令和３年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　令和３年３月12日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ さいころを何回か投げて，出た目の最大値を得点とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 3 回投げたとき，得点が 4 以上になる確率を求めよ．

(2) 3 回投げたとき，得点が 4 になる確率を求めよ．

(3) 3 回投げたときの得点が 4 以上であったとき，もう 1 回さいころを投げて，得点が 1 以上増える確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ．

(1) 実数 x，y が $2x+y=1$ をみたすとき，$2x^2+y^2$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ．

(2) 実数 x，y が $2x^2+y^2=1$ をみたすとき，$2x+y$ の最大値とそのときの x，y の値を求めよ．

(3) 実数 x，y が $2x^2+y^2=1$ をみたすとき，xy の最大値とそのときの x，y の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を定数とする．

$$y=\cos\theta+a\cos 2\theta+\cos 3\theta$$

について，次の問に答えよ．

(1) $t=\cos\theta$ とするとき，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を t を用いて表せ．また，y を t の関数として表せ．

(2) (1) の t に対して，$t=\dfrac{1}{2}$ で y が極値をとるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) の a に対して，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲における y の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - x}$$
$$g(x) = (2-x)e^x - x$$

について，次の問に答えよ．

(1) すべての実数 x に対して，不等式

$$(1-x)e^x \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つときの x の値を求めよ．

(2) (1) を用いて，方程式 $g(x) = 0$ が実数解をただ一つもつことを示せ．また，その実数解を α とおくとき，$1 < \alpha < 2$ であることを示せ．

(3) α を (2) で定めた実数とする．このとき，関数 $f(x)$ の極大値を α の分数式で表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ O を原点とする平面上に 3 点 A，B，C がある．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．$|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 2$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ とし，直線 AB と直線 OC は垂直であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表すとき，t を s を用いて表せ．

(2) 線分 OA の中点を M とする．3 点 M，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2) において，直線 AB と直線 OC の交点を N とするとき，線分 AB と線分 BN の長さの比 AB : BN を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 3 回とも得点が 3 以下の確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{7}{8}}$$

(2) 3 回とも得点が 4 以下の確率は $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$

3 回とも得点が 3 以下の確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$

よって，求める確率は $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 - \left(\dfrac{3}{6}\right)^3 = \mathbf{\dfrac{37}{216}}$

(3) (i) 3 回投げたときの得点が 4 であり，もう 1 回投げた得点が 5 以上の確率は，(2) の結果を用いて

$$\frac{37}{216} \times \frac{2}{6} = \frac{74}{1296}$$

(ii) 3 回投げたときの得点が 5 であり，もう 1 回投げた得点が 6 の確率は，(i) と同様にして

$$\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3\right\} \times \frac{1}{6} = \frac{61}{1296}$$

(i)，(ii) および (1) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{74}{1296} + \frac{61}{1296}}{\frac{7}{8}} = \mathbf{\frac{5}{42}}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $2x+y=1$ より，$y=1-2x$ であるから

$$2x^2+y^2=2x^2+(1-2x)^2=6x^2-4x+1=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$，$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ をとる．

別解 $\vec{u}$，$\vec{v}$ について，$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ を利用する (等号は $\vec{u}/\!/\vec{v}$ のとき)

2 つのベクトル $\vec{u}=(\sqrt{2},\ 1)$，$\vec{v}=(\sqrt{2}x,\ y)$ について

$$(2+1)(2x^2+y^2) \geqq (2x+y)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2+y^2 \geqq \frac{1}{3}$$

等号が成立するとき　$\sqrt{2}:1=\sqrt{2}x:y$　すなわち　$x=y=\dfrac{1}{3}$

(2) 2 つのベクトル $\vec{u}=(\sqrt{2},\ 1)$，$\vec{v}=(\sqrt{2}x,\ y)$ について

$$(2+1)(2x^2+y^2) \geqq (2x+y)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 3 \geqq (2x+y)^2$$

したがって　$-\sqrt{3} \leqq 2x+y \leqq \sqrt{3}$

等号が成立するとき　$\sqrt{2}:1=\sqrt{2}x:y$　すなわち　$x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ をとる．

(3) 2 数 $2x^2$，y^2 の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1=2x^2+y^2 \geqq 2\sqrt{2x^2\cdot y^2}=2\sqrt{2}|xy| \quad \text{ゆえに} \quad |xy| \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

したがって　$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq xy \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

上式で等号が成立するとき　$2x^2=y^2$

よって　$\boldsymbol{x=\pm\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ **(複号同順)** のとき　最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $t=\cos\theta$ とすると

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta-1=\boldsymbol{2t^2-1}\\ \cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\ &=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\ &=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\boldsymbol{4t^3-3t}\end{aligned}$$

よって　$y=t+a(2t^2-1)+4t^3-3t=\boldsymbol{4t^3+2at^2-2t-a}$

(2) $f(t)=4t^3+2at^2-2t-a$ とおくと

$$f'(t)=12t^2+4at-2$$

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ は，$t=\dfrac{1}{2}$ で $f(t)$ が極値をとるための必要条件であるから

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2a+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=-\frac{1}{2}$$

このとき　$f'(t)=12t^2-2t-2=2(3t+1)(2t-1)$　$\cdots(*)$

$t=\dfrac{1}{2}$ の前後で $f'(t)$ の符号が変化するから，$f(t)$ は，$t=\dfrac{1}{2}$ で極値をとる．

よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$

(3) $t=\cos\theta$, $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-1\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(*)$ より，$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{49}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

よって　$t=-\dfrac{1}{3}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{54}}$

$t=-1$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $h(x)=1-(1-x)e^x$ とおくと　$h'(x)=xe^x$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ゆえに　$h(x)\geqq 0$　すなわち　$(1-x)e^x\leqq 1$

上式で等号が成立するとき　　$\boldsymbol{x=0}$

(2) $g(x)=(2-x)e^x-x$ より　$g'(x)=(1-x)e^x-1=-h(x)\leqq 0$

$$g(1)=e-1>0,\quad g(2)=-2<0$$

$g(x)$ は，単調減少関数であるから

$$g(\alpha)=0,\quad 1<\alpha<2$$

を満たす実数 α がただ一つ存在する．

(3) (2) の結果から　$g(\alpha)=0$

$$(2-\alpha)e^\alpha-\alpha=0\quad ゆえに\quad e^\alpha=\frac{\alpha}{2-\alpha}\qquad\cdots①$$

$f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-x}$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2x(e^x-x)-x^2(e^x-1)}{(e^x-x)^2}\\&=\frac{x\{(2-x)e^x-x\}}{(e^x-x)^2}=\frac{xg(x)}{(e^x-x)^2}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \alpha$

(2) の結果により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$f(x)$ の極大値は，① により

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{e^\alpha-\alpha}=\frac{\alpha^2}{\frac{\alpha}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha-\alpha(2-\alpha)}=\boldsymbol{\frac{\alpha(2-\alpha)}{\alpha-1}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\begin{aligned}(\vec{b}-\vec{a})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}) &= (\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2)s+(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b})t \\ &= (5-3^2)s+(2^2-5)t=0\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{t=-4s}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s(\vec{a}-4\vec{b})$，　M は OA の中点より　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=s(\vec{a}-4\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}=\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{a}-4s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

3 点 M，B，C が同一直線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=k\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ より

$$\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{a}-4s\vec{b}=k\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

ゆえに　　$s-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}k$,　$-4s=k$

上の 2 式から k を消去すると　$s-\dfrac{1}{2}=2s$　これを解いて　$s=-\dfrac{1}{2}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{1}{2}(\vec{a}-4\vec{b})=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}}$

(3) (2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1}$

したがって，N は AB を 4 : 1 に外分する．

すなわち，B は AN を 3 : 1 に内分する．

よって　　**AB : BN = 3 : 1**