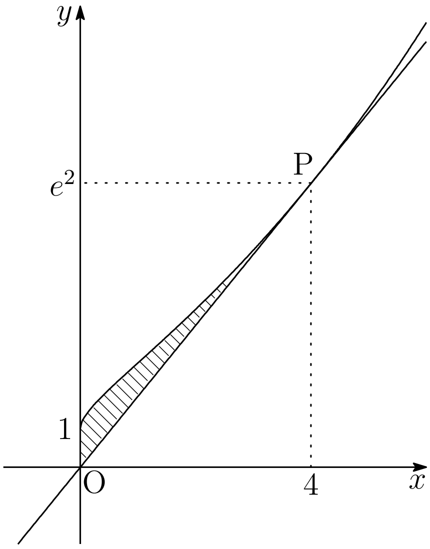
$$S = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot e^2$$

$u = \sqrt{x}$ とおくと，$x = u^2$ より $\dfrac{dx}{du} = 2u$

x	$0 \longrightarrow 4$
u	$0 \longrightarrow 2$

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 e^u\cdot 2u\,du = \Big[\,e^u(2u-2)\,\Big]_0^2 = 2e^2 + 2$$

よって　　$S = (2e^2+2) - 2e^2 = \mathbf{2}$



補足 次の積分公式 (第 1 式) を利用している[1].

$$\int e^x f(x)\,dx = e^x\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\} + C$$
$$\int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2023.pdf (p.10 の解説を参照)

$\boxed{4}$ (1) $|\alpha| = 2$，$|z-1| = \sqrt{2} \cdots$ ①，$|z-\alpha| = \sqrt{5} \cdots$ ②

2 円 ①，② の中心間の距離 $|\alpha - 1|$ は

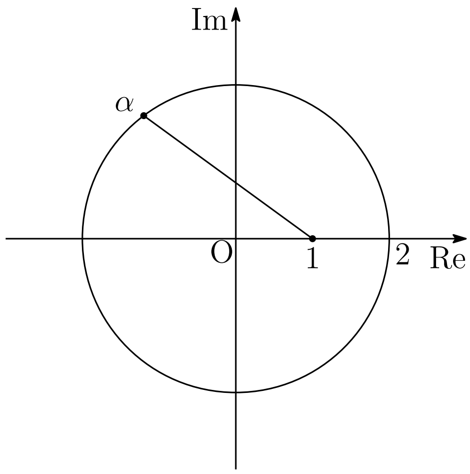
$$|\alpha| - 1 \leqq |\alpha - 1| \leqq |\alpha| + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq |\alpha - 1| \leqq 3 \quad \cdots ③$$

$|z-\alpha| - |z-1| < |\alpha - 1| < |z-\alpha| + |z-1|$，すなわち，次式を示せばよい．

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < |\alpha - 1| < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$\sqrt{5} - \sqrt{2} < 1,\ 3 < \sqrt{5} + \sqrt{2}$ であるから，③ より上式が成立する．2 円 ①，② の共有点の個数は 2 個であるから，① および ② を満たす点 z の個数は 2 個である．

補足 $1 \leqq |\alpha - 1| \leqq 3$ は下の図からも分かる．



(2) ①，② より ($|\alpha| = 2$) $\quad |z-1|^2 = 2,\ \ |z-\alpha|^2 = 5$

$$z\overline{z} - \overline{z} - z - 1 = 0, \quad z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z - 1 = 0$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々の差をとると

$$\overline{z}(\alpha - 1) + z(\overline{\alpha} - 1) = 0$$

(3) ①，② および $|\alpha| = 2$ から，$z \neq 0,\ \overline{\alpha} - 1 \neq 0$ に注意すると，(2) の結果から，$z(\overline{\alpha} - 1)$ は純虚数であるから，実数 s，t を用いて $(s \neq 0,\ t \neq 0)$

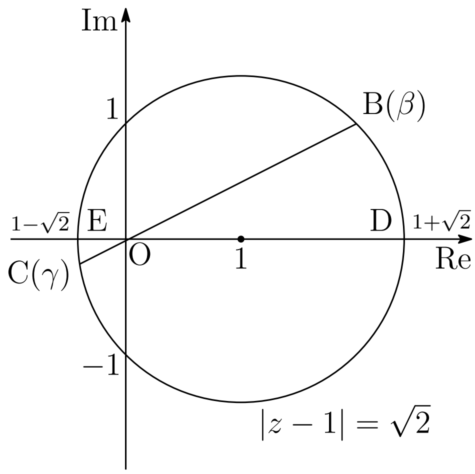
$$\beta(\overline{\alpha} - 1) = si, \quad \gamma(\overline{\alpha} - 1) = ti \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \frac{t}{s}\beta$$

よって，2 点 B(β)，C(γ) と原点 O は一直線上にある．

円 ① 上の 2 点を D$(1 + \sqrt{2})$，E$(1 - \sqrt{2})$ とすると，方べきの定理により

$$\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC} = \mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE} \quad \text{ゆえに} \quad |\beta||\gamma| = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$$

$|\beta| = b$ より　$b|\gamma| = 1$　よって　$\boldsymbol{|\gamma| = \dfrac{1}{b}}$



■

5 (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2tx+1$，$g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-(t-2)x-2t+1$
$f(x)-g(x)=0$ とし，整理すると

$$x^2-(t+2)x+2t=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-t)(x-2)=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{x=t,\ 2}$

(2) (1) の計算より，$g(x)-f(x)=-(x-t)(x-2)$ であるから

$$\begin{aligned}
S(t)&=-\int_t^{2t}(x-t)(x-2)\,dx\\
&=-\int_t^{2t}(x-t)\{(x-2t)+2(t-1)\}\,dx\\
&=-\int_t^{2t}(x-t)(x-2t)\,dt-(t-1)\Big[\,(x-t)^2\,\Big]_t^{2t}\\
&=\frac{1}{6}t^3-(t-1)\cdot t^2=\boldsymbol{-\frac{5}{6}t^3+t^2}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S'(t)=-\dfrac{5}{2}t^2+2t=-\dfrac{5}{2}t\left(t-\dfrac{4}{5}\right)$
$0<t<1$ における $S(t)$ の増減は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

したがって　極大値 $S\left(\dfrac{4}{5}\right)=\boldsymbol{\dfrac{16}{75}}$ ■

$\boxed{6}$ (1) $f(x)=4x^3-3x$ より　$f'(x)=12x^2-3=12\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって　極大値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{1}$，極小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$

$f(x)=a$ の解は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の x 座標であるから，上の増減表から，$f(x)=a$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は

$$\boldsymbol{-1<a<1}$$

(2) 加法定理により

$$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$$
$$\cos\theta=\cos(2\theta-\theta)=\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta$$

上の 2 式の辺々を加えると，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ より

$$\cos 3\theta+\cos\theta=2\cos 2\theta\cos\theta=2(2\cos^2\theta-1)\cos\theta$$

$\cos 3\theta$ について解くと

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta \quad よって \quad \cos 3\theta=f(\cos\theta)$$

(3) $f(-1)=-1$，$f(1)=1$ から，(1) の増減表より，$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の解は，$-1<x<1$ に存在する．$x=\cos\theta$ とおくと $(0<\theta<\pi)$，(2) の結果から

$$\cos 3\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0<3\theta<3\pi$ であるから

$$3\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi \quad すなわち \quad \theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

求める解は　$x=\cos\dfrac{\pi}{4},\ \cos\dfrac{5}{12}\pi,\ \cos\dfrac{11}{12}\pi$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ ■