令和４年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　令和４年３月12日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上において，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円を C とし，点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円をそれぞれ C_1，C_2 とする．さらに，円 C_3 は C に内接して，C_1 と C_2 に外接し，C_3 の中心を P_3 とするとき，その y 座標が正であるとする．次の問に答えよ．

(1) 円 C_3 の半径を r とする．$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_3$ が直角三角形になることを用いて，r の値を求めよ．

(2) 円 C_4 は C に内接して，C_1 と C_3 に外接し，さらに C_4 の中心の x 座標が正であるとする．C_4 の中心を P_4 とし，$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_4$ を α，$\angle \mathrm{P}_3\mathrm{OP}_4$ を β とおく．C_4 の半径を s とするとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ を s を用いて表せ．

(3) (2) の $\alpha,\ \beta,\ s$ について，$\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ と s の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を 1 以上 9 以下の整数とする．箱の中に

20 ポイントのくじ 2 本
10 ポイントのくじ a 本
5 ポイントのくじ 8 本
0 ポイントのくじ $(10-a)$ 本

の合計 20 本のくじを入れてよくかき混ぜる．この箱の中から同時に引いた 2 本のくじのポイントの和を獲得ポイントとするとき，次の問に答えよ．

(1) $a=5$ のとき，獲得ポイントが正である確率を求めよ．

(2) $a=5$ とする．獲得ポイントが 20 であったとき，引いたくじの中に 10 ポイントのくじが含まれている確率を求めよ．

(3) a を 1 以上 9 以下の整数とするとき，獲得ポイントが 20 である確率を a を用いて表せ．さらに，この確率が最小となる a の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ r を正の定数とする．座標平面上を運動する点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$$x = 1 - r\cos t, \quad y = r(\sin t - t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で表されるとき，次の問に答えよ．

(1) 点 P の速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{\alpha}$ を求めよ．

(2) (1) の $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は一定であることを示せ．

(3) $t = \pi$ から $t = \dfrac{3}{2}\pi$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\alpha = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{4}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 整数 n について，α^n を極形式で表せ．

(2)

$$|\alpha^n| > \frac{1}{32}$$

を満たす正の整数 n のうち，最大のものを n_1 とする．n_1 の値を求めよ．

(3) α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ とし

$$|\alpha^n + (\overline{\alpha})^n| > \frac{1}{16}$$

を満たす正の整数 n のうち，最大のものを n_2 とする．n_2 の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ．

(1) 一般項が $S_n = 2^n n$ で表される数列 $\{S_n\}$ について

$$S_{n+1} - S_n = 2^n P_1(n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす整式 $P_1(x)$ を求めよ．
また，この $P_1(x)$ について

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k P_1(k) = 2^n P_2(n) + a \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす整式 $P_2(x)$ と定数 a の値を求めよ．

(2)

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k = 2^n Q(n) + b \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす整式 $Q(x)$ と定数 b の値を求めよ．

(3) 一般項が $T_n = 2^n n^2$ で表される数列 $\{T_n\}$ について

$$T_{n+1} - T_n = 2^n R_1(n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす整式 $R_1(x)$ を求めよ．
さらに

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2 = 2^n R_2(n) + c \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす整式 $R_2(x)$ と定数 c の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $x^2 - 3x$ の不定積分の 1 つを $f(x)$ とし，関数 $g(t)$ を

$$g(t) = f(3t + 3) - f(t)$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $g(t)$ を t の整式として表せ．

(2) 関数 $g(t)$ の増減を調べ，極値を与える t の値を求めよ．

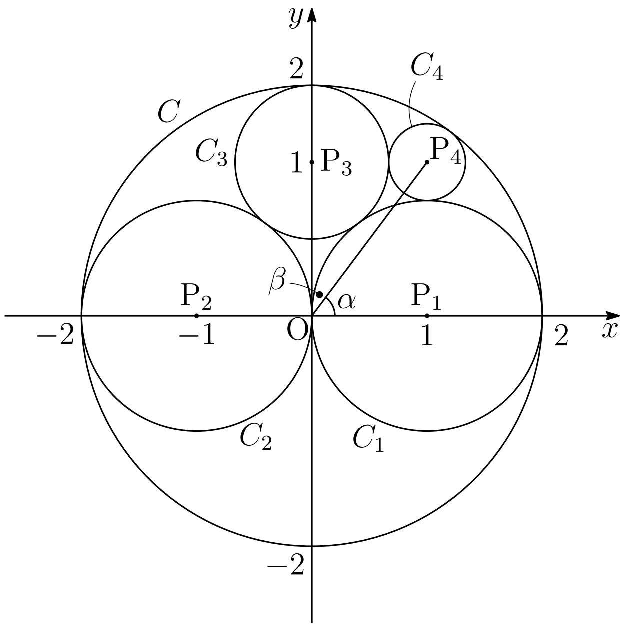
(3) 方程式 $g(t) = 0$ のすべての実数解を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_3 の半径が r であるから　$\mathrm{OP_3} = 2 - r,\ \mathrm{P_1P_3} = 1 + r$

$\mathrm{OP_1} = 1$ であるから，$\triangle\mathrm{OP_1P_3}$ に三平方の定理を適用すると

$$1^2 + (2-r)^2 = (1+r)^2 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{r = \frac{2}{3}}$$



(2) C_4 の半径が s であるから　$\mathrm{OP_4} = 2 - s,\ \mathrm{P_1P_4} = 1 + s$

$\mathrm{OP_1} = 1$ であるから，$\triangle\mathrm{OP_1P_4}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\alpha = \frac{1^2 + (2-s)^2 - (1+s)^2}{2\cdot 1\cdot (2-s)} = \boldsymbol{\frac{2-3s}{2-s}}$$

(1) の結果から，$\mathrm{OP_3} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$，$\mathrm{P_3P_4} = \dfrac{2}{3} + s$

$\triangle\mathrm{OP_3P_4}$ に余弦定理を適用すると

$$\cos\beta = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + (2-s)^2 - \left(\frac{2}{3}+s\right)^2}{2\cdot\frac{4}{3}\cdot(2-s)} = \boldsymbol{\frac{2-2s}{2-s}}$$

(3) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ であるから

$$\left(\frac{2-3s}{2-s}\right)^2 + \left(\frac{2-2s}{2-s}\right)^2 = 1 \quad ゆえに \quad (s-1)(3s-1) = 0$$

$\cos\alpha > 0$，$\cos\beta > 0$ に注意すると　$\boldsymbol{s = \dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 獲得ポイントが 0 である確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\dfrac{2\cdot 1}{20\cdot 19} = \dfrac{1}{19}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{19} = \boldsymbol{\dfrac{18}{19}}$

(2) 20 ポイントのくじ，0 ポイントのくじをそれぞれ 1 本ずつ引く確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{2 \times 5}{190} = \frac{1}{19}$$

10 ポイントのくじを 2 本引く確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

よって，求める条件付き確率は　$\dfrac{\dfrac{1}{19}}{\dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{19}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (i) $a = 1$ のとき

20 ポイントのくじ，0 ポイントのくじをそれぞれ 1 本ずつ引く確率

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{2 \times 9}{190} = \frac{9}{95}$$

(ii) $a \geqq 2$ のとき

「20 ポイントのくじ，0 ポイントのくじをそれぞれ 1 本ずつ引く」または「10 ポイントのくじを 2 本引く」確率

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{10-a}\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_2} + \frac{{}_a\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_2} = \frac{2 \times (10 - a) + \dfrac{a(a-1)}{2}}{190} = \frac{a^2 - 5a + 40}{380}$$

(i)，(ii) より，(ii) の結果は，$a = 1$ のときも成立するから，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{a^2 - 5a + 40}{380}}$$

$a^2 - 4a + 40 = \left(a - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{135}{4}$ より，この確率が最小となる a の値は

$$\boldsymbol{a = 2,\ 3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x = 1 - r\cos t,\quad y = r(\sin t - t)$ より $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \boldsymbol{r(\sin t,\ \ \cos t - 1)},$$
$$\vec{\alpha} = \boldsymbol{r(\cos t, -\sin t)}$$

(2) (1) の結果から $(r > 0)$ $\quad |\vec{v}| = r$ $\quad$ よって，r は一定である．

(3) (1) の結果から

$$|\vec{v}|^2 = r^2\{\sin^2 t + (\cos t - 1)^2\} = 2r^2(1 - \cos t) = \left(2r\sin\frac{t}{2}\right)^2$$

求める道のりを L とすると

$$L = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} |\vec{v}|\,dt = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 2r\sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$= -4r\Big[\ \cos\frac{t}{2}\ \Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = -4r\left(\cos\frac{3}{4}\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{2\sqrt{2}r}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\alpha = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{4}$ より

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

したがって

$$\boldsymbol{\alpha^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)} \qquad (*)$$

(2) (1) の結果から $|\alpha^n| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $|\alpha^n| > \dfrac{1}{32}$ より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n > \frac{1}{32} \quad ゆえに \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

したがって $\dfrac{n}{2} < 5$ すなわち $n < 10$

これを満たす最大の n，すなわち，n_1 は $\boldsymbol{n_1 = 9}$

(3) $(*)$ より $\alpha^n + (\overline{\alpha})^n = \alpha^n + (\overline{\alpha^n}) = 2|\alpha^n|\cos\dfrac{n\pi}{6}$

$|\alpha^n + (\overline{\alpha}^n)| > \dfrac{1}{16}$ より

$$2|\alpha^n|\left|\cos\frac{n\pi}{6}\right| > \frac{1}{16} \quad ゆえに \quad |\alpha^n|\left|\cos\frac{n\pi}{6}\right| > \frac{1}{32}$$

(2) の結果から，上式を満たす正の整数 n の必要条件は $n \leqq 9$

したがって，次式を満たす最大の正の整数 n を求めればよい．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left|\cos\frac{n\pi}{6}\right| > \frac{1}{32} \qquad (1 \leqq n \leqq 9) \qquad (**)$$

$n = 9$ のとき，$(**)$ の左辺は 0 となり，不適．

$n = 8$ のとき，$(**)$ の左辺が，次のように $(**)$ の右辺と等しいから不適．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$n = 7$ のとき，$(**)$ の左辺は，次のようになり，$(**)$ を満たす．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{32}$$

$(**)$ を満たす最大の n，すなわち，n_2 は $\boldsymbol{n_2 = 7}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $S_n = 2^n n$ より

$$S_{n+1} - S_n = 2^{n+1}(n+1) - 2^n n$$
$$= 2^n\{2(n+1) - n\} = 2^n(n+2)$$

上式より　　$\boldsymbol{P_1(x) = x + 2}$

また，この $P_1(x)$ について

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k P_1(k) = \sum_{k=1}^{n} (S_{k+1} - S_k) = S_{n+1} - S_1$$
$$= 2^{n+1}(n+1) - 2^1{\cdot}1 = 2^n(2n+2) - 2$$

上式より　　$\boldsymbol{P_2(x) = 2x + 2,\ a = -2}$

(2) $2^k k = 2^k\{P_1(k) - 2\}$ より

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k = \sum_{k=1}^{n} 2^k\{P_1(k) - 2\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2^k P_1(k) - 4\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$
$$= 2^n(2n+2) - 2 - 4{\cdot}\frac{2^n - 1}{2 - 1}$$
$$= \boldsymbol{2^n(2n-2) + 2}$$

上式より　　$\boldsymbol{Q(x) = 2x - 2,\ b = 2}$

(3) $T_n = 2^n n^2$ より

$$T_{n+1} - T_n = 2^{n+1}(n+1)^2 - 2^n n^2$$
$$= 2^n\{2(n+1)^2 - n^2\} = 2^n(n^2 + 4n + 2)$$

上式より　　$\boldsymbol{R_1(x) = x^2 + 4x + 2}$

$k^2 = k^2 + 4k + 2 - 4(k+2) + 6 = R_1(k) - 4P_1(k) + 6$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k^2 = \sum_{k=1}^{n} 2^k R_1(k) - 4\sum_{k=1}^{n} 2^k P_1(k) + 6\sum_{k=1}^{n} 2^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (T_{k+1} - T_k) - 4\sum_{k=1}^{n} (S_{k+1} - S_k) + 6\sum_{k=1}^{n} 2^k$$
$$= T_{n+1} - T_1 - 4(S_{n+1} - S_1) + 6{\cdot}\frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$$
$$= 2^{n+1}(n+1)^2 - 2 - 4\{2^{n+1}(n+1) - 2\} + 6(2^{n+1} - 2)$$
$$= 2^n(2n^2 - 4n + 6) - 6$$

よって　　$\boldsymbol{R_2(x) = 2x^2 - 4x + 6,\ \ c = -6}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 関数 x^2-3x の不定積分の 1 つが $f(x)$ であるから

$$f(x)=\int(x^2-3x)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

したがって

$$\begin{aligned} g(t)&=f(3t+3)-f(t) \qquad\qquad (*)\\ &=\frac{1}{3}(3t+3)^3-\frac{3}{2}(3t+3)^2+C-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+C\right)\\ &=\boldsymbol{\frac{26}{3}t^3+15t^2-\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$g'(t)=26t^2+30t=2t(13t+15)$

したがって，$g(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	$-\frac{15}{13}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，極値を与える t の値は　$\boldsymbol{t=-\frac{15}{13},\ 0}$

(3) $(*)$ より，$3t+3=t$，すなわち，$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$g(t)=0$ であるから，$g(t)$ が $2t+3$ を因数にもつことに注意して

$$g(t)=\frac{1}{6}(2t+3)(26t^2+6t-9)$$

$g(t)=0$ の解は次のようになる．よって，求める実数解は

$$\boldsymbol{t=-\frac{3}{2},\ \frac{-3\pm9\sqrt{3}}{26}}$$