令和５年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　令和５年２月25日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ (2)(3) $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく．これらは

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

および

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{1}{2}$$

を満たすとする．頂点 O から $\triangle$ABC を含む平面に垂線を引き，交点を H とする．次の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 実数 s, t により $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表されるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(3) (2) の s, t の値をそれぞれ求めよ．

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 0 から 3 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとへもどす．これを n 回くり返したとき，取り出されたカードの数字の総和を S_n で表す．S_n が 3 で割り切れる確率を p_n とし，S_n を 3 で割ると 1 余る確率を q_n とするとき，次の問に答えよ．

(1) p_2 および q_2 の値を求めよ．

(2) p_{n+1} および q_{n+1} を p_n，q_n を用いて表せ．

(3) p_n および q_n を n を用いて表せ．また，極限値 $\lim_{n\to\infty} p_n$ および $\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

3 a，b，c，d は実数とし，$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ を $f(x)$ とおく．4 次方程式 $f(x)=0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}$，$-\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 α，β を持つとする．次の問に答えよ．

(1) 整式 $f(x)$ は x^2-6 で割り切れることを示せ．

(2) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，c，d を a，b を用いて表せ．

(3) 複素数平面上において $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

(4) (3) において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ．

4 次の問に答えよ．

(1) 等式 $(\tan\theta)' = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(2) 等式

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$$

を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

5 $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とし，$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ を $f(x)$ とおく．4 次方程式 $f(x)=0$ が 2 つの実数解 $\sqrt{6}$，$-\sqrt{6}$ および 2 つの虚数解 $\alpha,\ \beta$ を持つとする．次の問に答えよ．

(1) $\alpha+\beta,\ \alpha\beta,\ c,\ d$ を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2) 複素数平面上において $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{6})$ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) において，さらに点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{D}(\sqrt{6})$ が正三角形の 3 つの頂点となるとき，b の値を求めよ．

6 次の問に答えよ．

(1) 等式 $(\tan\theta)'=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(2) 等式

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$$

を示せ．また，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$ の値を求めよ．

7 $a>0$，$b>0$ とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2a,\ a)$，$\mathrm{B}(b,\ 2b)$ を頂点とする三角形の重心は直線 $y=-2x+4$ 上にあるとする．$\angle\mathrm{AOB}$ を θ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 OA と x 軸のなす鋭角を α，直線 OB と x 軸のなす鋭角を β とおく．$\sin\alpha$，$\sin\beta$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\sin\theta$ の値を求めよ．

(3) b を a を用いて表せ．また，a のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) a が (3) で求めた範囲を動くとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 関数 $f(x)$ を $f(x)=x|x-7|$ で定める．曲線 $y=f(x)$ の点 $\mathrm{P}(3,\ f(3))$ における接線を ℓ とする．次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ の共有点のうち，点 P と異なる点の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 0 から 3 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを取り出し，数字を確認してからもとへもどす．これを n 回くり返したとき，取り出されたカードの数字の総和を S_n で表す．S_n が 3 で割り切れる確率を p_n とし，S_n を 3 で割ると 1 余る確率を q_n とするとき，次の問に答えよ．

(1) p_2 および q_2 の値を求めよ．

(2) p_{n+1} および q_{n+1} を $p_n,\ q_n$ を用いて表せ．

(3) p_n および q_n を n を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2^2-2\cdot0+2^2=\mathbf{8}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=(\sqrt{3})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}+2^2=\mathbf{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}-0-\dfrac{1}{2}+2^2=\mathbf{4}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\boldsymbol{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}}\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad -\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

また　$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=-0+2^2=4$

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=-\dfrac{1}{2}+2^2=\dfrac{7}{2}$

上の諸式と (1) の結果から　$8s+4t=4,\quad 4s+6t=\dfrac{7}{2}$

これを解いて　$\boldsymbol{s=\dfrac{5}{16},\ t=\dfrac{3}{8}}$

(4) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{8\cdot6-4^2}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=|\vec{a}|^2-s(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})-t(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})\\&=2^2-\frac{5}{16}\cdot4-\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{2}=\frac{23}{16}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{\sqrt{23}}{4}$ より，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{46}}{6}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) S_n を3で割ると2余る確率を r_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{4},\ q_1 = \frac{1}{4},\ r_1 = \frac{1}{4} \\ p_{n+1} &= \frac{2}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ q_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{2}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{2}{4}r_n \end{aligned}$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ に注意すると

$$(*) \begin{cases} p_{n+1} + q_{n+1} = \dfrac{1}{4}(p_n + q_n) + \dfrac{1}{2} \\ p_{n+1} - q_{n+1} = \dfrac{1}{4}(p_n - q_n) \end{cases}$$

$(*)$ の第1式から $\quad p_{n+1} + q_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}\left(p_n + q_n - \dfrac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned} p_n + q_n - \frac{2}{3} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(p_1 + q_1 - \frac{2}{3}\right) \\ p_n + q_n &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$(*)$ の第2式から $\quad p_n - q_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(p_1 - q_1) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \quad \cdots ②$

①，② から $\quad p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n, \quad q_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \qquad (**)$

よって $\quad p_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \mathbf{\dfrac{3}{8}},\ q_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \mathbf{\dfrac{5}{16}}$

(2) $(*)$ より $\quad \boldsymbol{p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{4}, \quad q_{n+1} = \dfrac{1}{4}q_n + \dfrac{1}{4}}$

(3) $(**)$ より $\quad \boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n, \quad q_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$

よって $\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = \dfrac{1}{3}}$ ■

3 (1) $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ は，4次方程式 $f(x)=0$ の解であるから，因数定理により，$f(x)$ は $x-\sqrt{6}$, $x+\sqrt{6}$ を因数に持つ．したがって，$f(x)$ は

$$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) \quad \text{すなわち} \quad x^2-6$$

で割り切れる．

(2) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ のとき，$f(x)=0$ が $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, \alpha, \beta$ を解にもつから，因数定理および最高次の係数に注意して

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6)(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= (x^2-6)\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= x^4-(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta-6)x^2+6(\alpha+\beta)x-6\alpha\beta \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$a=-(\alpha+\beta), \quad b=\alpha\beta-6, \quad c=6(\alpha+\beta), \quad d=-6\alpha\beta$$

したがって　$\boldsymbol{\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b+6,}$
$\boldsymbol{c=-6a, \quad d=-6b-36}$

(3) (2) の結果から，α, β は，2次方程式

$$x^2+ax+b+6=0 \quad (a,\ b \text{ は実数})$$

の虚数解であることに注意して解くと

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{4(b+6)-a^2}\,i}{2} \quad \cdots ①$$

これと $-\sqrt{6}$ が同一直線上にあるから

$$-\frac{a}{2}=-\sqrt{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=2\sqrt{6}}$$

(4) (3) の結果を ① に代入すると　$x=-\sqrt{6}\pm\sqrt{b}\,i$

A$(-\sqrt{6}+\sqrt{b}\,i)$，B$(-\sqrt{6}-\sqrt{b}\,i)$，D$(\sqrt{6})$ とすると

$$\mathrm{AB}^2=4b, \quad \mathrm{AD}^2=\mathrm{BD}^2=24+b$$

△ABD が正三角形のとき　$4b=24+b$　これを解いて　$\boldsymbol{b=8}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $(\sin\theta)' = \cos\theta$，$(\cos\theta)' = -\sin\theta$ より

$$(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{(\sin\theta)'\cos\theta - \sin\theta(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathbf{1}$

(2) $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1-\sin\theta) + \cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$= \frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

したがって $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \mathbf{\frac{1}{2}\log 3}$$

(3) $$(\sin\theta\cos^n\theta)' = \cos\theta\cos^n\theta + \sin\theta\cdot n\cos^{n-1}\theta(-\sin\theta)$$
$$= (n+1)\cos^{n+1}\theta - n\cos^{n-1}\theta$$

上式より，次式が成立する (C は積分定数).

$$(n+1)\int \cos^{n+1}\theta\,d\theta - n\int \cos^{n-1}\theta\,d\theta = \sin\theta\cos^n\theta + C$$

$n = -2$ とし，(2) の結果を利用する.

$$-\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$-\frac{1}{2}\log 3 + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \frac{2}{3}$$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \mathbf{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\log 3}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{\mathbf{3}}$ (2) を参照.

(2) $\boxed{\mathbf{3}}$ (3) を参照.

(3) $\boxed{\mathbf{3}}$ (4) を参照. ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $(\sin\theta)' = \cos\theta$, $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}(\tan\theta)' = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' &= \frac{(\sin\theta)'\cos\theta - \sin\theta(\cos\theta)'}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

また $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta = \left[\,-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{1}$

(2) $\boxed{\mathbf{4}}$ (2) を参照.

(3) $\boxed{\mathbf{4}}$ (3) を参照.

■

$\boxed{7}$ (1) $\boldsymbol{\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) (1) の結果および $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ から

$$\begin{aligned}\sin\theta = \sin(\beta-\alpha) &= \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

(3) 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2a,\ a)$，B$(b,\ 2b)$ を頂点とする三角形の重心は

$$\left(\frac{2a+b}{3},\ \frac{a+2b}{3}\right)$$

これが直線 $y = -2x+4$ 上にあるから

$$\frac{a+2b}{3} = -2\cdot\frac{2a+b}{3} + 4 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -\frac{5}{4}a + 3}$$

$b > 0$ より $\qquad -\dfrac{5}{4}a + 3 > 0$

$a > 0$ に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{0 < a < \dfrac{12}{5}}$

(4) O$(0,\ 0)$，A$(2a,\ a)$，B$(b,\ 2b)$ を頂点とする三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|2a\cdot 2b - a\cdot b| = \frac{3}{2}ab$$

(3) の結果から $\quad S = \dfrac{3}{2}a\left(-\dfrac{5}{4}a+3\right) = -\dfrac{15}{8}\left(a-\dfrac{6}{5}\right)^2 + \dfrac{27}{10}$

よって，S は $a = \dfrac{6}{5}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{10}}$ をとる． ■

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=x|x-7|=\begin{cases} x(x-7) & (x \geqq 7) \\ -x(x-7) & (x \leqq 7) \end{cases}$

$x<7$ のとき，$f(x)=-x^2+7x$ より　$f'(x)=-2x+7$

$f(3)=12,\ f'(3)=1$ であるから，接線 ℓ の方程式は

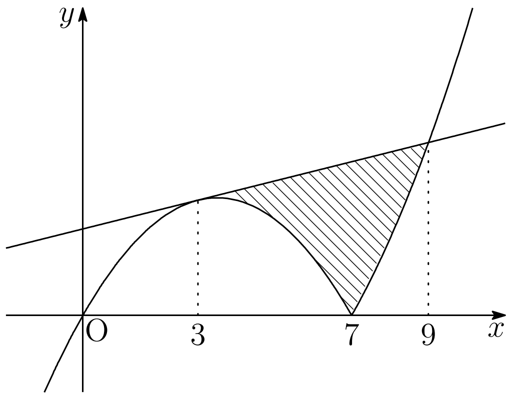
$$y-12=x-3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=x+9}$$

(2) $y=f(x)$ は区間 $x<7$ において上に凸である．この区間における接線 ℓ と $y=f(x)$ の接点以外の共有点は，曲線が下に凸となる部分にあるから

$$x(x-7)=x+9 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-9)=0$$

$x>7$ に注意して解くと　$x=9$　よって　**(9，18)**

(3) 求める面積は，下の図の斜線部分である．



よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_3^7 \{x+9-(-x^2+7x)\}\,dx + \int_7^9 \{x+9-(x^2-7x)\}\,dx \\ &= \int_3^7 (x-3)^2\,dx + \int_7^9 (-x^2+8x+9)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_3^7 + \left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2+9x\right]_7^9 = \boldsymbol{\frac{116}{3}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{9}$ (1)　$\boxed{2}$ (1) を参照．

(2)　$\boxed{2}$ (2) を参照．

(3)　$\boxed{2}$ (3) を参照．■