平成31年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　平成31年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部は，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ 数I・II・A・B (120分)
- 教育学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ 数I・II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 10本のくじの中に，当たりくじが t 本，はずれくじが $(10-t)$ 本入っているものとする．この中からくじを3本続けて引くとき，次の問に答えよ．ただし，$0 \leqq t \leqq 10$ とし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) 当たりくじがちょうど1本である確率を t を用いて表せ．

(2) 当たりくじが1本以下である確率 $P(t)$ を t を用いて表せ．

(3) (2) の $P(t)$ に対して，$P(t) \leqq \dfrac{1}{2}$ をみたす t をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標空間の原点をOとし，4つの点

$$\mathrm{A}(1,0,-1),\quad \mathrm{B}(0,1,1),\quad \mathrm{C}(1,1,1),\quad \mathrm{D}\left(0,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を α とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) α の値を求めよ．

(2) 3点O，A，Bの定める平面に，点Cから垂線CPを下ろす．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の形に表すとき，s と t の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を成分で表せ．

(3) (2) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ に対して，点Eは，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = k\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ $(k>0)$ と表され，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = \alpha$ をみたすとする．$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心をGとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a>1$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=a\sin x+\dfrac{a}{a-1}\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，x 軸，2 直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(3) $a>1$ における，(2) の V の最小値とそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ i を虚数単位とし，$\theta=\dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とする．また，

$$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\alpha^7=1$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k=0$ を示せ．

(2) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2\cos\theta$ を示せ．これと (1) を用いて，$f(\cos\theta)=0$ を示せ．

(3) $f(\cos 2\theta)=0$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 10 本のくじの中に，当たりくじが t 本，はずれくじが $(10-t)$ 本入っているものとする．この中からくじを 3 本続けて引くとき，次の問に答えよ．ただし，$0\leqq t\leqq 10$ とし，引いたくじは戻さないものとする．

(1) 当たりくじがちょうど 1 本である確率を t を用いて表せ．

(2) 当たりくじが 1 本以下である確率を $P(t)$ とするとき，$P(t)\leqq\dfrac{1}{2}$ をみたす t をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $a>1$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y=a\sin x+\dfrac{a}{a-1}\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，x 軸，2 直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(2) $a>1$ における，(1) の V の最小値とそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ i を虚数単位とし，$\theta = \dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とする．また，

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\alpha^7 = 1$ および $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \alpha^k = 0$ を示せ．

(2) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\cos\theta$ を示せ．これと (1) を用いて，$f(\cos\theta) = 0$ を示せ．

(3) $\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ が，方程式 $f(x) = 0$ の解となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ n，m を 0 以上の整数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 自然数 x，y に対して，$x^2 + y^2$ が 3 の倍数ならば，x，y はともに 3 の倍数であることを示せ．

(2) $x^2 + y^2 = 5{\cdot}3^{2n}$ をみたす自然数の組は $(x,\ y)$ は

$$(3^n,\ 2{\cdot}3^n), \quad (2{\cdot}3^n,\ 3^n)$$

のみであることを示せ．

(3) $x^2 + y^2 = 7{\cdot}3^m$ をみたす自然数 x，y は存在しないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ a を実数とし，$t = \sin x + \cos x$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\sin 2x$ を t を用いて表せ．

(2) x がすべての実数を動くとき，t の動く範囲を求めよ．

(3) x の方程式

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + 6a + 1 = 0$$

が実数解をもつような a の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ a を正の実数とする．C を放物線 $y = x^2$ とし，ℓ を直線 $y = 2ax - a^3$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) のとき，C と ℓ で囲まれた図形の面積を S とする．S を a を用いて表せ．

(3) (2) の S の最大値とそのときの a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 当たりくじがちょうど1本であるとき，t本の当たりくじから1本，$(10-t)$本のはずれくじから2本引くから

$$t \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad 10-t \geqq 2 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq t \leqq 8$$

上式のtの値について，その確率は

$$\frac{{}_t\mathrm{C}_1 \cdot {}_{10-t}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{t(10-t)(9-t)}{240} \quad \cdots ①$$

$t=0,\ 9,\ 10$のとき，当たりじくをちょうど1本引くことはできないから，その確率は0で，このときも①は成立する．

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{t(10-t)(9-t)}{240}}$

(2) 3本ともはずれじくとき，$(10-t)$本のはずれくじから3本引くから

$$10-t \geqq 3 \quad \text{すなわち} \quad t \leqq 7$$

このtの値に，その確率は

$$\frac{{}_{10-t}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720}$$

$t=8,\ 9,\ 10$のとき，3本ともはずれくじを引くことはできないから，その確率は0で，このときも上式は成立する．これと(1)の結果から

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{(10-t)(9-t)(8-t)}{720} + \frac{t(10-t)(9-t)}{240} \\ &= \boldsymbol{\frac{(10-t)(9-t)(4+t)}{360}} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果を$P(t) \leqq \dfrac{1}{2}$に適用すると　$\dfrac{(10-t)(9-t)(4+t)}{360} \leqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに　$(t-5)(t^2-10t-36) \leqq 0$

さらに　$(t-5+\sqrt{61})(t-5)(t-5-\sqrt{61}) \leqq 0$

これを解いて　$t \leqq 5-\sqrt{61},\ \ 5 \leqq t \leqq 5+\sqrt{61}$

tは，$0 \leqq t \leqq 10$を満たす整数であることに注意して

$$\boldsymbol{t = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10}$$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1,\ 1)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1$$

よって　$\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-(-1)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2s+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})t=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$,

$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})s+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2t=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 1,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2$ であるから

$$2s-t=0,\quad -s+2t=2\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{s=\frac{2}{3},\ t=\frac{4}{3}}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{2}{3}(1,\ 0,-1)+\frac{4}{3}(0,\ 1,\ 1)-(1,\ 1,\ 1)=\boldsymbol{\frac{1}{3}(-1,\ 1,-1)}$$

(3) (2) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ $(k>0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\alpha$ より

$$\alpha=k|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}k\quad \text{これから}\quad k=\frac{3}{2}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{2}(-1,\ 1,-1)$,

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-\left(0,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(-1,\ 2,-2)$$

$\triangle$ABC の重心が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{3}(2,\ 2,\ 1)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\{2\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot(-2)\}=0$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ x + \frac{1}{2}\sin 2x\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ x - \frac{1}{2}\sin 2x\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\Big[\ \cos 2x\ \Big]_0^{\pi} = \mathbf{0}$$

(2) 求める立体の体積 V は，(1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\pi}\left(a\sin x + \frac{a}{a-1}\cos x\right)^2 dx \\ &= a^2\int_0^{\pi}\sin^2\ dx + \frac{2a^2}{a-1}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx \\ &= a^2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2a^2}{a-1}\cdot 0 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left\{a^2 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{V = \dfrac{\pi^2}{2}\left\{a^2 + \left(\dfrac{a}{a-1}\right)^2\right\}}$

(3) $\qquad a^2 = \{(a-1)+1\}^2 = (a-1)^2 + 2(a-1) + 1$

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{a-1}+1\right)^2 = \frac{1}{(a-1)^2} + \frac{2}{a-1} + 1$$

$b = a-1$ とおくと，$a > 1$ より，$b > 0$ であるから

$$\begin{aligned}a^2 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 &= b^2 + 2b + 1 + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{b} + 1 \\ &= b^2 + \frac{1}{b^2} + 2\left(b + \frac{1}{b}\right) + 2 \\ &= b^2 - 2 + \frac{1}{b^2} + 2\left(b - 2 + \frac{1}{b}\right) + 8 \\ &= \frac{(b^2-1)^2}{b^2} + \frac{(b-1)^2}{b} + 8 \geqq 8 \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

$b = 1$，すなわち，$a = 2$ のとき，$(*)$ において等号が成立する．
$(*)$ および (1) の結果から，$\boldsymbol{a = 2}$ のとき，V は最小値 $\boldsymbol{4\pi^2}$ をとる．

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $\theta = \dfrac{2}{7}\pi$，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta \cdots$ ① より

$$\alpha^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$\alpha^7 - 1 = 0$ であるから，等式 $\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\alpha^k$ により

$$(\alpha - 1)\sum_{k=0}^{6}\alpha^k = 0 \quad \text{また，} \alpha - 1 \neq 0 \text{ より} \quad \sum_{k=0}^{6}\alpha^k = 0$$

(2) (1) の結果から　$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \cdots (*)$

したがって　$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha^3} = 0$

$\alpha^3 + \dfrac{1}{\alpha^3} = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$，$\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 - 2$ により

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 1 = 0$$

① および $\dfrac{1}{\alpha} = \cos\theta - i\sin\theta$ より，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}(2\cos\theta)^3 + (2\cos\theta)^2 - 2(2\cos\theta) - 1 &= 0\\ 8\cos^3\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 1 &= 0\end{aligned}$$

上式より，$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ について　$f(\cos\theta) = 0$

(3) $\beta = \alpha^2$ とすると，$\alpha^7 = 1$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned}\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 &= \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1\\ &= \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1\\ &= 0\end{aligned}$$

$\beta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ であるから　$\beta + \dfrac{1}{\beta} = 2\cos 2\theta$

したがって，(2) と同様にして　$f(\cos 2\theta) = 0$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{\mathbf{1}}$(1) を参照.

(2) $\boxed{\mathbf{1}}$(2)，(3) を参照.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\boxed{\mathbf{3}}$(2) を参照.

(2) $\boxed{\mathbf{3}}$(3) を参照.

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\boxed{\mathbf{4}}$(1) を参照.

(2) $\boxed{\mathbf{4}}$(2) を参照.

(3) $\boxed{\mathbf{4}}$(3) より，$\cos 2\theta$ は $f(x)=0$ の解である.

$\gamma=\alpha^3$ とすると，$\alpha^7=1$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned}\gamma^6+\gamma^5+\gamma^4+\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1 &= \alpha^{18}+\alpha^{15}+\alpha^{12}+\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1\\ &= \alpha^4+\alpha+\alpha^5+\alpha^2+\alpha^6+\alpha^3+1\\ &= 0\end{aligned}$$

$\gamma=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ であるから $\qquad \gamma+\dfrac{1}{\gamma}=2\cos 3\theta$

同様に，$\cos 3\theta$ は $f(x)=0$ の解である.

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $x \equiv 0 \Longrightarrow x^2 \equiv 0,\ \ x \equiv \pm 1 \Longrightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 3$ より

$$x^2 \equiv 0 \Longleftrightarrow x \equiv 0, \quad x^2 \equiv 1 \Longleftrightarrow x \equiv \pm 1, \quad x^2 \not\equiv -1 \pmod 3$$

よって　$x^2 + y^2 \equiv 0 \Longrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \Longrightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$

(2)
$$x^2 + y^2 = 5{\cdot}3^{2n} \quad \cdots (*)$$

(i) $(*)$ について，$n = 0$ のとき　　$x^2 + y^2 = 5$

これをみたす自然数 $x,\ y$ は 1 または 2 であるから，求める組は

$$(x,\ y) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

(ii) $(*)$ について，$n > 0$ のとき，$(*)$ は 3 の倍数であるから，(1) の結果から $x,\ y$ はともに 3 の倍数であるから，$x,\ y$ が 3^l $(l \leqq n)$ で割り切れ，$\dfrac{x}{3^l}$，$\dfrac{y}{3^l}$ の少なくとも一方は 3 で割り切れないとする．

$$\left(\frac{x}{3^l}\right)^2 + \left(\frac{y}{3^l}\right)^2 = 5{\cdot}3^{2(n-l)}$$

$l < n$ ならば，上式の右辺は 3 の倍数となり，(1) の結論から，$\dfrac{x}{3^l}$，$\dfrac{y}{3^l}$ がともに 3 で割り切れ，矛盾を生じる．

したがって，$l = n$ となり　　$\left(\dfrac{x}{3^n}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3^n}\right)^2 = 5$

(i) の結果を利用して　　$\left(\dfrac{x}{3^n},\ \dfrac{y}{3^n}\right) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i),(ii) より　$(x,\ y) = (3^n,\ 2{\cdot}3^n),\ (2{\cdot}3^n,\ 3^n)$

(3)
$$x^2 + y^2 = 7{\cdot}3^m \quad \cdots (**)$$

(i) $(**)$ について，$m = 0$ のとき　　$x^2 + y^2 = 7$

これをみたす自然数 $(x,\ y)$ の組は存在しない．

(ii) $(**)$ について，$m > 0$ のとき，$(**)$ は 3 の倍数であるから，(1) の結果から $x,\ y$ はともに 3 の倍数であるから，$x,\ y$ が 3^k $(2k \leqq m)$ で割り切れ，$\dfrac{x}{3^k}$，$\dfrac{y}{3^k}$ の少なくとも一方は 3 で割り切れないとする．

$$\left(\frac{x}{3^k}\right)^2 + \left(\frac{y}{3^k}\right)^2 = 7{\cdot}3^{m-2k}$$

$2k < m$ ならば，上式の右辺は 3 の倍数となり，(1) の結論から，$\dfrac{x}{3^k}$，$\dfrac{y}{3^k}$ がともに 3 で割り切れ，矛盾を生じる．

したがって，$2k = m$ となり　　$\left(\dfrac{x}{3^k}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3^k}\right)^2 = 7$

(i) の結果により，これをみたす自然数 $\dfrac{x}{3^k}$，$\dfrac{y}{3^k}$ は存在しない．

(i),(ii) により，$(**)$ をみたす自然数 $x,\ y$ は存在しない．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

よって $\qquad \boldsymbol{\sin 2x = t^2 - 1}$

(2) $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $\quad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(3) x の方程式

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}a(\sin x + \cos x) + 6a + 1 = 0 \quad \cdots(*)$$

について，(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}(*)\text{ の左辺} &= (t^2 - 1) - 2\sqrt{2}at + 6a + 1\\ &= t^2 - 2\sqrt{2}at + 6a\\ &= (t - \sqrt{2}a)^2 - 2a^2 + 6a\end{aligned}$$

t に関する 2 次関数

$$f(t) = t^2 - 2\sqrt{2}at + 6a \ (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

の最大値を M，最小値を m とすると

$$M = \begin{cases} f(-\sqrt{2}) & (a > 0)\\ f(\sqrt{2}) & (a \leqq 0)\end{cases}, \quad m = \begin{cases} f(-\sqrt{2}) & (a < -1)\\ f(\sqrt{2}a) & (-1 \leqq a \leqq 1)\\ f(\sqrt{2}) & (1 < a)\end{cases}$$

$f(\sqrt{2}) = 2a + 2$，$f(-\sqrt{2}) = 10a + 2$，$f(\sqrt{2}a) = -2a(a - 3)$ より

(i) $a < -1$ のとき $\qquad M = f(\sqrt{2}) < 0$

(ii) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき $\quad \begin{cases} M = f(\sqrt{2}) \geqq 0\\ m = f(\sqrt{2}a) \leqq 0\end{cases}$

(iii) $0 < a \leqq 1$ のとき $\qquad m = f(\sqrt{2}a) > 0$

(iv) $1 < a$ のとき $\qquad m = f(\sqrt{2}) > 0$

(i)〜(iv) より，$(*)$ が実数解をもつ a の値の範囲は $\quad \boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 0}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $C: y=x^2$ と $\ell: y=2ax-a^3$ から y を消去して整理すると

$$x^2-2ax+a^3=0 \quad \cdots(*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，$(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=a^2-a^3>0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2(a-1)<0$$

$a>0$ により　　$\boldsymbol{0<a<1}$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解は　$x=a\pm\sqrt{a^2-a^3}$

$\alpha=a-\sqrt{a^2-a^3}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-a^3}$ とおくと

$$x^2-2ax+a^3=(x-\alpha)(x-\beta), \quad \beta-\alpha=2\sqrt{a^2-a^3}$$

求める図形の面積 S は，上の 2 式に注意して

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{(2ax-a^3)-x^2\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{a^2-a^3})^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}\{a^2(1-a)\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(3) 3 正数 $a,\ a,\ 2(1-a)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{a+a+2(1-a)}{3}\geqq\sqrt[3]{a\cdot a\cdot 2(1-a)} \quad \text{ゆえに} \quad a^2(1-a)\leqq\frac{4}{27}$$

上式において，等号が成立するは　$a=2(1-a)$　すなわち　$a=\dfrac{2}{3}$

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4}{27}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{32\sqrt{3}}{729}}$ をとる．