令和２年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　令和２年３月12日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\textbf{1}}$ s，t は，$0 < s < 1$，$0 < t < \dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA を $t : (1-t)$ に内分する点を L，辺 OB を $s : (1-s)$ に内分する点を M，辺 OC の中点を N とする．ただし，LM⊥LN とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，t，s を用いて表せ．

(2) $1 - 2t$ を u とするとき，s を u を用いて表せ．

(3) s が最大となる t の値と s の最大値を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ c は実数の定数とする．x に関する 2 次方程式

$$x^2 + \left(c - \frac{27}{2}\right)x + c^2 + 60 = 0$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) この方程式が $x = \dfrac{17}{2}$ を解にもつような c の値を求めよ．

(2) この方程式が自然数の解をもつような c の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ 次の問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$ を求めよ．

(2) 等式 $f(x) = 3\log x - x\displaystyle\int_1^e \frac{2f(t)+1}{2t}\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を (2) で求めた関数とする．$x > 0$ における関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad 4a_{n+1} = 3a_n + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，$a_n > 1$ を示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，次の不等式が成立することを示せ．

$$a_{n+1} - 1 < \frac{3}{4}(a_n - 1)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 から 11 までの番号を付けた 11 枚のカードから同時に 2 枚を取り出す試行を考える．取り出した 2 枚のカードの番号の和が奇数である事象を A とし，取り出した 2 枚のカードの番号の積が 18 以下である事象を B とする．このとき，次の事象が起こる確率を求めよ．

(1) B

(2) $A \cap B$

(3) $\overline{A} \cap B$

(4) $\overline{A} \cup \overline{B}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x)$，$g(x)$ は次の条件を満たすものとする．

$$f(x) = 3\int_1^x g(t)\,dt + g(x), \quad g(x) = x^2 + \int_0^1 f'(t)\,dt$$

$a = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt$ とおくとき，次の問に答えよ．

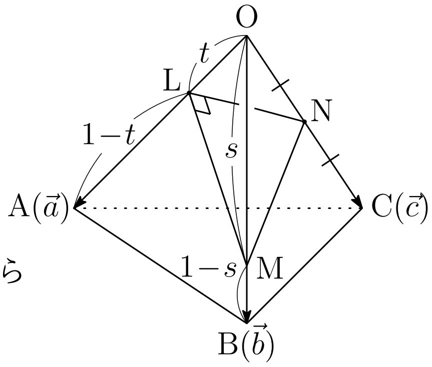
(1) $f'(x)$ を a，x を用いて表せ．

(2) a の値を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}} = t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = s\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{1}{2}\vec{c}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = \boldsymbol{s\vec{b} - t\vec{a}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LN}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OL}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{c} - t\vec{a}}$$

(2) 四面体 OABC は 1 辺の長さが 1 であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot1\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

LM⊥LN であるから，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}} = 0$ より

$$(s\vec{b} - t\vec{a})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c} - t\vec{a}\right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{s}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} - st\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{t}{2}\vec{c}\cdot\vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 = 0$$

したがって　$\dfrac{s}{4} - \dfrac{1}{2}st - \dfrac{t}{4} + t^2 = 0$　これを s について整理すると

$$(1-2t)s = t(1-4t)$$

$1-2t = u$ より，$t = \dfrac{1-u}{2}$ を上式に代入すると

$$us = \frac{1-u}{2}\left(1 - 4\cdot\frac{1-u}{2}\right) = -u^2 + \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}$$

$0 < t < \dfrac{1}{4}$ より，$1-2t = u > 0$ に注意して　$\boldsymbol{s = -u + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2u}}$

(3) (2) の結果から　$s = \dfrac{3}{2} - \left(u + \dfrac{1}{2u}\right)$

$u > 0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$u + \frac{1}{2u} \geqq 2\sqrt{u\cdot\frac{1}{2u}} = \sqrt{2} \quad \text{よって} \quad s \leqq \frac{3}{2} - \sqrt{2} \quad \cdots ①$$

① において，等式が成立するのは

$$u = \frac{1}{2u} \quad \text{すなわち} \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{このとき} \quad t = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

よって，$\boldsymbol{t = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$ のとき，s は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$x^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)x+c^2+60=0 \quad \cdots (*)$$

方程式 $(*)$ が $x=\dfrac{17}{2}$ を解にもつとき

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)\cdot\frac{17}{2}+c^2+60=0$$

これを c について整理すると　$2c^2+17c+35=0$

$$(c+5)(2c+7)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c=-5,-\frac{7}{2}}$$

(2) 方程式 $(*)$ の自然数の解を n とすると

$$n^2+\left(c-\frac{27}{2}\right)n+c^2+60=0$$

これを c について，整理すると

$$c^2+nc+n^2-\frac{27}{2}n+60=0 \quad \cdots (**)$$

c は実数であるから，上の c に関する 2 次方程式は，実数解をもつから，この方程式の判別式を D とすると，$D \geqq 0$ であるから

$$n^2-4\cdot 1\cdot\left(n^2-\frac{27}{2}n+60\right) \geqq 0$$

整理すると　$n^2-18n+80 \leqq 0$　ゆえに　$(n-8)(n-10) \leqq 0$

したがって　$8 \leqq n \leqq 10$　n は自然数であるから　$n=8,\ 9,\ 10$

(i) $n=8$ のとき，これを $(**)$ に代入して整理すると

$$c^2+8c+16=0 \quad \text{これを解いて} \quad c=-4$$

(ii) $n=9$ のとき，これを $(**)$ に代入して整理すると

$$c^2+9c+\frac{39}{2}=0 \quad \text{これを解いて} \quad c=\frac{-9\pm\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $n=10$ のとき，これを $(**)$ に代入して整理すると

$$c^2+10c+25=0 \quad \text{これを解いて} \quad c=-5$$

(i)～(iii) より　$\boldsymbol{c=-4,-5,\dfrac{-9\pm\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \left[\ \frac{1}{2}(\log x)^2\ \right]_1^e = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $k = \displaystyle\int_1^e \frac{2f(t)+1}{2t}\,dt$ とおくと，$f(x) = 3\log x - kx$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{2f(t)+1}{2t}\,dt = \int_1^e \frac{2(3\log t - kt)+1}{2t}\,dt \\ &= 3\int_1^e \frac{\log t}{t}\,dt - k\int_1^e dt + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dt}{t} \\ &= 3\cdot\frac{1}{2} - k\Big[\ t\ \Big]_1^e + \frac{1}{2}\Big[\ \log t\ \Big]_1^e \\ &= \frac{3}{2} - k(e-1) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

これを解いて　$k = \dfrac{2}{e}$　よって　$\boldsymbol{f(x) = 3\log x - \dfrac{2x}{e}}$

(3) (2) の結果から　　$f'(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{e} = \dfrac{3e-2x}{ex}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{3e}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$3\log\frac{3}{2}$	$\searrow$

よって，$x = \dfrac{3e}{2}$ のとき，極大値 $\mathbf{3\log\dfrac{3}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\quad a_1 = 2, \quad 4a_{n+1} = 3a_n + \dfrac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

与えられた漸化式より

$$a_{n+1} - 1 = \frac{3{a_n}^2 - 4a_n + 1}{4a_n} = \frac{(a_n - 1)(3a_n - 1)}{4a_n} \quad \cdots (*)$$

「すべての自然数 n について，$a_n > 1$ である」を (A) とする．

［1］$a_1 = 2$ より，$n = 1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n = k$ のとき，$a_k > 1$ であると仮定すると

$$a_{k+1} - 1 = \frac{(a_k - 1)(3a_k - 1)}{4a_k} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{k+1} > 1$$

したがって，$n = k + 1$ のとき，(A) が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) が成立する．

(2) $(*)$ および (1) の結果から

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)(3a_n - 1)}{4a_n} < \frac{(a_n - 1)\cdot 3a_n}{4a_n} = \frac{3}{4}(a_n - 1)$$

よって $\quad a_{n+1} - 1 < \dfrac{3}{4}(a_n - 1)$

(3) (1) および (2) の結果から

$$0 < a_{n+1} - 1 < \frac{3}{4}(a_n - 1)$$

したがって $\quad 0 < a_n - 1 < (a_1 - 1)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$0 < a_n - 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n \to \infty} a_n = 1}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 2 数の積が 18 以下である組合せは，次の 20 組

$$\begin{array}{lll} 2=1\times 2, & 3=1\times 3, & 4=1\times 4, \\ 5=1\times 5, & 6=1\times 6=2\times 3, & 7=1\times 7, \\ 8=1\times 8=2\times 4 & 9=1\times 9, & 10=1\times 10=2\times 5, \\ 11=1\times 11, & 12=2\times 6=3\times 4, & 14=2\times 7, \\ 15=3\times 5, & 16=2\times 8, & 18=2\times 9=3\times 6 \end{array}$$

よって，求める確率は　$P(B)=\dfrac{20}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\dfrac{20}{55}=\mathbf{\dfrac{4}{11}}$

(2) 2 枚のカードの番号の和が奇数かつ積が 18 以下であるのは，次の 11 組

$$\begin{array}{lll} 2=1\times 2, & 4=1\times 4, & 6=1\times 6=2\times 3, \\ 8=1\times 8, & 10=1\times 10=2\times 5, & 12=3\times 4, \\ 14=2\times 7, & 18=2\times 9=3\times 6 & \end{array}$$

よって，求める確率は　$P(A\cap B)=\dfrac{11}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\dfrac{11}{55}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{11}-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{9}{55}}$$

(4) (2) の結果から

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $$f(x) = 3\int_1^x g(t)\,dt + g(x),\qquad g(x) = x^2 + \int_0^1 f'(t)\,dt$$

$a = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt$ とおくと

$$f(x) = 3\int_1^x g(t)\,dt + g(x),\quad g(x) = x^2 + a \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の 2 式をそれぞれ微分すると

$$f'(x) = 3g(x) + g'(x),\qquad g'(x) = 2x$$

$(*)$ および上の第 2 式を上の第 1 式に代入して

$$f'(x) = 3(x^2 + a) + 2x = \boldsymbol{3x^2 + 2x + 3a}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2 + 2t + 3a)\,dt \\ &= \Big[\, t^3 + t^2 + 3at \,\Big]_0^1 = 2 + 3a \end{aligned}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -1}$

(3) (2) の結果を $(*)$ の第 2 式に代入して　$g(x) = x^2 - 1$

よって
$$\begin{aligned} f(x) &= 3\int_1^x g(t)\,dt + g(x) \\ &= 3\int_1^x (t^2 - 1)\,dt + x^2 - 1 \\ &= \Big[\, t^3 - 3t \,\Big]_1^x + x^2 - 1 \\ &= \boldsymbol{x^3 + x^2 - 3x + 1} \end{aligned}$$