令和４年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　令和４年２月２５日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(2, 2, 0)，C(0, 2, 0) について

$$\mathrm{OD} = \mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = 2$$

を満たす点 D で，その z 座標が正，負になるものを，それぞれ D_1，D_2 とする．次の問に答えよ．

(1) 2 点 D_1，D_2 の座標を求めよ．

(2) 点 P(1, 1, 0) と実数 a，b について

$$a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OD}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

が 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}_1}$ に垂直であるとする．このとき，a，b の値を求めよ．

(3) 6 点 O，A，B，C，D_1，D_2 を頂点とする正八面体を V とし，V のすべての面に内側から接する球を S とする．このとき，S の半径を求めよ．また，V の各面と S とのすべての接点を頂点とする凸多面体について，その名称を答え，各辺の長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を 5 以上の整数とする．1 枚の硬貨を投げる試行を n 回繰り返すとき，表が出る回数が，ちょうど n 回目の試行で 5 になる確率を p_n とする．次の問に答えよ．

(1) p_6 の値を求めよ．

(2) p_n を n を用いて表せ．

(3) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$ を n を用いて表せ．また，p_n の最大値を求めよ．

3 関数 $f(x) = e^{-x^2}$ について，正の定数 a は $f''(a) = 0$ を満たすとする．次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．また，関数 $f(x)$ のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(a)$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

4 複素数 z について，1，z，z^2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする．次の問に答えよ．

(1) 点 A，B，C が正三角形の 3 つの頂点となる z をすべて求めよ．

(2) 点 A，B，C が直角三角形の 3 つの頂点となるための z に関する条件を求めよ．また，この条件を満たす点 z 全体を図示せよ．

5 n を 5 以上の整数とする．1 枚の硬貨を投げる試行を n 回繰り返すとき，表が出る回数が，ちょうど n 回目の試行で 5 になる確率を p_n とする．次の問に答えよ．

(1) p_n を n を用いて表せ．

(2) p_n の最大値を求めよ．

6 複素数 z について，1，z，z^2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする．次の問に答えよ．

(1) 点 A，B，C が正三角形の 3 つの頂点となる z をすべて求めよ．

(2) 点 A，B，C が直角三角形の 3 つの頂点となる点 z 全体を図示せよ．

7 放物線 $y = x^2$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線を ℓ とする．次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $0 < t < 6$ のとき，放物線 C，直線 ℓ と x 軸で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$ とし，放物線 C，直線 ℓ と直線 $x = 6$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする．$S_1(t) + S_2(t)$ を $S(t)$ とおくとき，$S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ が $2 \leqq t \leqq 5$ を満たしながら放物線 C 上を動くとき，(2) の $S(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{8}$ a，b を整数とし，整式 x^3+ax^2+bx+2 を $P(x)$ とおく．次の問に答えよ．

(1) $P(x)$ が，整数 n と定数 p，q により

$$P(x)=(x-n)(x^2+px+q)$$

と表されるとき，p と q は整数であることを示せ．さらに，n は 2 の約数であることを示せ．

(2) 方程式 $P(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつような a，b の組 $(a,\ b)$ を求めよ．

(3) 方程式 $P(x)=0$ が整数解と実数でない解をもつような a，b の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ．

解答例

1 (1) $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$ はDから平面OABCに降ろした垂線の足である．
$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OD}=2$ より

$$\mathrm{PD}=\sqrt{\mathrm{OD}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{2}$$

D_1，D_2 の z 座標の符号により

$$\mathbf{D_1(1,\ 1,\ \sqrt{2}),\ D_2(1,\ 1,-\sqrt{2})}$$

(2) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$ および (1) の結果から

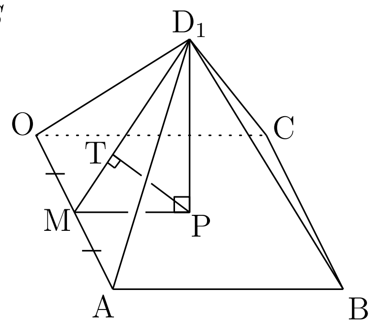
$$\begin{aligned} a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= a(2,\ 0,\ 0)+b(1,\ 1,\ \sqrt{2})-(1,\ 1,\ 0) \\ &= (2a+b-1,\ b-1,\ \sqrt{2}b) \end{aligned}$$

これがベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}=(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ に垂直であるから

$$2(2a+b-1)=0,\quad 1(2a+b-1)+1(b-1)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}b=0$$

それぞれ整理すると　$2a+b=1,\quad a+2b=1$　よって　$\boldsymbol{a=b=\dfrac{1}{3}}$

(3) 辺OAの中点をMとし，平面 $\mathrm{OAD_1}$ と球 S の接点をTとすると



$$2\triangle\mathrm{MPD_1}=\mathrm{MD_1}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{MP}\cdot\mathrm{PD_1}$$

したがって　$\sqrt{3}\mathrm{PT}=1\cdot\sqrt{2}$

よって，半径は　$\mathrm{PT}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(2) の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD_1}}$ であるから，Tは $\triangle\mathrm{OAD_1}$ の重心．
$\triangle\mathrm{BCD_1}$ の重心を T'，平面OABCに関してTと対称な点を T'' とすると

$$\mathrm{TT}'=\frac{2}{3}\mathrm{OC}=\frac{4}{3},\quad \mathrm{TT}''=\frac{2}{3}\mathrm{PD_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle\mathrm{OAD_1}$，$\triangle\mathrm{ABD_1}$，$\triangle\mathrm{BCD_1}$，$\triangle\mathrm{COD_1}$ の4重心が凸多面体の頂点であり，その1辺の長さは

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{TT}'=\mathrm{TT}''=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

よって，凸多面体は**立方体**である． ■

2 (1) p_6 は，5 回目までに表が 4 回出て，6 回目に表が出る確率であるから

$$p_6 = {}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \boldsymbol{\frac{5}{64}}$$

(2) p_n は，$n-1$ 回目までに表が 4 回出て，n 回目に表が出る確率であるから

$$\begin{aligned} p_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3{\cdot}2^{n+3}}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3{\cdot}2^{n+4}}\cdot\frac{3{\cdot}2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{2(n-4)}} \end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = \dfrac{n}{2(n-4)} - 1 = \dfrac{8-n}{2(n-4)}$

したがって　$p_5 < p_6 < p_7 < p_8 = p_9 > p_{10} > p_{11} > \cdots$

よって，最大値　$\boldsymbol{p_8 = p_9 = \frac{35}{256}}$ ■

3 (1) $f(x)=e^{-x^2}$ より

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

$f''(a)=0$ より $(a>0)$　$2a^2-1=0$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

したがって，$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる．

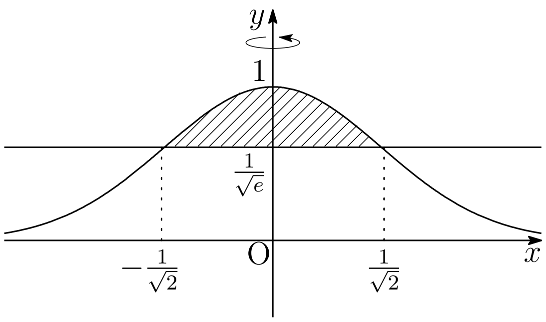
x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

変曲点は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)}$，　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)}$

(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$V=2\pi\int_0^a x\{f(x)-f(a)\}\,dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\left(e^{-x^2}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)dx$$

$$=\pi\left[-e^{-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{e}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\boldsymbol{\pi\left(1-\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)}$$



バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

$\boxed{4}$ (1) 3点A(1)，B(z)，C(z^2) に関する必要条件は

$$z \neq 1,\quad z^2 \neq 1,\quad z^2 \neq z \quad \text{すなわち} \quad z \neq 0,\ \pm 1 \qquad (*)$$

このとき，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\frac{z^2-1}{z-1} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad z+1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

よって $\quad \boldsymbol{z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

別解 AB = BC = CA $\neq 0$ より $\quad |z-1| = |z^2-z| = |z^2-1| \neq 0$

$$|z-1| = |z||z-1| = |z+1||z-1| \neq 0$$

したがって $\quad 1 = |z| = |z-1|,\ z \neq 1$

2円 $|z|=1,\ |z-1|=1$ の交点であるから $\quad \boldsymbol{z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(2) (i) $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ に注意して $\quad \dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1$

上式は，純虚数であるから

$$(z+1) + (\overline{z+1}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = -1,\ z \neq -1$$

(ii) $\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ に注意して $\quad \dfrac{z^2-z}{1-z} = -z$

上式は，純虚数であるから

$$-z + (\overline{-z}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z) = 0,\ z \neq 0$$

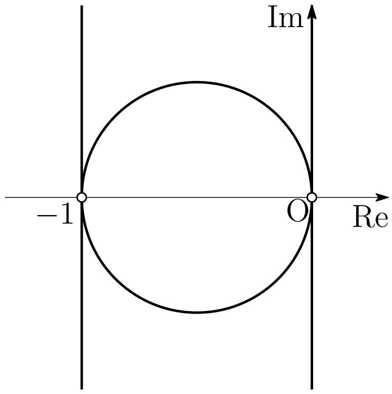
(iii) $\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$(*)$ に注意して $\quad \dfrac{1-z^2}{z-z^2} = \dfrac{1+z}{z}$

上式は，純虚数であるから

$$\frac{1+z}{z} + \left(\overline{\frac{1+z}{z}}\right) = 0 \quad \text{整理すると} \quad \overline{z}(1+z) + z(1+\overline{z}) = 0$$

$$z\overline{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ z \neq 0, -1$$

(i)〜(iii) より，点 z 全体は，下の図のようになる．



別解 $\mathrm{AB}=|z-1|$，$\mathrm{BC}=|z^2-z|=|z||z-1|$，$\mathrm{CA}=|1-z^2|=|z+1||z-1|$

このとき，$\mathrm{AB}\neq 0,\ \mathrm{BC}\neq 0,\ \mathrm{CA}\neq 0$ より　$z\neq 0,\ \pm 1$

$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=1:|z|:|z+1|$ であるから，次の (i)〜(iii) の場合がある．

(i) $1^2+|z+1|^2=|z|^2$ のとき

$$z+\overline{z}=-2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}=-1,\quad z\neq -1$$

(ii) $1^2+|z|^2=|z+1|^2$ のとき

$$z+\overline{z}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}=0,\ z\neq 0$$

(iii) $|z|^2+|z+1|^2=1^2$ のとき

$$z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\ z\neq 0,-1$$

■

5 (1) **2** (2)

(2) **2** (3) ■

6 (1) **4** (1)

(2) **4** (2) ■

$\boxed{7}$ (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

ℓ は，点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，傾き $2t$ の直線であるから

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2tx - t^2} \qquad (*)$$

(2) ℓ と x 軸との交点の x 座標は，

$(*)$ に $y = 0$ を代入して

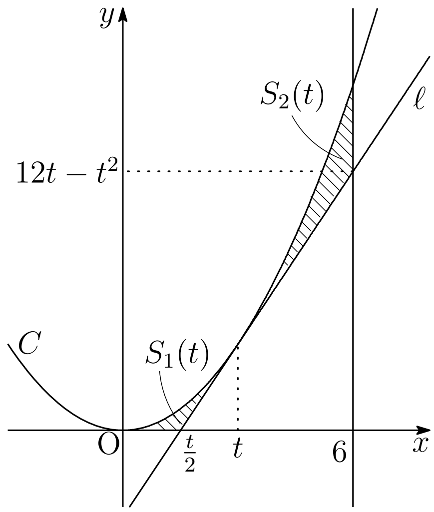
$$t(2x - t) = 0$$

$t \neq 0$ より　　$x = \dfrac{t}{2}$

ℓ と直線 $x = 6$ との交点の y 座標は

$(*)$ に $x = 6$ を代入して

$$y = 12t - t^2$$



$S(t) = S_1(t) + S_2(t)\ (0 < t < 6)$ は，

右の図から

$$S(t) = \int_0^6 x^2\,dx - \frac{1}{2}\left(6 - \frac{t}{2}\right)(12t - t^2)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4}t^3 + 6t^2 - 36t + 72}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 12t - 36 = -\frac{3}{4}(t^2 - 16t + 48)$$
$$= -\frac{3}{4}(t - 4)(t - 12)$$

したがって，$2 \leqq t \leqq 5$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	22	$\searrow$	8	$\nearrow$	$\frac{43}{4}$

よって　最大値 $S(2) = \mathbf{22}$，最小値 $S(4) = \mathbf{8}$ ■

$\boxed{8}$ (1) 整式 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ が

$$P(x) = (x - n)(x^2 + px + q) \qquad (*)$$

と表されるから，$(*)$ を展開して

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = x^3 + (p - n)x^2 + (q - np)x - nq$$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$a = p - n, \quad b = q - np, \quad 2 = -nq$$

したがって

$$p = a + n, \quad q = b + np, \quad nq = -2 \qquad (**)$$

a，n は整数であるから，$(**)$ の第 1 式より，p は整数．

また，b は整数であるから，$(**)$ の第 2 式より，q は整数．

さらに，$(**)$ の第 3 式より，n は 2 の約数である．

(2) $P(x) = 0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，$(*)$ より，1 つの整数解が n で他の 2 つの整数解を α, β とおくと，α, β は 2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \quad \cdots ①$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$q = \alpha\beta$$

これを $(**)$ の第 3 式に代入すると　$n\alpha\beta = -2$

n, α, β は異なる整数であるから，これらは　$1, -1,\ 2$

$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$ であるから

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

よって　　$\boldsymbol{a = -2,\ b = -1}$

(3) 条件より，2次方程式①が実数でない解をもつから，係数について

$$p^2-4q<0 \quad \cdots ②$$

これから，$q>0$ が必要条件で，$(**)$ の第3式より，$n<0$

さらに，(1) の結論から，$n=-1,-2$

(i) $n=-1$ を $(**)$ に代入して

$$p=a-1, \quad q=b-p, \quad q=2$$

ゆえに，$p=a-1,\ q=2,\ b=a+1$．②により

$$(a-1)^2-4{\cdot}2<0 \quad \text{これを満たす整数 } a \text{ は} \quad a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

したがって，$(a,\ b)=(-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4)$ の5組

(ii) $n=-2$ を $(**)$ に代入して

$$p=a-2, \quad q=b-2p, \quad q=1$$

ゆえに，$p=a-2,\ q=1,\ b=2a-3$．②により

$$(a-2)^2-4{\cdot}1<0 \quad \text{これを満たす整数 } a \text{ は} \quad a=1,\ 2,\ 3$$

したがって，$(a,\ b)=(1,-1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 3)$ の3組

(i),(ii) から，求める組 $(a,\ b)$ の個数は　$5+3=\mathbf{8}$ (個) ■