令和５年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　令和 5 年 3 月 12 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (120 分)

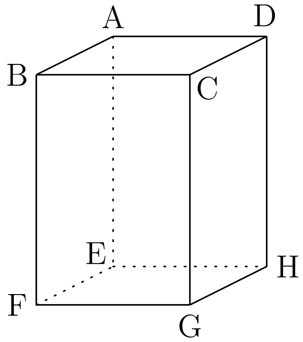
$\boxed{1}$ $0 < a < 1$ とし，座標平面上の 2 点 A$(a,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ を直径の両端とする円を C とする．円 C 上の点 P における接線は原点 O を通り，かつ P の y 座標は正であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C の方程式を求めよ．

(2) 点 P の座標を a を用いて表せ．

(3) 点 P の y 座標が最大となるような a の値を求めよ．

$\boxed{2}$ $0 < a < 2$ とする．$\mathrm{AB} = \sqrt{2-a}$，$\mathrm{AD} = \sqrt{a}$，$\mathrm{AE} = 2$ である直方体 ABCD-EFGH について，$\angle\mathrm{AFC}$ を θ とおく．次の問に答えよ．



(1) $\cos\theta$ を a を用いて表せ．

(2) $a = 1$ のとき，$\triangle\mathrm{AFC}$ の面積 S の値を求めよ．

(3) $a = 1$ のとき，$\triangle\mathrm{AFC}$ の内接円の半径 r と外接円の半径 R の値をそれぞれ求めよ．

(4) $\tan\theta$ を a を用いて表せ．また，$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$ のとき，$\tan\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\dfrac{i}{2}$ と異なる複素数 z に対して，複素数 w を

$$w = \frac{z-2i}{1+2iz}$$

で定める．複素数 z および w の共役複素数をそれぞれ $\overline{z}$, $\overline{w}$ で表すとき，次の問に答えよ．

(1) $z=1$ のとき，w の実部と虚部をそれぞれ求めよ．

(2) z を w で表せ．また，$\overline{z}$ を $\overline{w}$ で表せ．

(3) 複素数平面上で点 z が $|z|=1$ を満たしながら動くとき，点 w はどんな図形をえがくか．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 3 つの関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad g(x) = e^{-x}, \quad h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $f(x)=g(x)$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $h(x)$ を x の式で表せ．また，関数 $h(x)$ の極値を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0<a<1$ とし，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ を直径の両端とする円を C とする．円 C 上の点 P における接線は原点 O を通り，かつ P の y 座標は正であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C の方程式を求めよ．

(2) 点 P の座標を a を用いて表せ．

(3) $\angle\mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{3}$ となる a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 曲線 $C : y = x^3 - x^2$ について，次の問に答えよ．

(1) $t \neq \dfrac{1}{3}$ とする．曲線 C の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3 - t^2)$ における接線を ℓ とするとき，直線 ℓ の方程式を求めよ．また，曲線 C と直線 ℓ の共有点のうち P と異なる点の x 座標を u とおくとき，u を t を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は次の (i)，(ii) を満たしているとする．

(i) $a_1 = 1$

(ii) 曲線 C の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ {a_n}^3 - {a_n}^2)$ における接線を ℓ_n とするとき，曲線 C と直線 ℓ_n の共有点のうち P_n と異なる点の x 座標が a_{n+1} である．

このとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ．さらに，一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ a，b，c は実数とし，$x^3 + ax^2 + bx + c$ を $f(x)$ とおく．関数 $f(x)$ は $x = 2$ で極値をとり，整式 $f(x)$ は $f(1 - i) = 0$ を満たすとする．ただし，i は虚数単位とする．次の問に答えよ．

(1) a，b，c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 |f'(x)|\, dx$ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A$(a,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ の中点を M とすると

$$\mathrm{M}\left(\frac{a+1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{MA}=\frac{a-1}{2}$$

したがって，C は中心 $\left(\frac{a+1}{2},\ 0\right)$，半径 $\frac{a-1}{2}$ の円であるから

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}$$

(2) 原点 O を極とする C の極線は $(0<a<1)$

$$\left(0-\frac{a+1}{2}\right)\left(x-\frac{a+1}{2}\right)+0y=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

すなわち　$x-\frac{a+1}{2}=-\frac{2}{a+1}\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \quad \cdots①$

① を (1) の結果に代入すると

$$\left(\frac{2}{a+1}\right)^2\left(\frac{a-1}{2}\right)^4+y^2=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \quad ゆえに \quad y^2=a\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$

P は C と極線 ① との交点で，y 座標が正である点であるから $(0<a<1)$

$$y=\frac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}$$

① から　$x=\frac{a+1}{2}-\frac{2}{a+1}\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\frac{2a}{a+1}$

よって，点 P の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{2a}{a+1},\ \frac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}\right)}$

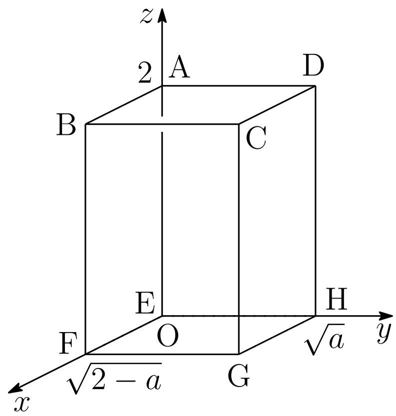
(3) $f(a)=\frac{(1-a)\sqrt{a}}{a+1}=\frac{a-a\sqrt{a}}{a+1}$ とおくと　$f'(a)=-\frac{a^2+4a-1}{2\sqrt{a}(a+1)^2}$

$a^2+4a-1=0,\ 0<a<1$ を解くと　$a=\sqrt{5}-2$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{5}-2$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める a の値は　$\boldsymbol{a=\sqrt{5}-2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 右の図のように，直方体 ABCD-EFGH を座標空間にとると



$$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = (-\sqrt{2-a},\ 0,\ 2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = (0,\ \sqrt{a},\ 2)$$

したがって

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{FA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{FA}}||\overrightarrow{\mathrm{FC}}|} = \frac{4}{\sqrt{6-a}\sqrt{a+4}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{(6-a)(a+4)}}}$$

(2) $a=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = (-1,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = (0,\ 1,\ 2)$ より

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{FA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{FC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{FA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot5-4^2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(3) $a=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 0)$，$S = \dfrac{1}{2}r(|\overrightarrow{\mathrm{FA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{FC}}| + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|)$ より

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{6}}$$

(1) の結果から，$a=1$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ より　$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$

正弦定理により　$2R = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{3}{5}}$　よって　$\boldsymbol{R = \dfrac{5\sqrt{2}}{6}}$

(4) (1) の結果から　$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{(6-a)(a+4)}{4}$

$$\tan^2\theta = \frac{(6-a)(a+4)}{4} - 1 = \frac{1}{16}(-a^2+2a+8) = \frac{1}{16}\{-(a-1)^2+9\}$$

$\cos\theta > 0$ より，$\tan\theta > 0$ であるから　$\boldsymbol{\tan\theta = \dfrac{1}{4}\sqrt{-(a-1)^2+9}}$

$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$ のとき，$\tan\theta$ は $a=1$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{35}}{8}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{35}}{8} \leqq \tan\theta \leqq \dfrac{3}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z=1$ のとき　$w=\dfrac{1-2i}{1+2i}=\dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

よって，w の実部 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{5}}$，$w$ の虚部 $\boldsymbol{-\dfrac{4}{5}}$

(2) $w=\dfrac{z-2i}{1+2iz}$ より　$(1-2iw)z=w+2i$

$1-2iw=0$，すなわち，$w=-\dfrac{i}{2}$ は上の第 2 式を満たさないから

$$\boldsymbol{z=\frac{w+2i}{1-2iw}} \quad \text{これから} \quad \boldsymbol{\overline{z}=\frac{\overline{w}-2i}{1+2i\overline{w}}}$$

(3) $z\overline{z}=|z|^2=1$ であるから，(2) の結果をこれに代入すると

$$\frac{w+2i}{1-2iw}\cdot\frac{\overline{w}-2i}{1+2i\overline{w}}=1 \quad \text{整理すると} \quad |w|^2=1$$

$w\neq-\dfrac{i}{2}$ に注意して　$|w|=1$

よって，点 w は，原点を中心とする半径 1 の円をえがく．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=g(x)$ より　$2e^{-2x}=e^{-x}$

$$2=e^x \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=\log 2}$$

(2) $h(x)=\displaystyle\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$ より

$$\begin{aligned} h(x)&=\int_0^x 2e^{-2(x-t)}\cdot e^{-t}\,dt=2e^{-2x}\Big[\ e^t\ \Big]_0^x \\ &=2e^{-2x}(e^x-1)=\boldsymbol{2(e^{-x}-e^{-2x})} \\ h'(x)&=2(-e^{-x}+2e^{-2x})=2e^{-2x}(2-e^x) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

極大値 $f(\log 2)=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}2(e^{-x}-e^{-2x})=\mathbf{0}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}2e^{-x}(1-e^{-x})=\boldsymbol{-\infty}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{1}$ (1) を参照.

(2) $\boxed{1}$ (2) を参照.

(3) $\angle\mathrm{AOP} = \dfrac{\pi}{3}$ より，(2) の結果から

$$\frac{\sqrt{a}(1-a)}{a+1} \Big/ \frac{2a}{a+1} = \tan\frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sqrt{a}(1-a)}{2a} = \sqrt{3}$$

したがって　$1 - a = 2\sqrt{3a}$　ゆえに　$a^2 - 14a + 1 = 0$

$0 < a < 1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a = 7 - 4\sqrt{3}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y = x^3 - x^2$ より　$y' = 3x^2 - 2x$

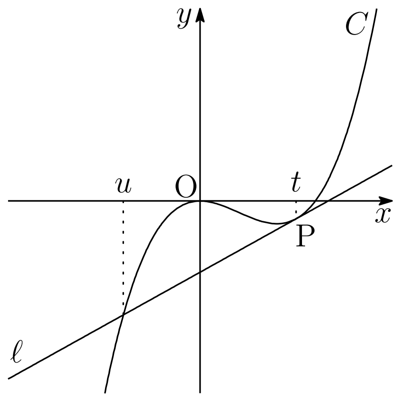
ℓ の方程式は　$y - (t^3 - t^2) = (3t^2 - 2t)(x - t)$

よって　$\boldsymbol{y = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2}$

C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^3 - x^2 = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2$$

ゆえに　$(x - t)^2(x + 2t - 1) = 0$　よって　$\boldsymbol{u = -2t + 1}$



(2) (1) の結果から　$a_{n+1} = -2a_n + 1$

これから　$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -2\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$，公比 -2 の等比数列で

$$a_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}\{1 - (-2)^n\}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 実数を係数とする 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f(1-i)=0$ を満たすから，$f(x)$ は因数

$$(x-1+i)(x-1+i)=x^2-2x+2$$

をもつ．このとき，$f(x)$ の 3 次の係数および定数項に注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-2x+2)\left(x+\frac{c}{2}\right) \\ &= x^3+\left(\frac{c}{2}-2\right)x^2+(-c+2)x+c \\ f'(x) &= 3x^2+(c-4)x-c+2 \end{aligned}$$

$f'(2)=0$ より　$12+(c-4)\cdot 2-c+2=0$　ゆえに　$\boldsymbol{c=-6}$

したがって　$f(x)=x^3-5x^2+8x-6$　よって　$\boldsymbol{a=-5,\ b=8}$

(2) $f'(x)=3x^2-10x+8=(x-2)(3x-4)$ であるから

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　極大値 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{50}{27}}$，極小値 $f(2)=\boldsymbol{-2}$

(3) $f'(x)=(x-2)(3x-4)$ より

$$\begin{aligned} \int_1^2 |f'(x)|\,dx &= \int_1^{\frac{4}{3}} f'(x)\,dx-\int_{\frac{4}{3}}^2 f'(x)\,dx \\ &= \Big[\ f(x)\ \Big]_1^{\frac{4}{3}}-\Big[\ f(x)\ \Big]_{\frac{4}{3}}^2 \\ &= 2f\left(\frac{4}{2}\right)-f(1)-f(2) \\ &= 2\cdot\left(-\frac{50}{27}\right)-(-2)-(-2)=\boldsymbol{\frac{8}{27}} \end{aligned}$$