平成 29 年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　平成 29 年 3 月 12 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ (1)(2), $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ さいころを 4 回投げ，1 回目の目を a，2 回目の目を b，3 回目の目を c，4 回目の目を d とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $a=b=1$ または $b=c=1$ または $c=d=1$ となる確率を求めよ．

(2) $a=b$ または $b=c$ または $c=d$ となる確率を求めよ．

(3) $(a,\ b)=(1,\ 2)$ または $(b,\ c)=(1,\ 2)$ または $(c,\ d)=(1,\ 2)$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ とし，自然数 n に対して $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおく．さらに，

$$\begin{cases} (2n)!!=(2n)\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots4\cdot2 \\ (2n+1)!!=(2n+1)\cdot(2n-1)!\cdot(2n-3)\cdots3\cdot1 \end{cases}$$

とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$I_n=kI_{n-2}$ を満たす k を n を用いて表せ．

(2) I_{2n} と I_{2n+1} を n を用いて表せ．

(3)
$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \leqq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$
を示し，さらに極限値
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}$$
を求めよ．

3 次の問に答えよ．

(1) a，b を自然数とするとき，

$$r^{ab}-1=(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)$$

を示せ．

(2) n を自然数とする．命題

「2^n-1 が素数ならば，n は素数である」

の対偶を証明せよ．

(3) (2) の命題の逆が成り立たないような自然数 n のうち，最小のものを求めよ．

4 $\dfrac{1}{2}<a<2$ を満たす定数 a に対して，点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ 0)$ をとり，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点 O を中心とする半径 2 の円周上を動くとする．このとき，次の問に答えよ．

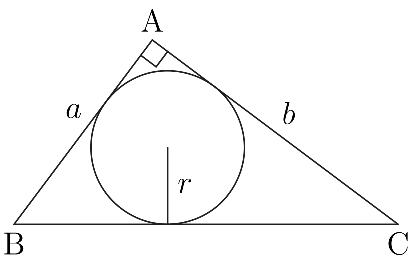
(1) 線分 AP，BP の長さを a と x を用いて表せ．

(2) $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最大値および最小値を a を用いて表せ．

5 周の長さが 2 であるような直角三角形 ABC に，半径 r の円が内接している．

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{AC}=b,\quad \angle\mathrm{BAC}=90^\circ$$

とするとき，次の問に答えよ．



(1) $a+b$ および ab を r を用いて表せ．

(2) r の最大値とそのときの a と b の値を求めよ．

6 a を正の定数とするとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x)=x^3-ax-1$ の極値およびそのときの x の値を a を用いて表せ．

(2) 2 つの曲線

$$C_1: y=x^2-a,\quad C_2: y=\frac{1}{x}$$

が，$x<0$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつとき，a の値を求めよ．さらに，$x<0$ および $x>0$ の範囲のおける C_1 と C_2 の共有点をそれぞれ求めよ．

(3) (2) の a に対して，C_1 と C_2 の 2 つの共有点を通る直線を l とする．このとき，l と C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a=b=1$，$b=c=1$，$c=d=1$ である事象をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とすると，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X_1\cup X_2\cup X_3)=&P(X_1)+P(X_2)+P(X_3)\\&-P(X_1\cap X_2)-P(X_2\cap X_3)-P(X_3\cap X_1)\\&+P(X_1\cap X_2\cap X_3)\end{aligned}$$

このとき $\quad P(X_1)=P(X_2)=P(X_3)=\dfrac{6^2}{6^4}$,

$P(X_1\cap X_2)=P(X_2\cap X_3)=\dfrac{6}{6^4}$,

$P(X_3\cap X_1)=\dfrac{1}{6^4}$，$P(X_1\cap X_2\cap X_3)=\dfrac{1}{6^4}$

よって，求める確率は

$$\frac{6^2}{6^4}+\frac{6^2}{6^4}+\frac{6^2}{6^4}-\frac{6}{6^4}-\frac{6}{6^4}-\frac{1}{6^4}+\frac{1}{6^4}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

(2) $a=b$，$b=c$，$c=d$ である事象をそれぞれ Y_1，Y_2，Y_3 とすると，求める確率は

$$\begin{aligned}P(Y_1\cup Y_2\cup Y_3)=&P(Y_1)+P(Y_2)+P(Y_3)\\&-P(Y_1\cap Y_2)-P(Y_2\cap Y_3)-P(Y_3\cap Y_1)\\&+P(Y_1\cap Y_2\cap Y_3)\end{aligned}$$

このとき $\quad P(Y_1)=P(Y_2)=P(Y_3)=\dfrac{6^3}{6^4}$,

$P(Y_1\cap Y_2)=P(Y_2\cap Y_3)=\dfrac{6^2}{6^4}$,

$P(Y_3\cap Y_1)=\dfrac{6^2}{6^4}$，$P(Y_1\cap Y_2\cap Y_3)=\dfrac{6}{6^4}$

よって，求める確率は

$$\frac{6^3}{6^4}+\frac{6^3}{6^4}+\frac{6^3}{6^4}-\frac{6^2}{6^4}-\frac{6^2}{6^4}-\frac{6^2}{6^4}+\frac{6}{6^4}=\boldsymbol{\frac{91}{216}}$$

(3) $(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(b,\ c)=(1,\ 2)$，$(c,\ d)=(1,\ 2)$ である事象をそれぞれ Z_1，Z_2，Z_3 とすると，求める確率は

$$\begin{aligned} P(Z_1\cup Z_2\cup Z_3)=P(Z_1)+P(Z_2)+P(Z_3)& \\ -P(Z_1\cap Z_2)-P(Z_2\cap Z_3)-P(Z_3\cap Z_1)& \\ +P(Z_1\cap Z_2\cap Z_3)& \end{aligned}$$

このとき　$P(Z_1)=P(Z_2)=P(Z_3)=\dfrac{6^2}{6^4}$,

$P(Z_1\cap Z_2)=P(Z_2\cap Z_3)=0$,

$P(Z_3\cap Z_1)=\dfrac{1}{6^4}$，$P(Z_1\cap Z_2\cap Z_3)=0$

よって，求める確率は

$$\frac{6^2}{6^4}+\frac{6^2}{6^4}+\frac{6^2}{6^4}-0-0-\frac{1}{6^4}+0=\mathbf{\frac{107}{1296}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta(\cos\theta)'\,d\theta$$
$$=-\Big[\ \sin^{n-1}\theta\cos\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-1}\theta)'\cos\theta\,d\theta$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\cos^2\theta\,d\theta=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$
$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

したがって　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{n-1}{n}}$

(2) $I_0=\dfrac{\pi}{2}$，$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(1) の結果から　$I_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}I_{2n-2}$，$I_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}I_{2n-1}$

よって

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0$$
$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$$
$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\cdot1=\boldsymbol{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}$$

(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin^{2n+2}x\leqq\sin^{2n+1}x\leqq\sin^{2n}x$ であるから

$$I_{2n+2}\leqq I_{2n+1}\leqq I_{2n}$$

したがって

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\leqq\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leqq\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

ゆえに

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqq\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}\leqq\frac{\pi}{2}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{\pi}{2}$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) b は自然数であるから，次式が成り立つ．

$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$$

$x = r^a$ (a は自然数) とおいて，これを上式に代入すると

$$r^{ab} - 1 = (r^a - 1)(r^{a(b-1)} + r^{a(b-2)} + \cdots + r^{2a} + r^a + 1)$$

(2) 与えられた命題の対偶は

「n が素数でないならば，$2^n - 1$ は素数ではない」　$\cdots(*)$

$n = 1$ のとき，$(*)$ は明らか．
(1) の結果に $r = 2$ を代入すると

$$2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^{2a} + 2^a + 1)$$

$n = ab$ (a, b は 2 以上の自然数) のとき，上式から $(*)$ は成立する．
よって，$(*)$ は成立する．

(3) (2) の命題の逆「n が素数ならば，$2^n - 1$ は素数である」について
$n = 2$ のとき，$2^2 - 1 = 3$ は素数
$n = 3$ のとき，$2^3 - 1 = 7$ は素数
$n = 5$ のとき，$2^5 - 1 = 31$ は素数
$n = 7$ のとき，$2^7 - 1 = 127$ は素数
$n = 11$ のとき，$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ は素数ではない．
よって，求める最小の自然数 n は　**11**

解説 $M_n = 2^n - 1$ (n は自然数) で表される数

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255,\ 511,\ 1023,\ 2047,\ 4095,\ 8191, \cdots$$

をメルセンヌ数という．M_n が素数ならば n は素数であるが ((2) の結論)，n が素数であっても M_n は素数とは限らない ((3) の結論)．
素数のメルセンヌ数

$$M_2 = 3,\ M_3 = 7,\ M_5 = 31,\ M_7 = 127,\ M_{13} = 8191,$$
$$M_{17} = 131071,\ M_{19} = 524287,\ M_{31} = 2147483647, \cdots$$

をメルセンヌ素数という．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ および原点 O を中心とする半径 2 の円周上の点 P$(x,\ y)$ について，$x^2+y^2=4$ に注意すると

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x+1}=\boldsymbol{\sqrt{2x+5}}$$
$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-2ax+a^2}=\boldsymbol{\sqrt{-2ax+a^2+4}}$$

(2) 点 P の x 座標は　$-2\leqq x\leqq 2$

(1) の結果から，$f(x)=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{2x+5}+\sqrt{-2ax+a^2+4},\\
f'(x)&=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}-\frac{a}{\sqrt{-2ax+a^2+4}}\\
&=\frac{\sqrt{-2ax+a^2+4}-a\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}\sqrt{-2ax+a^2+4}}\\
&=\frac{-2ax+a^2+4-a^2(2x+5)}{\sqrt{2x+5}\sqrt{-2ax+a^2+4}(\sqrt{-2ax+a^2+4}+a\sqrt{2x+5})}\\
&=-\frac{2a(a+1)\left\{x-2\left(\frac{1}{a}-1\right)\right\}}{\sqrt{2x+5}\sqrt{-2ax+a^2+4}(\sqrt{-2ax+a^2+4}+a\sqrt{2x+5})}
\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{1}{2}<a<2$ に注意して

$$\begin{aligned}
f(-2)&=1+\sqrt{a^2+4a+4}=1+|a+2|=a+3,\\
f\left(2\left(\tfrac{1}{a}-1\right)\right)&=\sqrt{1+\frac{4}{a}}+\sqrt{a^2+4a}=(1+a)\sqrt{1+\frac{4}{a}},\\
f(2)&=3+\sqrt{a^2-4a+4}=3+|2-a|=5-a
\end{aligned}$$

したがって，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は

x	-2	$\cdots$	$2\left(\frac{1}{a}-1\right)$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a+3$	$\nearrow$	極大 $(1+a)\sqrt{1+\frac{4}{a}}$	$\searrow$	$5-a$

よって　最大値　$\boldsymbol{(1+a)\sqrt{1+\dfrac{4}{a}}}$

最小値 $\begin{cases}\boldsymbol{a+3} & \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}<a\leqq 1\right)}\\ \boldsymbol{5-a} & \boldsymbol{(1<a<2)}\end{cases}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\triangle$ABC に三平方の定理を適用すると　　$\mathrm{BC}^2 = a^2 + b^2$

条件より，$\mathrm{BC} = 2 - (a + b)$ であるから，これを上式に代入して

$$\{2 - (a + b)\}^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2 - 2(a + b) + ab = 0 \quad \cdots ①$$

$\triangle$ABC の面積から

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA})r = \frac{1}{2}\cdot 2r = r \quad \text{ゆえに} \quad ab = 2r \quad \cdots ②$$

①，② から　　$\boldsymbol{a + b = 1 + r,\ \ ab = 2r}$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a + b)^2 - 4ab \\ &= (1 + r)^2 - 4\cdot 2r \\ &= r^2 - 6r + 1 \\ &= (r - 3)^2 - 8\end{aligned}$$

したがって　$(r - 3)^2 = 8 + (a - b)^2$　ゆえに　$|r - 3| = \sqrt{8 + (a - b)^2}$

$\triangle$ABC の周の長さが 2 であるから，$r < 3$ により

$$3 - r = \sqrt{8 + (a - b)^2} \quad \text{ゆえに} \quad r = 3 - \sqrt{8 + (a - b)^2}$$

r は，$a = b$ のとき，最大値 $\boldsymbol{3 - 2\sqrt{2}}$ をとる．
このとき，(1) の結果から

$$a = b = \frac{1 + r}{2} = \boldsymbol{2 - \sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x)=x^3-ax-1$ において，$a=3k^2\ (k>0)$ とおくと

$$f(x)=x^3-3k^2x-1 \quad \text{これを微分して} \quad f'(x)=3(x+k)(x-k)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2k^3-1$	$\searrow$	$-2k^3-1$	$\nearrow$

$k=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ より　極大値 $\boldsymbol{f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}-1}$

極小値 $\boldsymbol{f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=-\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}-1}$

(2) $C_1 : y=x^2-a,\ C_2 : y=\dfrac{1}{x}$ から，y を消去すると

$$x^2-a=\frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad x^3-ax-1=0$$

すなわち，$f(x)=0$ が，$x<0$ で解が 1 つであるから，$f(k)=0$ より

$$2k^3-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad k^3=\frac{1}{2} \qquad \cdots①$$

方程式 $f(x)=0$ は，$x^3-3k^2x-2k^3=0$ であるから

$$(x+k)^2(x-2k)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=-k,\ 2k$$

したがって，C_1 と C_2 の交点の座標は　$\left(-k,-\dfrac{1}{k}\right)$，$\left(2k,\ \dfrac{1}{2k}\right)$

① より，$k=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ であるから，求める交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},-\sqrt[3]{2}\right),\ \left(\sqrt[3]{4},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}$$

(3) $C_1 : y=x^2-3k^2$ とおくと，C_1 と C_2 の 2 つの交点 $(-k,-2k^2)$，$(2k,\ k^2)$ を通る直線 l の方程式は

$$y=kx-k^2$$

l と C_1 で囲まれた図形の面積を S とすると，① により

$$S=\int_{-k}^{2k}\{kx-k^2-(x^2-3k^2)\}\,dx=-\int_{-k}^{2k}(x+k)(x-2k)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2k-(-k)\}^3=\frac{9}{2}k^3=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$