平成30年度　佐賀大学２次試験後期日程(数学問題)
理工・農学部　平成30年3月12日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ 数I・II・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 点$(0,\ a)$を中心とする半径2の円Cの周上に3点$\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(x,\ y)$をとる．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{RP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$の内積を$a$，$t$，$y$を用いて表せ.

(2) $a=0$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$のとき，(1)の内積の最小値とそのときのs，t，x，yの値を求めよ.

(3) $y=a$のとき，(1)の内積の最大値とそのときのsの値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ kは定数とする．関数

$$f(x)=x^3-3kx^2-2k^2x$$

が$x=\alpha$で極大値，$x=\beta$で極小値をとる．ただし，$-1<\alpha<1<\beta$とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) kのとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $\beta-\alpha$をkを用いて表せ.

(3) $f(\alpha)-f(\beta)$をkを用いて表せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b，cは定数とし，

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$$

とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) $f(x)$が相異なる極値をもつための条件を求めよ.

(2) $f(x)$がただ1つの極値として極大値をもつための条件を求めよ．さらに，$f(x)$が極大値をとるxの値x_0を求めよ.

(3) (2)の条件が満たされているとき，2直線$y=0$，$x=x_0$および曲線$y=f(x)$で囲まれる図形の面積Sを求めよ.

4 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ で定義された2曲線 $C_1 : y = \sin x$，$C_2 : y = \cos x$ および $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$ で定義された曲線 $C_3 : y = \tan 2x$ について，次の問に答えよ．

(1) C_2 と C_3 の交点の x 座標を a とおくとき，$\sin a$ の値を求めよ．

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において，不等式 $\sin x < \tan 2x$ が成り立つことを示せ．

(3) 3曲線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

5 次の問に答えよ．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が関係式

$$a_1 = 1, \quad \log_3 \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

6 n，m を自然数とし，p，q を相異なる素数とする．ただし，$p \geqq 5$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) n が積 pq で割り切れるとき，n 以下の自然数で p の倍数または q の倍数となるものの個数 N_1 を p，q，n を用いて表せ．

(2) $n = 2p^m$ であるとき，n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数 N_2 を p，m を用いて表せ．

(3) $n = 6p^m$ であるとき，n 以下の自然数で n と互いに素であるものの個数 N_3 を p，m を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(x,\ y)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(s-x,\ t-y),\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(-s-x,\ t-y)$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}&=(s-x)(-s-x)+(t-y)^2\\&=x^2-s^2+t^2-2ty+y^2\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\mathrm{R}(x,\ y)$，$\mathrm{P}(s,\ t)$ は C 上の点であるから

$$x^2+(y-a)^2=4,\quad s^2+(t-a)^2=4$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned}x^2-s^2+(y-a)^2-(t-a)^2=0\\x^2-s^2=-y^2+2ay+t^2-2at\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② から x，s を消去すると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=2t^2-2at+2ay-2ty}$$

(2) $a=0$ を (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=2t^2-2ty=2\left(t-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{2}\quad\cdots(*)$$

このとき，C は原点を中心とする半径 2 の円で，$\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{R}(x,\ y)$ はこの円周上の $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たす点であるから，$(*)$ を最小とするのは

$$t-\frac{y}{2}=0,\quad y=2\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{x=0,\ y=2,\ s=\sqrt{3},\ t=1}$$

このとき，$(*)$ は，最小値 $\boldsymbol{-2}$ をとる．

(3) $y=a$ を (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=2t^2-4at+2a^2=2(t-a)^2\quad\cdots(**)$$

このとき，C は点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 2 の円で，$\mathrm{P}(s,\ t)$ はこの円周上の点であるから

$$a-2\leqq t\leqq a+2$$

よって，$t=a\pm 2$，すなわち，$\boldsymbol{s=0}$ のとき，$(**)$ は最大値 $\boldsymbol{8}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^3 - 3kx^2 - 2k^2x$ より　$f'(x) = 3x^2 - 6kx - 2k^2 \quad \cdots (*)$

$f'(x) = 0$ の解 α, β が $-1 < \alpha < 1 < \beta$ を満たすから，$f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$ より

$$\begin{cases} 3 + 6k - 2k^2 > 0 \\ 3 - 6k - 2k^2 < 0 \end{cases}$$

第 1 式を解いて　$\dfrac{3 - \sqrt{15}}{2} < k < \dfrac{3 + \sqrt{15}}{2}$

第 2 式を解いて　$k < \dfrac{-3 - \sqrt{15}}{2}$, $\dfrac{-3 + \sqrt{15}}{2} < k$

これらの共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{-3 + \sqrt{15}}{2} < k < \dfrac{3 + \sqrt{15}}{2}}$

(2) $f'(x) = 0$，すなわち，$3x^2 - 6kx - 2k^2 = 0$ の解が α, β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = -\frac{2}{3}k^2$$

したがって
$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (2k)^2 - 4\cdot\left(-\frac{2}{3}k^2\right) = \frac{20}{3}k^2 \end{aligned}$$

$\beta - \alpha > 0$，また，(1) の結果から $k > 0$ であるから

$$\boldsymbol{\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{15}}{3}k}$$

(3) $(*)$ および $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ より，$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x - \alpha)(x - \beta)\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}k\right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{20\sqrt{15}}{9}k^3} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ より

$$f'(x) = \{-ax^2 + (2a - b)x + b - c\}e^{-x} \quad \cdots (*)$$

$f(x)$ が相異なる極値をもつための条件は，2 次方程式

$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c = 0$$

が相異なる実数解をもつことであるから

$$-a \neq 0, \quad (2a - b)^2 - 4(-a)(b - c) > 0$$

よって $\qquad \boldsymbol{a \neq 0,\ \ 4a^2 + b^2 - 4ac > 0}$

(2) $f(x)$ がただ 1 つの極値をもつから，$(*)$ より

$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c$$

が x の 1 次式であるから $\quad -a = 0 \quad$ すなわち $\quad a = 0$
さらに，それが極大値であるから，1 次式

$$-bx + b - c$$

の 1 次の係数について $\quad -b < 0 \quad$ すなわち $\quad b > 0$

したがって，求める条件は $\qquad \boldsymbol{a = 0,\ b > 0}$

また，$f(x)$ が極大値をとる x の値 x_0 は，$b \neq 0$ に注意して

$$-bx_0 + b - c = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x_0 = 1 - \frac{c}{b}}$$

(3) (2) の条件を満たすとき，曲線 $y = f(x)$，すなわち，$y = (bx + c)e^{-x}$ は，直線 $y = 0$ と $x = -\dfrac{c}{b}$ で交わり，区間 $-\dfrac{c}{b} \leqq x \leqq 1 - \dfrac{c}{b}$ において，$b > 0$ より，$f(x) \geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{c}{b}}^{1-\frac{c}{b}} (bx + c)e^{-x}\,dx = -\Big[\,(bx + c + b)e^{-x}\,\Big]_{-\frac{c}{b}}^{1-\frac{c}{b}} \\ &= \Big[\,(bx + c + b)e^{-x}\,\Big]_{1-\frac{c}{b}}^{-\frac{c}{b}} = be^{\frac{c}{b}} - 2be^{-1+\frac{c}{b}} = \boldsymbol{be^{\frac{c}{b}}(1 - 2e^{-1})} \end{aligned}$$

補足 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx} f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} + C$$

$$\int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) C_2 と C_3 の交点の x 座標が a であるから　$\cos a = \tan 2a$

ここで　$\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{2\sin a\cos a}{1-2\sin^2 a}$

したがって　$\cos a = \dfrac{2\sin a\cos a}{1-2\sin^2 a}$

$0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos a \neq 0$ に注意して整理すると

$$2\sin^2 a + 2\sin a - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

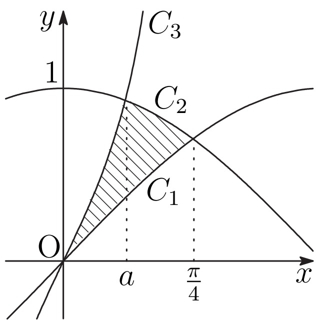
$0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 \leqq \sin a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に注意して　$\boldsymbol{\sin a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < x < 2x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\tan 2x > \tan x > \sin x$$

よって　$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ において　$\sin x < \tan 2x$

(3) 求める面積 S は，右の図の斜線部分である．



$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \tan 2x\,dx + \int_a^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\log|\cos 2x| \right]_0^a + \Big[\sin x \Big]_a^{\frac{\pi}{4}} + \Big[\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2}\log|\cos 2a| - \sin a + \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

ここで，① を利用して　$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 2\sin a = \sqrt{3} - 1$

よって　$S = -\dfrac{1}{2}\log(\sqrt{3}-1) - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{2} - 1$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log(\sqrt{3}-1) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)&=\cos 2\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2\theta\sin\frac{\pi}{3}\\&=\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\end{aligned}$$

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$\sin\theta>0$ より

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},\\\cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25},\\\sin 2\theta&=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

よって　$\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{7}{25}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{24}{25}=\boldsymbol{-\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}}$

(2) 与えられた漸化式から　$\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n=2^n\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(\log_3 a_{k+1}-\log_3 a_k)&=\sum_{k=1}^{n-1}2^k\\\log_3 a_n-\log_3 a_1&=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}\quad(a_1=1)\\\log_3 a_n-\log_3 1&=2^n-2\\a_n&=3^{2^n-2}\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=3^{2^n-2}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) n が pq で割り切れるとき (p, q は相異なる素数)

p の倍数の個数は $\dfrac{n}{p}$, q の倍数の個数は $\dfrac{n}{q}$, pq の倍数の個数は $\dfrac{n}{pq}$

したがって，p の倍数または q の倍数の個数 N_1 は

$$N_1 = \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq} = \boldsymbol{n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{pq}\right)}$$

(2) 一般に，$n = p^iq^j$ のとき (p, q は相異なる素数，i, j は自然数)，
n 以下の自然数で

p の倍数の個数は $\dfrac{n}{p}$, q の倍数の個数は $\dfrac{n}{q}$, pq の倍数の個数は $\dfrac{n}{pq}$

n 以下の自然数で，n と互いに素であるものの個数 N_2 は[1]

$$N_2 = n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

ここでは，$n = 2p^m$ であるから

$$N_2 = n\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \boldsymbol{p^m\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

(3) 一般に，$n = p^iq^jr^k$ のとき (p, q, r は相異なる素数，i, j, k は自然数)，
n 以下の自然数で

p の倍数の個数は $\dfrac{n}{p}$, q の倍数の個数は $\dfrac{n}{q}$, r の倍数の個数は $\dfrac{n}{r}$,

pq の倍数の個数は $\dfrac{n}{pq}$, qr の倍数の個数は $\dfrac{n}{qr}$, rp の倍数の個数は $\dfrac{n}{rp}$,

pqr の倍数の個数は $\dfrac{n}{pqr}$,

n 以下の自然数で，n と互いに素であるものの個数 N_3 は

$$\begin{aligned} N_3 &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r} - \frac{n}{pq} - \frac{n}{qr} - \frac{n}{rp} + \frac{n}{pqr}\right) \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

ここでは，$n = 6p^m = 2{\cdot}3p^m$ であるから (p は 5 以上の素数)

$$N_3 = n\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \boldsymbol{2p^m\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf $\boxed{1}$ を参照