令和２年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　令和２年２月25日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ ある病原菌の検査試薬は，その病原菌に感染している個体に対し誤って陰性反応を示す確率が $\dfrac{3}{100}$ であり，感染していない個体に対し誤って陽性反応を示す確率が $\dfrac{1}{100}$ である．ある集団にこの試薬で病原菌の検査を行い，全体の 4%が陽性反応を示したとき，次の問に答えよ．

(1) 病原菌に感染している個体が陽性反応を示す確率を求めよ．

(2) この集団から 1 つの個体を取り出すとき，その個体が病原菌に感染している確率を求めよ．

(3) この集団の中で陽性反応を示した個体が，実際は病原菌に感染していない確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上に $\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ となる $\triangle\mathrm{OAB}$ がある．辺 AB を $2:1$ に内分する点を C とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $f(\theta) = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| + \sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ とするとき，$f(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(3) $0 < \theta < \pi$ における $f(\theta)$ の最大値，およびそのときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 < t < 2$ とする．$f(x) = x(3-x)$，$g(x) = 2x(x-2)$ とおく．曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq t)$ と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V_1(t)$ とする．曲線 $y = g(x)$ $(t \leqq x \leqq 2)$ と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V_2(t)$ とする．$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $V_1(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $V_2(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $0 < t < 2$ における $V(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

$\boxed{4}$ 自然数 n に対して，

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx, \quad b_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\,dx$$

とおくとき，次の問に答えよ．

(1) a_1 および b_1 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n，b_{n-1} を用いて表せ．また，b_n を n，a_{n-1} を用いて表せ．

(3) すべての自然数 n に対して，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ を示せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 b_n$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の問に答えよ．

(1) p，q を正の実数とし，正の実数 α，β が

$$\alpha - \beta = q, \quad \alpha\beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

を満たすとする．このとき，$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ は，方程式

$$x^3 + px - q = 0$$

の解であることを示せ．

(2) 3 次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつ．この実数解を求めよ．ただし，ただ 1 つの実数解をもつことは証明しなくてよい．

(3) 実数

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{28}{27}}}$$

は有理数である．この有理数の値を求めよ．

$\boxed{6}$ 自然数 n に対して，

$$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\, dx, \quad b_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx$$

とおくとき，次の問に答えよ．

(1) a_1 および b_1 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n を n，b_{n-1} を用いて表せ．また，b_n を n，a_{n-1} を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 b_n$ を求めよ．

$\boxed{7}$ 円 $x^2+(y-2)^2=25$ を C，直線 $y=-2x+7$ を ℓ とする．また，円 C と直線 ℓ の共有点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とする．ただし，$x_1<x_2$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 A，B の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 A，B および $\mathrm{C}(3, -2)$ を通るとき，a，b，c の値を求めよ．

(3) (2) で求めた放物線の点 A，B における接線とこの放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{8}$ 次の問に答えよ．

(1) t を実数とするとき，x に関する方程式

$$x+\frac{1}{x}=t$$

の正の実数解の個数を求めよ．

(2) k を正の実数とするとき，x に関する方程式

$$x^2+\frac{1}{x^2}-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=k$$

の正の実数解の個数を求めよ．

解答例

1 (1) 感染している事象を X，陽性と判定される事象を Y とすると

$$P_X(\overline{Y}) = \frac{3}{100},\quad P_{\overline{X}}(Y) = \frac{1}{100},\quad P(Y) = \frac{4}{100} \quad \cdots(*)$$

上の第 1 式および第 2 式から

$$\left.\begin{aligned} P_X(Y) &= 1 - P_X(\overline{Y}) = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100} \\ P_{\overline{X}}(\overline{Y}) &= 1 - P_{\overline{X}}(Y) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}\right\} \quad \cdots(**)$$

よって，求める確率 $P_X(Y)$ は $\boldsymbol{\dfrac{97}{100}}$

(2)
$$\begin{aligned} P(Y) &= P(X\cap Y) + P(\overline{X}\cap Y), \\ P(X\cap Y) &= P(X)P_X(Y), \\ P(\overline{X}\cap Y) &= P(\overline{X})P_{\overline{X}}(Y) = \{1 - P(X)\}P_{\overline{X}}(Y) \end{aligned}$$

上の第 2 式，第 3 式を第 1 式に代入すると

$$P(Y) = P(X)P_X(Y) + \{1 - P(X)\}P_{\overline{X}}(Y)$$

$(*)$，$(**)$ をこれに代入すると

$$\frac{4}{100} = P(X)\cdot\frac{97}{100} + \{1 - P(X)\}\cdot\frac{1}{100}$$

よって，求める確率 $P(X)$ は $\boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

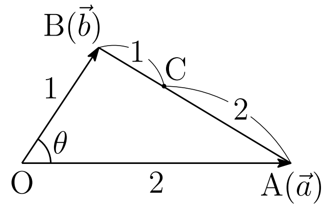
(3) (1)，(2) の結果により，求める確率は

$$\begin{aligned} P_Y(\overline{X}) &= \frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)} = \frac{P(Y) - P(Y\cap X)}{P(Y)} = 1 - \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} \\ &= 1 - \frac{P(X)}{P(Y)}\cdot\frac{P(X\cap Y)}{P(X)} = 1 - \frac{P(X)}{P(Y)}\cdot P_X(Y) \\ &= 1 - \frac{1}{32}\cdot\frac{100}{4}\cdot\frac{97}{100} = \boldsymbol{\frac{31}{128}} \end{aligned}$$

別解
$$\begin{aligned} P_Y(\overline{X}) &= \frac{P(Y\cap\overline{X})}{P(Y)} = \frac{P(\overline{X})}{P(Y)}\cdot\frac{P(\overline{X}\cap Y)}{P(\overline{X})} = \frac{1 - P(X)}{P(Y)}\cdot P_{\overline{X}}(Y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{32}\right)\cdot\frac{100}{4}\cdot\frac{1}{100} = \boldsymbol{\frac{31}{128}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$ (1) 点 C は AB を $2:1$ に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}}{\boldsymbol{3}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})}$$

(2) 与えられた条件から

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cos\theta$$

上式および (1) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \frac{2}{3}|\vec{b}-\vec{a}| = \frac{2}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \frac{1}{3}|\vec{a}+2\vec{b}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$$

よって　$f(\theta) = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| + \sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \dfrac{2}{3}\sqrt{5-4\cos\theta} + \sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+\cos\theta}$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\sqrt{5-4\cos\theta} + 2\sqrt{1+\cos\theta}\right)}$$

(3) $x = \sqrt{5-4\cos\theta}$，$y = 2\sqrt{1+\cos\theta}$ とおくと $(0 < \theta < \pi)$

$$(x+y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x-y)^2 = 18 - (x-y)^2 \leqq 18 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ において，等号が成立するとき，$x - y = 0$ であるから

$$\sqrt{5-4\cos\theta} - 2\sqrt{1+\cos\theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = \frac{1}{8}$$

$(*)$ および $f(\theta) = \dfrac{2}{3}(x+y)$ より

$$f(\theta) = \frac{2}{3}(x+y) \leqq \frac{2}{3}\sqrt{18} = 2\sqrt{2}$$

よって，$f(\theta)$ は，$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{8}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x(3-x)$ のとき，曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq t)$ と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V_1(t)$ は

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \pi \int_0^t x^2(3-x)^2\,dx \quad \cdots ① \\ &= \pi \int_0^t (x^4 - 6x^3 + 9x^2)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 \right]_0^t = \boldsymbol{\pi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{3}{2}t^4 + 3t^3 \right)} \end{aligned}$$

(2) $g(x) = 2x(x-2)$ のとき，曲線 $y = g(x)$ $(t \leqq x \leqq 2)$ と直線 $x = t$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V_2(t)$ は

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \pi \int_t^2 4x^2(x-2)^2\,dx \quad \cdots ② \\ &= 4\pi \int_t^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx \\ &= 4\pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_t^2 \\ &= \boldsymbol{4\pi \left(-\frac{t^5}{5} + t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{16}{15} \right)} \end{aligned}$$

(3) ①，② より

$$V_1'(t) = \pi t^2(3-t)^2, \quad V_2'(t) = -4\pi t^2(2-t)^2$$

$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ より

$$\begin{aligned} V'(t) &= \pi t^2(3-t)^2 - 4\pi t^2(2-t)^2 \\ &= \pi t^2\{(3-t)^2 - 4(2-t)^2\} = \pi t^2(7-3t)(t-1) \end{aligned}$$

したがって，$0 < t < 2$ における $V(t)$ の増減は

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	極小	↗	

(1)，(2) の結果から，極小値は

$$V(1) = V_1(1) + V_2(1) = \frac{17}{10}\pi + \frac{32}{15}\pi = \boldsymbol{\frac{23}{6}\pi}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $a_n=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\sin x\,dx,\quad b_n=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^n\cos x\,dx$ (n は自然数)

上の 2 式について，$x=\dfrac{\pi}{2}t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\pi}{2}$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

$$(*)\quad a_n=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt,\quad b_n=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\cos\frac{\pi}{2}t\,dt\quad (n\text{ は自然数})$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$a_1=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[-t\cos\frac{\pi}{2}t+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$
$$b_1=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[t\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^1=\boldsymbol{1-\frac{2}{\pi}}$$

(2) $(*)$ より，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt=-\int_0^1 t^n\left(\cos\frac{\pi}{2}t\right)'dt\\
&=-\left[t^n\cos\frac{\pi}{2}t\right]_0^1+n\int_0^1 t^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt\\
&=\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n-1}\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\boldsymbol{\frac{2n}{\pi}b_{n-1}},\\
b_n&=\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\int_0^1 t^n\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)'dt\\
&=\left[t^n\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}t\,dt\\
&=1-\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^{n-1}\sin\frac{\pi}{2}t\,dt=\boldsymbol{1-\frac{2n}{\pi}a_{n-1}}
\end{aligned}$$

(3) $0\leqq t\leqq 1$ において，$0\leqq t^n\sin\dfrac{\pi}{2}\leqq t^n$ であるから

$$0\leqq\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi}{2}t\,dt\leqq\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\,dt\quad\text{ゆえに}\quad 0\leqq a_n\leqq\frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)}=0$ であるから，上式にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$0 \leqq t^n \cos\dfrac{\pi}{2} \leqq t^n$ であるから

$$0 \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^1 t^n\,dt \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq b_n \leqq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ であるから，上式にはさみうちの原理を適用すると

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

(2) の結果より，$b_n = 1 - \dfrac{2n}{\pi}a_{n-1}$ であるから $(n \geqq 2)$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n}{\pi}a_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - na_{n-1}\right)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty} na_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot(n+1)a_n = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

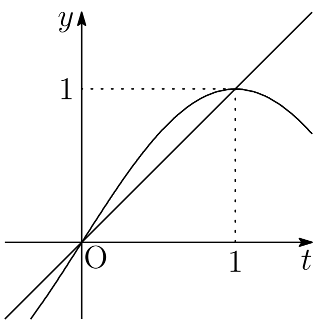
(2) の結果より，$a_n = \dfrac{2n}{\pi}b_{n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^2 b_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}na_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 b_n = \frac{\pi^2}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2 b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 b_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)^2 b_n = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

別解　$0 \leqq t \leqq 1$ において，$t \leqq \sin\dfrac{\pi}{2}t \leqq 1$ より



$$\int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \int_0^1 t^n\,dt$$

$$\frac{1}{n+2} \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{1}{n+1}$$

したがって

$$\frac{n\pi}{2(n+2)} \leqq na_n \leqq \frac{n\pi}{2(n+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} na_n = \frac{\pi}{2}$$

■

$\boxed{5}$ (1) $p,\ q,\ \alpha,\ \beta$ は正の実数であるから，$\alpha\beta = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ より　$p = 3\sqrt[3]{\alpha\beta}$

$q = \alpha - \beta$ であるから，方程式 $x^3 + px - q = 0$ は

$$x^3 + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}x - (\alpha - \beta) = 0 \quad \cdots(*)$$

$x = \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ を $(*)$ の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}(*)\text{ の左辺} &= (\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta})^3 + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) - (\alpha - \beta) \\ &= \alpha - 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2} - \beta \\ &\qquad\qquad + 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta} - 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2} - \alpha + \beta \\ &= 0\end{aligned}$$

よって，$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ は方程式 $x^3 + px - q = 0$ の解である．

(2) 3 次方程式 $x^3 + 6x - 2 = 0$ を (1) の結果に適用すると，$p = 6$，$q = 2$ より

$$\alpha - \beta = 2, \quad \alpha\beta = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$$

第 1 式から　$\alpha = \beta + 2$　これを第 2 式に代入すると

$$(\beta + 2)\beta = 8 \quad \text{ゆえに} \quad (\beta - 2)(\beta + 4) = 0$$

与えれた方程式から，$\beta > 0$ に注意して　$\beta = 2$　ゆえに　$\alpha = 4$

求める実数解は　$\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$，すなわち，$\boldsymbol{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$

(3) $t = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\dfrac{28}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\dfrac{28}{27}}}$ とし，

$$\alpha = 1 + \sqrt{\frac{28}{27}}, \quad \beta = -1 + \sqrt{\frac{28}{27}}$$

とすると

$$q = \alpha - \beta = 2, \quad p = 3\sqrt[3]{\alpha\beta} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = 1$$

(1) の結果から，t は方程式 $x^3 + px - q = 0$，すなわち，$x^3 + x - 2 = 0$ の解であるから

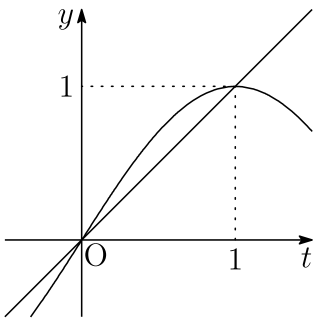
$$(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

t は実数であるから　$t = 1$　よって　求める有理数は　**1**　■

$\boxed{6}$ (1) $\boxed{4}$(1) を参照

(2) $\boxed{4}$(2) を参照

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ において，$t \leqq \sin\dfrac{\pi}{2}t \leqq 1$ より



$$\int_0^1 t^{n+1}\,dt \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \int_0^1 t^n\,dt$$

$$\frac{1}{n+2} \leqq \int_0^1 t^n \sin\frac{\pi}{2}t\,dt \leqq \frac{1}{n+1}$$

したがって

$$\frac{n\pi}{2(n+2)} \leqq na_n \leqq \frac{n\pi}{2(n+1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\pi}{2(1+\frac{2}{n})} \leqq na_n \leqq \frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{\pi}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{\pi}{2}}$$

(2) の結果より，$a_n = \dfrac{2n}{\pi}b_{n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^2 b_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}na_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 b_n = \frac{\pi^2}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^2 b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 b_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot(n+1)^2 b_n = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $C : x^2+(y-2)^2=25$ と直線 $\ell : y=-2x+7$ の方程式から y を消去すると

$$x^2+(-2x+7-2)^2=25 \quad \text{整理すると} \quad x(x-4)=0$$

これを解いて　$x=0,\ 4$　これらを ℓ の方程式に代入すると

$$x=0 \text{ のとき } y=7,\quad x=4 \text{ のとき } y=-1$$

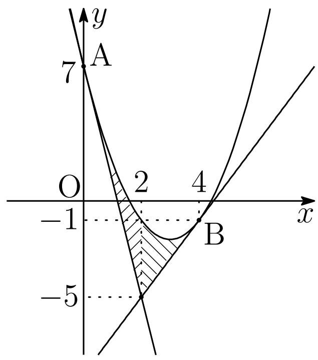
よって，x 座標に注意して　$\mathbf{A(0,\ 7)}$，　$\mathbf{B(4, -1)}$

(2) 放物線が点 A$(0,\ 7)$ を通るから，$y=ax^2+bx+7$ とおく．
これが 2 点 B$(4,-1)$，C$(3,-2)$ を通るから

$$-1=16a+4b+7,\quad -2=9a+3b+7$$

これを解いて　$a=1,\ b=-6$
よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=-6,\ c=7}$

(3) (2) の結果から，$f(x)=x^2-6x+7$ とおくと



$$f'(x)=2x-6$$

2 点 A，B における接線の傾きは，それぞれ

$$f'(0)=-6,\quad f'(4)=2$$

C 上の点 A$(0,\ 7)$ における接線は

$$y=-6x+7 \quad \cdots ①$$

C 上の点 B$(4,-1)$ における接線の方程式は

$$y-(-1)=2(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y=2x-9 \quad \cdots ②$$

2 直線 ①，② の交点の x 座標は

$$-6x+7=2x-9 \quad \text{これを解いて} \quad x=2$$

よって，求める面積を S とすると[1]

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \{(x^2-6x+7)-(-6x+7)\}\,dx \\
&\qquad\qquad + \int_2^4 \{(x^2-6x+7)-(2x-9)\}\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 (x-4)^2\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4 = \mathbf{\frac{16}{3}}
\end{aligned}
$$

■

8 (1) $(*)$ $x+\dfrac{1}{x}=t$ より　$x^2-tx+1=0$

$f(x)=x^2-tx+1$ とおくと

$$f(0)=1,\quad f(x)=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+1-\frac{t^2}{4}$$

(i) $t \leqq 0$ のとき，$x>0$ において，$f(x)>0$ であるから，
$f(x)=0$，すなわち，$(*)$ を満たす正の実数解 x は存在しない．

(ii) $0<t<2$ のとき，$1-\dfrac{t^2}{4}>0$ より，$f(x)>0$ であるから，
$f(x)=0$，すなわち，$(*)$ を満たす正の実数解 x は存在しない．

(iii) $t=2$ のとき，$f(x)=(x-1)^2$ により，$f(x)=0$，すなわち，
$(*)$ を満たす正の実数解 x は 1 の 1 個のみ．

(iv) $2<t$ のとき，$1-\dfrac{t^2}{4}<0$ より，$f(x)=0$，すなわち，
$(*)$ を満たす正の実数解 x は $\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ の 2 個．

(i)〜(iv) から，$(*)$ の正の実数解 x の個数は

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{t<2} \text{ **のとき** } & \mathbf{0}\text{ **個**} \\
\boldsymbol{t=2} \text{ **のとき** } & \mathbf{1}\text{ **個**} \\
\boldsymbol{2<t} \text{ **のとき** } & \mathbf{2}\text{ **個**}
\end{cases}
$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

(2) k を正の実数とする x に関する方程式

$$\text{(A)} \quad x^2+\frac{1}{x^2}-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=k$$

について，(∗) より

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2}-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17 &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+15 \\ &= t^2-8t+15 \\ &= (t-4)^2-1 \end{aligned}$$

$t \geqq 2$ のとき

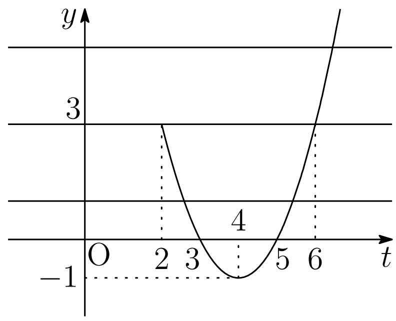
$$(t-4)^2-1=k \quad \cdots (**)$$

を満たす t の個数は，$y=(t-4)^2-1$ $(2 \leqq t)$ と $y=k$ $(k>0)$ の共有点の個数である．

(i) $0<k<3$ のとき，(∗∗) を満たす t が t_1 $(2<t_1<3)$，t_2 $(5<t_2<6)$ の 2 個存在し，それぞれの t の値に対して，正の実数 x が 2 個ずつ存在する．したがって，(A) を満たす正の実数 x は 4 個存在する．

(ii) $k=3$ のとき，(∗∗) を満たす t は $t=2,\ 6$ である．$t=2$ に対する正の実数 x は 1 個，$t=6$ に対する正の実数 x は 2 個存在する．したがって，(A) を満たす正の実数 x は 3 個存在する．

(iii) $3<k$ のとき，(∗∗) を満たす t が t_3 $(6<t_3)$ の 1 個存在し，この t の値に対して，正の実数 x が 2 個ずつ存在する．したがって，(A) を満たす正の実数 x は 2 個存在する．



(i)〜(iii) から，(A) の正の実数解 x の個数は

$$\begin{cases} \mathbf{0<k<3} \text{ のとき} & \mathbf{4}\text{個} \\ \mathbf{k=3} \text{ のとき} & \mathbf{3}\text{個} \\ \mathbf{3<k} \text{ のとき} & \mathbf{2}\text{個} \end{cases}$$

■