平成 31 年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　平成 31 年 3 月 12 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．また，辺 OA，OB を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q とし，辺 BC，AC を $s:(1-s)$ に内分する点をそれぞれ L，M とする．ただし，s と t は，それぞれ $0 < s < 1$ および $0 < t < 1$ をみたす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，s，t を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|^2$ を s，t を用いて表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|^2$ の最小値とそのときの s，t の値を求めよ．さらに，このとき四角形 PQLM が正方形となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_1 = 1$，$a_2 = 13$，および

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定まる自然数の数列 $\{a_n\}$ について，次の問に答えよ．

(1) 等式

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

をみたす数の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 2 つ求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) すべての自然数 n に対して，a_{3n} は a_n で割り切れることを示せ．

3 関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$ のグラフを C とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x) = 1$ をみたす x の値を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ を求め，$f(x)$ の極値をすべて求めよ．また，極限

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

を求めよ．

(3) 曲線 C の概形をかけ．ただし，凹凸，変曲点を調べる必要はないものとする．

(4) 定積分

$$\int_{-3}^{0} |f(x)-1|\,dx$$

を求めよ．

4 i を虚数単位とする．$\alpha = i$，$\beta = \sqrt{3}+i$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) α と β の偏角を 0 以上 2π 未満の範囲で求めよ．

(2) 点 α を中心として，点 β を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 γ を求めよ．

(3) 等式 $\left(\dfrac{\alpha}{|\alpha|}\right)^n = \left(\dfrac{\beta}{|\beta|}\right)^n$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．

5 実数を係数とする 0 でない整式 $f(x)$，$g(x)$ に対して，

$$F(x) = (f(x)+g(x))^3 + (f(x)-g(x))^3$$

とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $F(x)$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ．

(2) 実数 α に対して，$F(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れ，$(x-\alpha)^3$ では割り切れないとする．このとき，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ．

6 関数 $y = |x^2-1|$ のグラフを C とする．t が $\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq 1$ をみたすとき，曲線 C の $t \leqq x \leqq 2t$ をみたす部分，x 軸，2 直線 $x=t$，$x=2t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

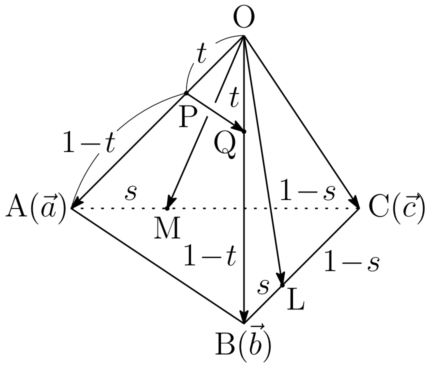
(1) $\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$S(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき，$S(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq 1$ のとき，$S(t)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの t の値をそれぞれ求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 辺OA，OBをそれぞれ $t:1-t$ に内分する点がP，Qであるから



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{t\vec{b} - t\vec{a}}$$

辺BC，ACをそれぞれ $s:1-s$ に内分する点がL，Mであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \boldsymbol{(1-s)\vec{b} + s\vec{c}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{(1-s)\vec{a} + s\vec{c}}$$

(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = |(1-s)\vec{b} + s\vec{c} - t\vec{a}|^2 \\
&= t^2|\vec{a}|^2 + (1-s)^2|\vec{b}|^2 + s^2|\vec{c}|^2 - 2(1-s)t\vec{a}\cdot\vec{b} + 2s(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c} - 2st\vec{c}\cdot\vec{a} \\
&= t^2 + (1-s)^2 + s^2 - (1-s)t + s(1-s) - st \\
&= \boldsymbol{s^2 + t^2 - s - t + 1}
\end{aligned}$$

(3) (2)の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{PL}}|^2 = \left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

$0<s<1$，$0<t<1$ より，$\boldsymbol{s = t = \dfrac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$s = t = \dfrac{1}{2}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{ML}} = \frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{QL}} = \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ML}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{QL}}|$　$\cdots$①

また　　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}} = (\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c} = 0$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PM}}$　$\cdots$②

①，② より　PQ = ML = PM = QL，PQ⊥PM

よって　　四角形PQLMは正方形

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0 \quad \cdots ①$$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots (*)$ より

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \quad \cdots ②$$

①，② の係数を比較して　$\alpha + \beta = 1,\ \ \alpha\beta = -6$

これを解いて　$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta) = (-2,\ 3),\ (3, -2)}$

(2) $(*)$ より，$\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1$，公比 β の等比数列であるから

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$$

$a_1 = 1$，$a_2 = 13$ および (1) の結果から

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 2a_n &= (13 + 2\cdot 1)\cdot 3^{n-1} = 5\cdot 3^n, \\ a_{n+1} - 3a_n &= (13 - 3\cdot 1)\cdot(-2)^{n-1} = -5\cdot(-2)^n \end{aligned}$$

上の 2 式から a_{n+1} を消去すると　$\boldsymbol{a_n = 3^n + (-2)^n}$

(3) $\alpha,\ \beta$ は整数で $\alpha^n + \beta^n \neq 0$ であるから，等式

$$\alpha^{3n} + \beta^{3n} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{2n} - \alpha^n\beta^n + \beta^{2n})$$

により，(2) の結果から，a_{3n} は a_n で割り切れる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}=1-\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ より，$f(x)=1$ とおくと

$$1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}=1 \quad ゆえに \quad 2x+2=0$$

よって　　$\boldsymbol{x=-1}$

(2) $f(x)=1-2\cdot\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ より

$$\begin{aligned} f'(x)&=-2\cdot\frac{(x+1)'(x^2+2x+2)-(x+1)(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}\\ &=-2\cdot\frac{(x^2+2x+2)-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=\boldsymbol{\frac{2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}}\end{aligned}$$

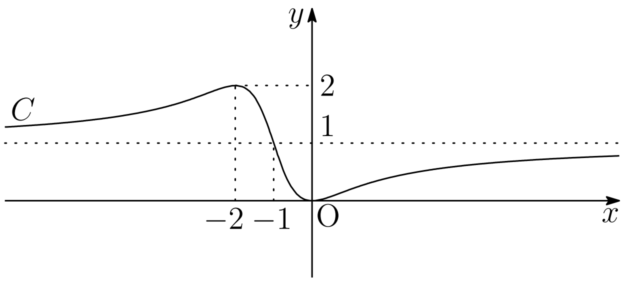
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　極大値 $f(-2)=\mathbf{2}$，極小値 $f(0)=\mathbf{0}$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=\mathbf{1},$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=\mathbf{1}$$

(3) (2) の結果から曲線 $C:y=f(x)$ の概形は次のようになる.



(4) $f(x)-1=-\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ より $(x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0)$

$$f(x)-1\geqq 0\ (-3\leqq x\leqq -1),\quad f(x)-1\leqq 0\ (-1\leqq x\leqq 0)$$

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}|f(x)-1|\,dx&=-\int_{-3}^{-1}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx\\ &=-\Big[\ \log(x^2+2x+2)\ \Big]_{-3}^{-1}+\Big[\ \log(x^2+2x+2)\ \Big]_{-1}^{0}\\ &=-(\log 1-\log 5)+(\log 2-\log 1)=\mathbf{\log 10}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\alpha = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$，$\beta = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって　　$\boldsymbol{\arg\alpha = \dfrac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{\arg\beta = \dfrac{\pi}{6}}$

(2) 点 α を中心として，点 β を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 γ は

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\gamma - i}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$$

よって　　$\gamma = i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}i) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i}$

(3) (1) の結果から

$$\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}, \quad \left(\frac{\beta}{|\beta|}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

次式が整数となる最小の自然数 n であるから

$$\frac{\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{n\pi}{6}}{2\pi} = \frac{n}{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n = 6}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $F(x)=(f(x)+g(x))^3+(f(x)-g(x))^3$ より

$$F(x)=2f(x)\{f(x)^2+3g(x)^2\} \quad \cdots(*)$$

よって，$F(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．

(2) $F(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れ，$(x-\alpha)^3$ で割り切れないから

$$\text{(A)} \quad F(\alpha)=0, \quad F'(\alpha)=0, \quad F''(\alpha)\neq 0$$

$F(\alpha)=0$ を $(*)$ に適用すると

$$2f(\alpha)\{f(\alpha)^2+3g(\alpha)^2\}=0$$

上式において，$f(\alpha)\neq 0$ と仮定すると

$$f(\alpha)^2+3g(\alpha)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad f(\alpha)=g(\alpha)=0$$

これは，仮定に反するので不適．したがって　$f(\alpha)=0 \quad \cdots$①

$(*)$ において

$$h(x)=2\{f(x)^2+3g(x)^2\} \quad \cdots(**)$$

とおき，これを微分すると

$$h'(x)=4\{f(x)f'(x)+3g(x)g'(x)\} \quad \cdots(***)$$

$(**)$ を用いると，$(*)$ およびその第 1 次，第 2 次導関数は

$$\begin{aligned} F(x)&=f(x)h(x)\\ F'(x)&=f'(x)h(x)+f(x)h'(x)\\ F''(x)&=f''(x)h(x)+2f'(x)h'(x)+f(x)h''(x)\end{aligned}$$

(A) および ① に注意して，上の第 2 式，第 3 式に $x=\alpha$ を代入すると

$$\begin{cases} F'(\alpha)=f'(\alpha)h(\alpha)=0 & \cdots② \\ F''(\alpha)=f''(\alpha)h(\alpha)+2f'(\alpha)h'(\alpha)\neq 0 & \cdots③ \end{cases}$$

② より　$f'(\alpha)=0$　または　$h(\alpha)=0$

$h(\alpha)=0$ と仮定すると，$(**)$ により

$$f(\alpha)=g(\alpha)=0 \quad (***) \text{ により} \quad h'(\alpha)=0$$

これは，③ に反するので，不適．

したがって，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$　よって，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = x^2 - 1$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$ とおく．

$\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{2t} |f(x)|\,dx = -\int_t^{2t} f(x)\,dx \\ &= -\Big[\ F(x)\ \Big]_t^{2t} = -F(2t) + F(t) \\ &= -\left(\frac{8t^3}{3} - 2t\right) + \left(\frac{t^3}{3} - t\right) = \boldsymbol{-\frac{7}{3}t^3 + t} \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{2t} |f(x)|\,dx = -\int_t^{1} f(x)\,dx + \int_1^{2t} f(x)\,dx \\ &= -\Big[\ F(x)\ \Big]_t^{1} + \Big[\ F(x)\ \Big]_1^{2t} = F(2t) + F(t) - 2F(1) \\ &= \left(\frac{8t^3}{3} - 2t\right) + \left(\frac{t^3}{3} - t\right) - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{3t^3 - 3t + \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

(3) (i) $\dfrac{1}{4} < t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$S'(t) = -7t^2 + 1 = -7\left(t + \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(t - \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq t < 1$ のとき　$S'(t) = 9t^2 - 3 = 3\left(t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

したがって，$S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{41}{192}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{7}}{21}$	$\searrow$	$\frac{5}{24}$	$\searrow$	$\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

ここで　$\dfrac{2\sqrt{7}}{21} = \dfrac{\sqrt{28}}{21} < \dfrac{\sqrt{36}}{21} < \dfrac{4}{3}$,

$$\begin{aligned} \frac{41}{192} - \frac{4-2\sqrt{3}}{3} > \frac{40}{192} - \frac{4-2\sqrt{3}}{3} &= \frac{5}{24} - \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}-27}{24} \\ &= \frac{\sqrt{3}(16-9\sqrt{3})}{24} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{256}-\sqrt{243})}{24} > 0 \end{aligned}$$

よって　最大値 $\boldsymbol{S(1) = \dfrac{4}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}}$