令和３年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　令和３年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{AC}=4$，$\cos B=\dfrac{3}{4}$ をみたす $\triangle\mathrm{ABC}$ について，次の問に答えよ．

(1) 辺 BC の長さを求めよ．

(2) $\angle\mathrm{C}$ が鋭角のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(3) (2) の $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，その外接円および内接円の半径をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) α^2 と α^3 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ を，それぞれ有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ の形に表せ．

(3) $\dfrac{1}{\alpha+1}$ を，有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ の形に表せ．

(4) (1)，(2)，(3) で示した式のいずれかを用いることにより，α が有理数または無理数のどちらになるか，理由をつけて答えよ．ただし，$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,-1)$ のとき，

$$\vec{p}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$$
$$\vec{q}=(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}$$

とおく．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $|\vec{a}|^2$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{b}|^2$ の値をそれぞれ求め，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を θ を用いて表せ．

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．また，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を t を用いて表せ．

(3) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = -x^3 + 4x$ とおく．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．ただし，$0 < t < 2$ とする．$y = f(x)$ $(t \leqq x \leqq 2)$，x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする．$y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq t)$，直線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とし，$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(4) t が $0 < t < 2$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ を，それぞれ有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$ の形に表せ．

(2) $\dfrac{1}{\alpha + 1}$ を，有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$ の形に表せ．

(3) (1)，(2) で示した式のいずれかを用いることにより，α が有理数または無理数のどちらになるか，理由をつけて答えよ．ただし，$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x) = 2x^2 + x + 1$ とおき，放物線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 4)$ における接線を ℓ とする．点 P を通り，ℓ とのなす角が 45° である直線で，傾きが正であるものを m とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 直線 m の方程式を求めよ．

(3) $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，直線 m，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $b=4,\ c=6,\ \cos B=\dfrac{3}{4}$ を余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ に代入すると

$$16=36+a^2-2\cdot 6a\cdot\frac{3}{4}\quad \text{ゆえに}\quad a^2-9a+20=0$$

したがって　$(a-4)(a-5)=0$　よって　$\mathrm{BC}=a=\mathbf{4,\ 5}$

(2) $\angle\mathrm{C}$ が鋭角であるから，$a^2+b^2>c^2$ をみたすとき，(1) の結果から

$$a=5$$

また　　$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{7}}{4}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円および内接円の半径をそれぞれ $R,\ r$ とおく．
正弦定理により　$2R=\dfrac{b}{\sin B}$

$$R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{8}{7}\sqrt{7}}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の周の長さを ℓ とすると　$\ell=5+4+6=15$

これと (2) の結果を $\dfrac{1}{2}r\ell=\triangle\mathrm{ABC}$ に代入すると

$$\frac{1}{2}r\cdot 15=\frac{15\sqrt{7}}{4}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{r=\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}\alpha^2&=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\mathbf{5+2\sqrt{6}},\\ \alpha^3&=\alpha^2\alpha=(5+2\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})\\ &=5(\sqrt{2}+\sqrt{3})+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}=\mathbf{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(2) $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\alpha^3=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ より

$$\boldsymbol{\sqrt{2}=\frac{1}{2}(\alpha^3-9\alpha),\quad \sqrt{3}=\frac{1}{2}(-\alpha^3+11\alpha)}$$

$\alpha^2=5+2\sqrt{6}$ より　$\boldsymbol{\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}(\alpha^2-5)}$

(3) $\alpha^2-5=2\sqrt{6}$ の両辺を平方すると

$$\alpha^4-10\alpha^2+25=24\quad \text{ゆえに}\quad \alpha^4-10\alpha^2+1=0$$

$\alpha^4-10\alpha^2+1$ を $\alpha+1$ で割ることにより

$$\alpha^4-10\alpha^2+1=(\alpha+1)(\alpha^3-\alpha^2-9\alpha+9)-8$$

上式の左辺は 0 であるから　$8=(\alpha+1)(\alpha^3-\alpha^2-9\alpha+9)$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\alpha+1}=\dfrac{1}{8}(\alpha^3-\alpha^2-9\alpha+9)}$

別解 (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha+1}&=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}\\ &=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})\\ &=\frac{1}{4}\left(2+\frac{\alpha^3-9\alpha}{2}-\frac{\alpha^2-5}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{8}(\alpha^3-\alpha^2-9\alpha+9)}\end{aligned}$$

(4) $$\sqrt{6}=\frac{1}{2}(\alpha^2-5)\quad\cdots(*)$$

α を有理数と仮定すると，$(*)$ の右辺は有理数であり，左辺が無理数であることに反する．よって，α は無理数である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a} = (1,\ 3),\ \vec{b} = (3, -1)$ より

$$|\vec{a}|^2 = 1^2 + 3^2 = \mathbf{10}, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) = \mathbf{0}, \quad |\vec{b}|^2 = 3^2 + (-1)^2 = \mathbf{10}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{p}\cdot\vec{q} &= \{(\cos\theta)\vec{a} + (\sin\theta)\vec{b}\}\cdot\{(\cos^2\theta)\vec{a} + (\sin^2\theta)\vec{b}\} \\ &= (\cos^3\theta)|\vec{a}|^2 + (\sin^3\theta)|\vec{b}|^2 \\ &= \boldsymbol{10(\sin^3\theta + \cos^3\theta)} \end{aligned}$$

(2) $(*)$ $t = \sin\theta + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ より

$$(**) \quad t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

また，$(*)$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}$$

$(*)$ と上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \vec{p}\cdot\vec{q} &= 10(\sin^3\theta + \cos^3\theta) \\ &= 10(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta) \\ &= 10t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = \boldsymbol{-5t^3 + 15t} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，$f(t) = \vec{p}\cdot\vec{q}$ とおくと $(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$$f'(t) = -15t^2 + 15 = -15(t+1)(t-1)$$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-5\sqrt{2}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	10	$\searrow$	$5\sqrt{2}$

$(**)$ より $t = 1$ すなわち $\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}}$ のとき 最大値 $\mathbf{10}$

$t = -1$ すなわち $\boldsymbol{\theta = \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$ のとき 最小値 $\mathbf{-10}$

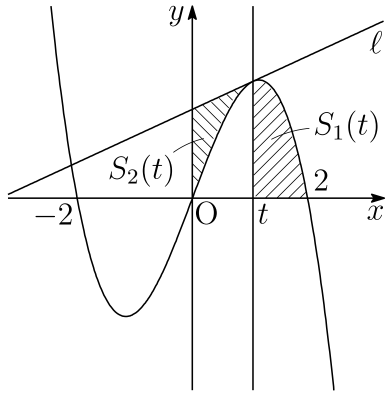
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=-x^3+4x$ より　$f'(x)=-3x^2+4$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-(-t^3+4t)=(-3t^2+4)(x-t)$$

したがって　　$\boldsymbol{y=(-3t^2+4)x+2t^3}$

(2) $S_1(t)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_t^2 (-x^3+4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_t^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}t^4-2t^2+4} \end{aligned}$$

(3) $S_2(t)$ は右上の図の斜線部分の面積であるから，(1) の結果により

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t \{(-3t^2+4)x+2t^3-(-x^3+4x)\}\,dx \\ &= \int_0^t (x^3-3t^2x+2t^3)\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\ \right]_0^t = \boldsymbol{\frac{3}{4}t^4} \end{aligned}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\begin{aligned} S(t) = S_1(t)+S_2(t) &= \frac{1}{4}t^4-2t^2+4+\frac{3}{4}t^4 \\ &= t^4-2t^2+4 \\ &= (t^2-1)^2+3 \end{aligned}$$

$0<t<2$ より，$\boldsymbol{t=1}$ **のとき，最小値 3**

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{2}$ (2) と同一

(2) $\boxed{2}$ (3) と同一

(3) $\boxed{2}$ (4) と同一

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x)=2x^2+x+1$ より　$f'(x)=4x+1$

したがって　$f(1)=4,\ \ f'(1)=5$

ℓ は点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き 5 の直線であるから

$$y-4=5(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=5x-1}$$

(2) 直線 ℓ の偏角を θ とすると，$\tan\theta=5$ より

$$45^\circ<\theta<90^\circ$$

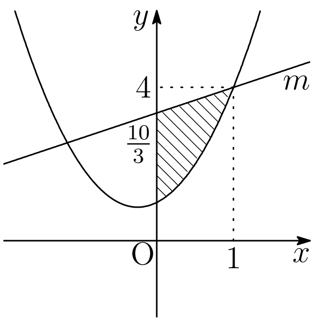
したがって，ℓ とのなす角 45° で傾き正である直線 m の傾きは

$$\tan(\theta-45^\circ)=\frac{\tan\theta-\tan 45^\circ}{1+\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{5-1}{1+5\cdot 1}=\frac{2}{3}$$

m は点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き $\dfrac{2}{3}$ の直線であるから

$$y-4=\frac{2}{3}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}}$$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left\{\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}-(2x^2+x+1)\right\}dx\\&=\int_0^1\left(-2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$