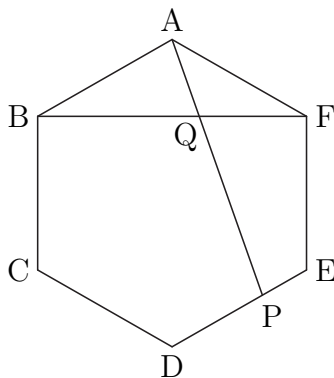


平成 30 年度 佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理工・医・農・教育学部 平成 30 年 2 月 25 日

- 理工学部は， [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は， [3] ~ [6] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は， [1], [7] ~ [9] 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部は， [1], [7], [9] 数 I・II・A・B (100 分)

- [1] 下の図のような 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において，線分 DE を 2:1 に内分する点を P とし，直線 AP と直線 BF の交点を Q とする． $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とおくととき，次の問に答えよ．



- (1) \overrightarrow{AD} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ．
- (2) \overrightarrow{AP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ．
- (3) \overrightarrow{AQ} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ．
- (4) $|\overrightarrow{AQ}|$ の値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で定められているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 4つの有理数 p, q, r, s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする．このとき， $p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ．ただし， $\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい．

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと， $a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数) と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ．

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して， p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ．

3 $f(x) = xe^{-x}$ とする． $O(0, 0)$ ， $P(t, 0)$ ， $Q(t, f(t))$ ， $R(4, 0)$ とする．ただし， $0 < t < 4$ とする． $\triangle PQR$ の面積を $S_1(t)$ とし，線分 OQ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする． $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ は用いてよい．

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(4) $S(t)$ の極値を求めよ．

- 4 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 $P(t, \log t)$ をとる。ただし、点 P および原点を通る直線と点 P における曲線 C の接線が垂直に交わっているものとする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $\log t$ を t についての整式で表せ。
 (2) $0 < x < 1$ の範囲で不等式

$$2 \log x < -x^2 + 4x - 3$$

が成立することを示せ。

- (3) $S = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}$ とおく。 $S = \frac{f(t)}{g(t)}$ となるような t についての整式 $f(t), g(t)$ を一組求めよ。また、 $S > 1.1$ となることを示せ。

- 5 次の間に答えよ。

- (1) 1, 4, 9, 16 のように、自然数の 2 乗で表せる数を平方数という。 n を平方数でない自然数とすると、 \sqrt{n} は無理数であることを示せ。
 (2) a, b を正の有理数、 n を自然数とすると、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ。

- 6 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり、すべての実数 x, y について等式

$$f(x+y) = f(x) \cos y + f(y) \cos x$$

が成り立つとする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
 (2) a を実数とする。 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であることを示せ。
 (3) $f'(0) = 3$ であるとする。 $f'(x)$ および $f(x)$ を求めよ。

- 7 $f(x) = 2x(3-x), g(x) = x(x-4)$ とおき、 $0 < t < 3$ とする。 $0 \leq x \leq t$ の範囲での曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$ とする。 $t \leq x \leq 4$ の範囲での曲線 $y = g(x)$, x 軸, 直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする。 $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $S_1(t)$ を t を用いて表せ。
 (2) $S_2(t)$ を t を用いて表せ。
 (3) t が $0 < t < 3$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値を求めよ。

8 a を正の数とする．放物線 $C_1 : y = x^2$ を x 軸方向に a , y 軸方向に $2a$ だけ平行移動した放物線を C_2 とする． C_1 と C_2 の交点を P とするとき，次の問に答えよ．

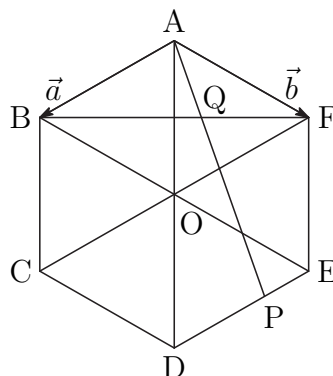
- (1) 点 P の座標を a を用いて表せ．
- (2) 放物線 C_2 の点 P における接線の方程式を a を用いて表せ．
- (3) (2) で求めた接線の傾きと y 切片がともに正となるような正数 a の値の範囲を求めよ．

9 座標平面上で，点 P は原点 O を出発点とし，サイコロを投げて奇数の目が出ればその目の分だけ x 軸と平行に正の方向に進み，偶数の目が出ればその目の分だけ y 軸と平行に正の方向に進むものとする． n を 2 以上の自然数とするとき，次の問に答えよ．

- (1) サイコロを 3 回投げ終えたとき，点 P の x 座標と y 座標が等しくなる確率を求めよ．
- (2) サイコロを n 回投げ終えたとき，点 P の y 座標が 2 となる確率を n を用いて表せ．
- (3) サイコロを $n - 1$ 回投げ終えたときには点 P の y 座標が 2 以下であり，かつ n 回投げ終えたときに点 P の y 座標が 4 以上である確率を n を用いて表せ．

正解

- 1 (1) 正六角形の対角線 AD, BE, CF の交点を O とする.



$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

点 P は線分 DE を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}}{2+1} = \frac{2\vec{a} + 2\vec{b} + 2(\vec{a} + 2\vec{b})}{3} = \frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$$

- (3) $\overrightarrow{AQ} // \overrightarrow{AP}$ であるから

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} = k\left(\frac{4}{3}\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \frac{4}{3}k\vec{a} + 2k\vec{b}$$

このとき, Q は線分 BF 上の点であるから

$$\frac{4}{3}k + 2k = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{3}{10}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{10}\vec{a} + 2 \cdot \frac{3}{10}\vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

- (4) (3) の結果から $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$

$$\vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角は } 120^\circ \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 1 \cdot 1 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \cdot 1^2 + 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot 1^2 = 7 \end{aligned}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{7} \text{ より } |\overrightarrow{AQ}| = \frac{1}{5}|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$\boxed{2} \quad (*) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$(1) \quad p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2} \text{ より } (q - s)\sqrt{2} = r - p \quad \dots (*)$$

$$q - s \neq 0 \text{ と仮定すると } \sqrt{2} = \frac{r - p}{q - s} \quad (p, q, r, s \text{ は有理数})$$

上式について，左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾．

したがって， $q - s = 0$ これを(*)に代入して $r - p = 0$

よって $p = r$ かつ $q = s$

$$(2) \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} \quad \dots (A)$$

[1] $n = 1$ のとき， $a_1 = 1$ であるから

$$\left(1 - \frac{1}{1}\right) \sqrt{2} < a_1 < \sqrt{2}$$

このとき，(A) は成立する．

[2] $n = k$ のとき，(A) が成立する，すなわち

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sqrt{2} < a_k < \sqrt{2}$$

であると仮定すると，(*) より

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - a_{k+1} &= \sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1}\right) = \frac{a_k}{k+1} > 0, \\ a_{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \sqrt{2} &= \sqrt{2} - \frac{a_k}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - a_k}{k+1} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \sqrt{2} < a_{k+1} < \sqrt{2}$$

よって， $n = k + 1$ のときも (A) は成立する．

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

$$a_n = p_n + q_n\sqrt{2} \quad (p_n \text{ および } q_n \text{ は有理数}) \quad \dots (B)$$

[1] $n = 1$ のとき, $a_1 = 1$ であるから

$$1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \quad (p_1 = 1, q_1 = 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表されるから, (B) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (B) が成立する, すなわち

$$a_k = p_k + q_k\sqrt{2} \quad (p_k \text{ および } q_k \text{ は有理数})$$

と表されると仮定すると, (*) より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \sqrt{2} - \frac{p_k + q_k\sqrt{2}}{k+1} \\ &= -\frac{p_k}{k+1} + \left(1 - \frac{q_k}{k+1}\right)\sqrt{2} \end{aligned}$$

このとき

$$p_{k+1} = -\frac{p_k}{k+1}, \quad q_{k+1} = 1 - \frac{q_k}{k+1} \quad \dots (**)$$

とおくと, p_k, q_k が有理数であるから, p_{k+1}, q_{k+1} も有理数である.
よって, $n = k+1$ のときも (B) は成立する.

[1], [2] から, すべての自然数 n について, (B) は成立する.

(3) ① および (**) の第 1 式より $p_1 = 1, p_{n+1} = -\frac{1}{n+1}p_n$

したがって $(n+1)!p_{n+1} = -n!p_n$

数列 $\{n!p_n\}$ は, 初項 $1!p_1 = 1$, 公比 -1 の等比数列であるから

$$n!p_n = (-1)^{n-1} \cdot 1 \quad \text{よって} \quad p_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

3 (1) $f(x) = xe^{-x}$ より

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

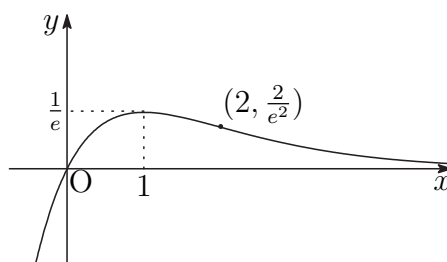
$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

| | | | | | |
|----------|-----|---------------------|-----|------------------------|-----|
| x | ... | 1 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | - |
| $f''(x)$ | - | - | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 $\frac{1}{e}$ | ↘ | 変曲点 $\frac{2}{e^2}$ | ↘ |

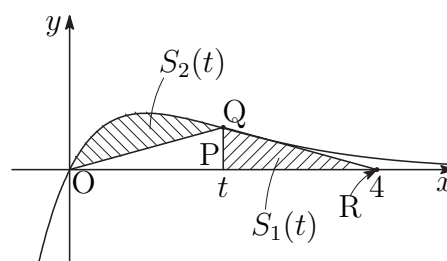
また $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

よって, $y = f(x)$ のグラフの概形は, 次のようになる.



(2) $P(t, 0)$, $Q(t, te^{-t})$, $R(4, 0)$ より,
 $\triangle PQR$ の面積 $S_1(t)$ は

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{1}{2}(4-t) \cdot te^{-t} \\ &= \frac{t}{2}(4-t)e^{-t} \end{aligned}$$



(3) 右上の図から

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t xe^{-x} dx - \triangle OPQ \\ &= \left[-e^{-x}(x+1) \right]_0^t - \frac{1}{2}t \cdot te^{-t} \\ &= -e^{-t}(t+1) + 1 - \frac{t^2}{2}e^{-t} = 1 - \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t} \end{aligned}$$

(4) (2),(3)の結果から

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) = \frac{t}{2}(4-t)e^{-t} + 1 - \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t} \\ &= (-t^2+t-1)e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{aligned} S'(t) &= (-2t+1)e^{-t} + (-t^2+t-1)(-e^{-t}) \\ &= (t^2-3t+2)e^{-t} = (t-1)(t-2)e^{-t} \end{aligned}$$

| | | | | | | | |
|---------|-----|-----|----|-----|----|-----|-----|
| t | (0) | ... | 1 | ... | 2 | ... | (4) |
| $S'(t)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $S(t)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ | |

よって 極大値 $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$

極小値 $S(2) = 1 - \frac{3}{e^2}$

4 (1) 点 $P(t, \log t)$ および原点を通る直線の傾きは $\frac{\log t}{t}$

$y = \log x$ より $y' = \frac{1}{x}$ ゆえに点 P における接線の傾きは $\frac{1}{t}$
直線 OP と C 上の点 P における接線が垂直であるから

$$\frac{\log t}{t} \cdot \frac{1}{t} = -1 \quad \text{よって} \quad \log t = -t^2$$

(2) $h(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\log x$ とおくと

$$h'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} = -\frac{2x^2 - 4x + 2}{x} = -\frac{2(x-1)^2}{x}$$

$0 < x < 1$ において $h'(x) < 0$ であるから, $h(x)$ は単調減少.

$h(1) = 0$ であるあるから, $0 < x < 1$ において $h(x) > 0$, すなわち

$$-x^2 + 4x - 3 - 2\log x > 0$$

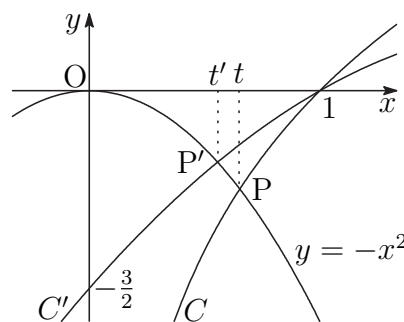
よって, $0 < x < 1$ において $2\log x < -x^2 + 4x - 3$

(3) (1)の結果から $\log t = -t^2 < 0$ すなわち $0 < t < 1$

ゆえに $S = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1} = \frac{t}{1-t^2}$ よって $f(t) = t, g(t) = 1-t^2$

(2)の結果から, $0 < x < 1$ において $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} > \log x$

$C' : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ とすると,
 $0 < x < 1$ において C' は C の上側
 にある. C, C' と $y = -x^2$ のグラフ
 の交点の x 座標をそれぞれ t, t' とお
 くと, $t' < t$ である. ここで



$$S(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad (0 < x < 1)$$

とおくと $S'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0$

$S(x)$ は単調増加であるから

$$S(t) > S(t') \quad \text{すなわち} \quad S > S(t') \quad \dots \textcircled{1}$$

$C' : y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ と $y = -x^2$ のグラフの交点 P' の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = -x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 4x - 3 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意して $x = \sqrt{7} - 2$ すなわち $t' = \sqrt{7} - 2$

$$S(t') = \frac{t'}{1-t'^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{1-(\sqrt{7}-2)^2} = \frac{\sqrt{7}-2}{4\sqrt{7}-10} = \frac{4+\sqrt{7}}{6} \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで $\frac{4+\sqrt{7}}{6} - 1.1 = \frac{5\sqrt{7}-13}{30} = \frac{1}{5(5\sqrt{7}+13)} > 0 \quad \dots \textcircled{3}$

①,②,③ から $S > 1.1$

別解 (1),(2)の結果から

$$-2t^2 < -t^2 + 4t - 3 \iff \sqrt{7} - 2 < t < 1$$

$S(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ($0 < x < 1$) の単調増加性により

$$S(t) > S(\sqrt{7}-2) = \frac{\sqrt{7}-2}{4\sqrt{7}-10}$$

以下, ②, ③ より $S = S(t) > 1.1$

- 5 (1) n を平方数でない自然数とするとき、 \sqrt{n} が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素である自然数})$$

を満たす整数 p, q が存在する。この両辺を平方すると

$$n = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ゆえに} \quad nq = \frac{p^2}{q} \quad \dots \textcircled{1}$$

① の左辺は整数であり、右辺の p^2 は q と互いに素であるから

$$q = 1 \quad \text{これを①に代入して} \quad n = p^2$$

このとき、 n は平方数となり、条件に反し矛盾。

よって、 n が平方数でない自然数とするとき、 \sqrt{n} は無理数である。

- (2) a, b を正の有理数、 n を自然数とするとき、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると

$$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = r \quad (r \text{ は有理数})$$

両辺を平方すると

$$\begin{aligned} a^2n + 2ab\sqrt{n(n+1)} + b^2(n+1) &= r^2 \\ \sqrt{n(n+1)} &= \frac{r^2 - a^2n - b^2(n+1)}{2ab} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

② の右辺は有理数であるから、 $\sqrt{n(n+1)}$ は有理数である。

したがって、(1) の結果により、 $n(n+1)$ は平方数である。

一方、 $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ より、 $n(n+1)$ が平方数ではないので矛盾。

よって、 a, b を正の有理数、 n を自然数とするとき、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ は無理数である。

$$\boxed{6} \quad (1) \quad f(x+y) = f(x) \cos y + f(y) \cos x \quad \cdots (*)$$

(*) に $x = y = 0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 0$$

(2) (1) の結果および $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを注意して

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) \cos h + f(h) \cos a - f(a)}{h} \end{aligned}$$

$g(x) = \cos x$ とおくと, $g(0) = 1$, $g'(x) = -\sin x$ より, $g'(0) = 0$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)g(h) + f(h)g(a) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ f(a) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} + \frac{f(h) - f(0)}{h} g(a) \right\} \\ &= f(a)g'(0) + f'(0)g(a) \\ &= f'(0) \cos a \end{aligned}$$

よって, $f(x)$ は, $x = a$ で微分可能である.

(3) (2) と同様にして, $f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = f'(0) \cos x$$

これに $f'(0) = 3$ を代入すると

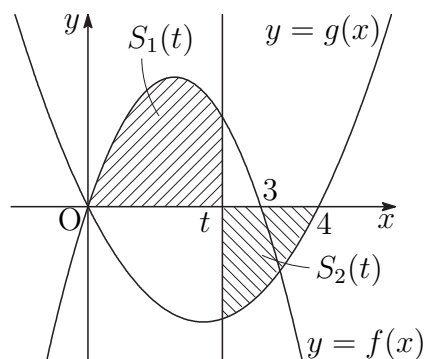
$$f'(x) = 3 \cos x$$

さらに, (1) の結果に注意して積分すると

$$f(x) = 3 \sin x$$

7 (1) 右の図から

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^t 2x(3-x) dx \\ &= \left[3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^t \\ &= 3t^2 - \frac{2}{3}t^3 \end{aligned}$$



(2) 右の図から

$$S_2(t) = \int_t^4 \{-x(x-4)\} dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_t^4 = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + \frac{32}{3}$$

(3) (1),(2)の結果から

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= -\frac{t^3}{3} + t^2 + \frac{32}{3}, \\ S'(t) &= -t^2 + 2t = -t(t-2) \end{aligned}$$

したがって、 $S(t)$ の増減表は次のようになる。

| | | | | | |
|---------|-----|-----|----|-----|-----|
| t | (0) | ... | 2 | ... | (3) |
| $S'(t)$ | | + | 0 | - | |
| $S(t)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

よって、求める $S(t)$ の最大値は $S(2) = 12$

- 8 (1) C_2 は $C_1: y = x^2$ を x 軸方向に a , y 軸方向に $2a$ だけ平行移動したものであるから, C_2 の方程式は

$$y - 2a = (x - a)^2 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a \quad \cdots (*)$$

C_1 と C_2 の方程式から y を消去すると ($a > 0$)

$$x^2 = x^2 - 2ax + a^2 + 2a \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a+2}{2}$$

これを C_1 の方程式に代入して $P\left(\frac{a+2}{2}, \frac{(a+2)^2}{4}\right)$

- (2) (*) を微分すると $y' = 2x - 2a$

これから, C_2 上の点 $P\left(\frac{a+2}{2}, \frac{(a+2)^2}{4}\right)$ における接線の傾きは

$$y' = 2 \cdot \frac{a+2}{2} - 2a = 2 - a$$

したがって, 求める接線の方程式は

$$y - \frac{(a+2)^2}{4} = (2-a) \left(x - \frac{a+2}{2}\right)$$

よって $y = (2-a)x + \frac{(a+2)(3a-2)}{4}$

- (3) (2) で求めた接線の傾きと y 切片がともに正であるから

$$\begin{cases} 2-a > 0 \\ (a+2)(3a-2) > 0 \end{cases}$$

第1式を解いて $a < 2$ \cdots ①

第2式を解いて $a < -2, \frac{2}{3} < a$ \cdots ②

$a > 0$ に注意して, ①, ② の共通範囲を求めると $\frac{2}{3} < a < 2$

- 9 (1) サイコロを3回投げ終えたとき、点Pの x 座標と y 座標が等しくなるとき、サイコロの目の出方の組合せは

$$\{1, 1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 3, 6\}, \{1, 5, 6\}$$

よって、求める確率は

$$\left(\frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} + 3!\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{18}{6^3} = \frac{1}{12}$$

- (2) サイコロを n 回投げたとき、2の目が1回と奇数の目が $n-1$ 回出る確率であるから

$${}^n C_1 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

- (3) (i) サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点Pの y 座標が0($n-1$ 回すべて奇数の奇数の目)で、 n 回投げ終えたときに点Pの y 座標が4以上(n 回目に4または6の目)である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

- (ii) サイコロを $n-1$ 回投げ終えたときに点Pの y 座標が2で、 n 回投げ終えたときに点Pの y 座標が4以上(n 回目に偶数の目)である確率は、(2)の結果を利用して

$$\frac{n-1}{3 \cdot 2^{n-1}} \times \frac{3}{6} = \frac{n-1}{3 \cdot 2^n}$$

求める確率は、(i) または (ii) の確率であるから

$$\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \frac{n-1}{3 \cdot 2^n} = \frac{n+1}{3 \cdot 2^n}$$