平成 29 年度　佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　平成 29 年 2 月 25 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{2}$ 〜 $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面上に三角形 OAB があり，点 A′，B′ は $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たしているとする．線分 A′B′ を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 OP と線分 AB の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ および $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ を求めよ．

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ であり，さらに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交しているとき，三角形 OAB の面積および三角形 PAB の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の定数とする．関数 $f(x) = \dfrac{(\log ax)^3}{x}$ $(x > 0)$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が $x = b$ で極大値 $\dfrac{54}{e^3}$ をとるとき，a および b を求めよ．

(2) (1) の a に対して，不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) (1) の a，b に対して，曲線 $y = f(x)$ $(0 < x \leqq b)$，直線 $x = b$ および x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C : y = \dfrac{\sin x}{e^x}$ について，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$ の導関数および $\dfrac{\sin x}{e^x}$ の不定積分を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，曲線 C の $2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形の面積を a_n とする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ と定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，曲線 C の $0 \leqq x \leqq n\pi$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

4 複素数 α，β が

$$|\alpha| = 1, \quad |\beta| = \sqrt{2}, \quad |\alpha - \beta| = 1$$

を満たし，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8$ を求めよ．

(2) $|\alpha + \beta|$ を求めよ．

(3) n が 8 で割ると 1 余る整数のとき，$|\alpha^n + \beta^n|$ を n を用いて表せ．

5 関数

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos^2\left(\frac{\log x}{2}\right) \quad (x \geqq 1)$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) $f'(x) = 0$ を満たすような x のうち，最小のものを求めよ．

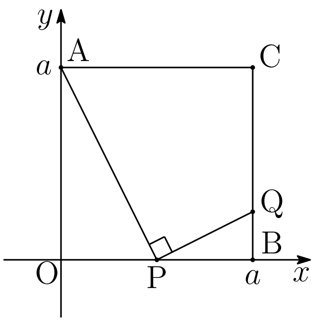
(2) $f(x) = \dfrac{1}{10}$ はただ 1 つの解をもつことを示せ．

(3) $t \geqq 1$ のとき，定積分 $\displaystyle\int_1^t f(x)\,dx$ を t を用いて表せ．

6 正の定数 a に対して，3 点 A$(0,\ a)$，B$(a,\ 0)$，C$(a,\ a)$ をとる．線分 OB の上の点 P$(t,\ 0)$ と線分 BC 上の点 Q において，

$$\angle\mathrm{APQ} = 90^\circ$$

が成り立つとき，次の問に答えよ．ただし，$0 < t < a$ とする．



(1) 三角形 PBQ の面積 S を a と t を用いて表せ．

(2) S の最大値とそのときの t の値を a を用いて表せ．

7 数直線上で，点 P は原点 O を出発点とし，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ進み，裏が出れば負の向きに 1 だけ進むものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) コインを 7 回投げ終えたとき，点 P の位置が 1 となる確率を求めよ．

(2) コインを 6 回投げ終えたときまでに点 P がちょうど 2 回正の位置にあり，7 回投げ終えたときに点 P の位置が 1 となる確率を求めよ．

$\boxed{\textbf{8}}$ 原点Oを中心とする半径2の円C_1に，点Pを中心とする半径1の円C_2が点A$(a,\ b)$で内接しているとする．このとき，次の問に答えよ．

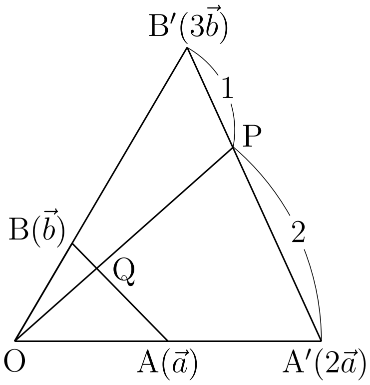
(1) 円C_2の方程式を求めよ．

(2) 円C_1上に点B$(c,\ d)$をとる．ただし，$ac+bd \neq 0$とする．直線OBと円C_2との交点のうち，原点O以外のものをQとする．点Qの座標を求めよ．

(3) 点B，点Qを(2)のものとし，A $\neq$ Bとする．$\angle$AOQ $= \theta$ とおくとき，$\angle$APQおよび線分OQの長さをθを用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P は線分 A′B′ を 2 : 1 に内分するので，
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = 2\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = 3\vec{b}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{2+1}$$
$$= \frac{2\vec{a} + 2\cdot 3\vec{b}}{3} = \boldsymbol{\frac{2\vec{a}+6\vec{b}}{3}}$$

(2) Q は線分 AB 上の点であるから，(1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4} = \frac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \qquad \text{よって} \qquad \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{3}(\vec{a}+3\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が直交しているとき

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0 \quad \text{整理すると} \quad -|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 0$$

これに $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ を代入すると

$$-5 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\cdot 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2$$

したがって，三角形 OAB の面積は

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 3 - 2^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$$

(2) の結果から，$\triangle\mathrm{OAB} : \triangle\mathrm{PAB} = \mathrm{OQ} : \mathrm{PQ} = 1 : \dfrac{5}{3}$ であるから

$$\triangle\mathrm{PAB} = \frac{5}{3}\triangle\mathrm{OAB} = \frac{5}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{2} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{11}}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\dfrac{(\log ax)^3}{x}$ を微分すると $(a>0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(\log ax)^2(\log ax)'x-(\log ax)^3}{x^2} \\ &= \frac{(\log ax)^2(3-\log ax)}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{a},\ \dfrac{e^3}{a}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{e^3}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大 $\frac{27a}{e^3}$	$\searrow$

このとき，$x=b$ で極大値 $\dfrac{54}{e^3}$ をとるから

$$b=\frac{e^3}{a},\quad \frac{54}{e^3}=\frac{27a}{e^3}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=2,\ b=\frac{e^3}{2}}$$

(2) $a=2$ に対して

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{(\log 2x)^3}{x}\,dx=\int(\log 2x)^3(\log 2x)'\,dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(\log 2x)^4+C}\quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(3) (1) の増減表および (2) の結果から，求める図形の面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}} f(x)\,dx=\left[\,\frac{1}{4}(\log 2x)^4\,\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^3}{2}}=\boldsymbol{\frac{81}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}\right)' = \{e^{-x}(\sin x+\cos x)\}'$

$$= -e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

$$= -2e^{-x}\sin x = -\boldsymbol{\frac{2\sin x}{e^x}}$$

上式より，$\left(-\dfrac{\sin x+\cos x}{2e^x}\right)' = \dfrac{\sin x}{e^x}$ であるから

$$\int \frac{\sin x}{e^x}\,dx = \boldsymbol{-\frac{\sin x+\cos x}{2e^x}+C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\,\textbf{は積分定数)}$$

(2) $C: y=\dfrac{\sin x}{e^x}$ は，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において，$y \geqq 0$ であるから

$$a_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{e^x}\,dx = \left[-\frac{\sin x+\cos x}{2e^x}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$
$$= \frac{1}{2e^{(2n+1)\pi}}+\frac{1}{2e^{2n\pi}} = \frac{1+e^\pi}{2e^{(2n+1)\pi}} = \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\cdot(e^{-2\pi})^n$$

$0<e^{-2\pi}<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\sum_{k=0}^{n}(e^{-2\pi})^k$$
$$= \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\times\frac{1}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}\times\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} = \boldsymbol{\frac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}}$$

(3) $$\frac{V_n}{\pi} = \int_0^{n\pi}\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2 dx$$
$$= \int_0^{n\pi} e^{-2x}\sin^2 x\,dx = \int_0^{n\pi}\frac{1}{2}e^{-2x}(1-\cos 2x)\,dx$$

ここで　$(e^{-2x}\sin 2x)' = 2e^{-2x}(-\sin 2x+\cos 2x)$

　　　　$(e^{-2x}\cos 2x)' = 2e^{-2x}(-\sin 2x-\cos 2x)$

上の 2 式から　$\{e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)\}' = 4e^{-2x}\cos 2x$

ゆえに　$\displaystyle\int e^{-2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x-\cos 2x)+C$　(C は積分定数)

したがって　$\dfrac{V_n}{\pi} = \left[\dfrac{1}{8}e^{-2x}(-2-\sin 2x+\cos 2x)\right]_0^{n\pi} = \dfrac{1}{8}(1-e^{-2n\pi})$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}(1-e^{-2n\pi}) = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 複素数平面上の原点を O とし，α，β を表す点をそれぞれ A，B とすると，△ABC は OA $=1$，OB $=\sqrt{2}$，AB $=1$ の直角二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4}$$

このとき，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{2}$ で，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部が正であるから

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{1+i}$$

また $$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^8=(\sqrt{2})^8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\mathbf{16}$$

別解 $w=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと，$|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{2}$，$|\alpha-\beta|=1$ より

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{2},\quad \frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha|}=1\quad \text{すなわち}\quad |w|=\sqrt{2},\quad |1-w|=1$$

$|1-w|^2=1$ より，$(1-w)(1-\overline{w})=1$ であるから

$$1-w-\overline{w}+|w|^2=1\quad \text{ゆえに}\quad w+\overline{w}=2$$

したがって $$\mathrm{Re}(w)=\frac{w+\overline{w}}{2}=1$$

w の虚部は正であるから $\mathrm{Im}(w)=\sqrt{|w|^2-1^2}=1$

よって $w=1+i$

(2) (1) の結果から，$\beta=(1+i)\alpha$ であるから

$$|\alpha+\beta|=|\alpha+(1+i)\alpha|=|\alpha||2+i|=1\sqrt{2^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

(3) (1) の結果から，$\beta = \alpha(1+i)$ であるから

$$
\begin{aligned}
|\alpha^n + \beta^n| &= |\alpha^n + \alpha^n(1+i)^n| \\
&= |\alpha|^n|1+(1+i)^n| = |1+(1+i)^n| \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

ここで，$\dfrac{n-1}{8}$ は整数であるから

$$
\begin{aligned}
(1+i)^n &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n \\
&= (\sqrt{2}\,)^n\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left\{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8\right\}^{\frac{n-1}{8}} \\
&= (\sqrt{2}\,)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^{\frac{n-1}{8}} \\
&= (\sqrt{2}\,)^{n-1}(1+i) \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，② より

$$
\begin{aligned}
|\alpha^n + \beta^n|^2 &= |1 + (\sqrt{2}\,)^{n-1}(1+i)|^2 \\
&= |1 + (\sqrt{2}\,)^{n-1} + (\sqrt{2}\,)^{n-1}i|^2 \\
&= \{1 + (\sqrt{2}\,)^{n-1}\}^2 + \{(\sqrt{2}\,)^{n-1}\}^2 \\
&= 1 + 2(\sqrt{2}\,)^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-1} \\
&= 1 + 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^n
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{1 + 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^n}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos^2\left(\dfrac{\log x}{2}\right) \quad (x \geqq 1)$ より

$$f(x)=\frac{1}{2x}\{\cos(\log x)+1\}$$

$x \geqq 1$ より，$x=e^{\theta}$ $(\theta \geqq 0)$ とおくと

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\theta}(\cos\theta+1) \qquad \cdots(*)$$

上式を θ について微分すると

$$f'(x)\frac{dx}{d\theta}=-\frac{1}{2}e^{-\theta}(\sin\theta+\cos\theta+1) \qquad \cdots(**)$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=e^{\theta}$ であるから

$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-2\theta}(\sin\theta+\cos\theta+1)$$

$f'(x)=0$ を満たすとき　$\sin\theta+\cos\theta+1=0 \quad (\theta \geqq 0)$

これを満たす最小の θ を求めればよいので

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \quad \text{すなわち} \quad \theta=\pi$$

よって，求める x は　$\boldsymbol{x=e^{\pi}}$

(2) $g(\theta)=f(x)$ とおくと，$(*)$ より

$$g(\theta)=\frac{1}{2}e^{-\theta}(\cos\theta+1)$$

$g(\theta)=f(x)$ を θ について微分すると，$(**)$ より

$$\begin{aligned} g'(\theta)=f'(x)\frac{dx}{d\theta}&=-\frac{1}{2}e^{-\theta}(\sin\theta+\cos\theta+1)\\ &=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\end{aligned}$$

n を 0 以上の整数とすると，$g(\theta)$ は，次の極値をとる．

極小値 $g((2n+1)\pi)=0$,

極大値 $g((2n+\frac{3}{2}\pi))=\dfrac{1}{2}e^{-\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}$

連続関数 $g(\theta)$ の最大の極大値は　$g(\frac{3}{2}\pi)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\pi}$

ここで　$\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\pi}<\dfrac{1}{2}e^{-3}<\dfrac{1}{2}\cdot 2^{-3}<\dfrac{1}{10}$　ゆえに　$g(\frac{3}{2}\pi)<\dfrac{1}{10}$

したがって，$\theta \geqq \pi$ において，$g(\theta)=\dfrac{1}{10}$ を満たす θ は存在しない．

また，$g(\theta)$ は，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において単調減少で，$g(0)=1$，$g(\pi)=0$ であるから，この区間において，$g(\theta)=\dfrac{1}{10}$ を満たす θ がただ 1 つ存在する．

よって，$f(x)=\dfrac{1}{10}$ はただ 1 つの解をもつ．

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2x}\cos(\log x)+\dfrac{1}{2x}$ であるから，$t \geqq 1$ のとき

$$\int_1^t f(x)\,dx=\left[\,\frac{1}{2}\sin(\log x)+\frac{1}{2}\log x\,\right]_1^t=\boldsymbol{\frac{\sin(\log t)+\log t}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\theta = \angle\mathrm{PAO} = \angle\mathrm{QPB}$ とおくと　$\tan\theta = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AO}} = \dfrac{t}{a}$ より

$$\mathrm{BQ} = \mathrm{PB}\tan\theta = (a-t)\cdot\frac{t}{a} = \frac{t}{a}(a-t)$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BQ} = \dfrac{1}{2}(a-t)\cdot\dfrac{t}{a}(a-t) = \boldsymbol{\dfrac{t}{2a}(a-t)^2}$

(2) $f(t) = \dfrac{t}{2a}(a-t)^2$　$(0 < t < a)$ とおくと

$$f(t) = \frac{1}{2a}(t^3 - 2at^2 + a^2t)$$

これを微分すると

$$f'(t) = \frac{1}{2a}(3t^2 - 4at + a^2) = \frac{1}{2a}(t-a)(3t-a)$$

$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	(a)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大 $\frac{2}{27}a^2$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{t = \dfrac{a}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{27}a^2}$ をとる．

別解 3つの正数 $2t$，$a-t$，$a-t$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2t + (a-t) + (a-t)}{3} \geqq \sqrt[3]{2t(a-t)(a-t)}$$

したがって　$2t(a-t)^2 \leqq \dfrac{8}{27}a^3$　ゆえに　$\dfrac{t}{2a}(a-t)^2 \leqq \dfrac{2}{27}a^2$

上式において，等号が成立するのは

$$2t = a - t \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{3}{a}$$

よって，$t = \dfrac{3}{a}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{2}{27}a^2$ をとる．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 求める確率は，コインを 7 回投げ終えたとき，表が 4 回，裏が 3 回出る確率であるから

$$ {}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \mathbf{\frac{35}{128}} $$

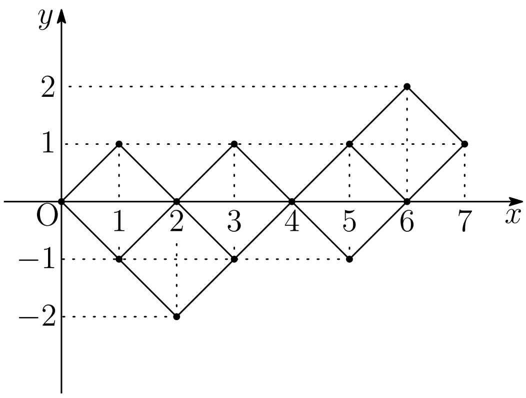
(2) x 回投げ終えたときの座標が y であるとすると，P は下のグラフの実線上にある格子点を $(0,0)$ から $(7,1)$ を移動する．

(i) $(6,0)$ を通るとき，1，3，5 回目のどこで 2 回 y 座標が 1(正) になるかであるから，その過程は

$$ (0,0)\to(1,1)\to(2,0)\to(3,1)\to(4,0)\to(5,-1)\to(6,0) $$
$$ (0,0)\to(1,1)\to(2,0)\to(3,-1)\to(4,0)\to(5,1)\to(6,0) $$
$$ (0,0)\to(1,-1)\to(2,0)\to(3,1)\to(4,0)\to(5,1)\to(6,0) $$

(ii) $(6,2)$ を通るとき，$(5,1)$ を通るから，y 座標が正になるのは $0 \leqq x \leqq 4$ ではないから，その過程は

$$ (0,0)\to(1,-1)\to(2,0)\to(3,-1)\to(4,0)\to(5,1)\to(6,2) $$
$$ (0,0)\to(1,-1)\to(2,-2)\to(3,-1)\to(4,0)\to(5,1)\to(6,2) $$



(i)，(ii) より，求める確率は

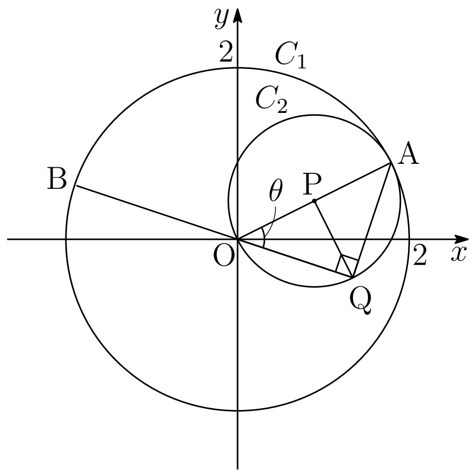
$$ 5\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \mathbf{\frac{5}{128}} $$

8 (1) P は線分 OA の中点であるから

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$$

C_2 は P を中心とする半径 1 の円であるから

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=1}$$



(2) B$(c,\ d)$ より，直線 OB の方程式は　　$dx-cy=0$　$\cdots$①

$\angle$AQO は，C_2 の直径に対する円周角であるから　　$\angle\mathrm{AQO}=90^\circ$

直線 AQ は点 A$(a,\ b)$ を通り，直線 ① に垂直であるから

$$c(x-a)+d(y-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad cx+dy=ac+bd \quad \cdots②$$

B は $C_2 : x^2+y^2=4$ 上の点であるから　　$c^2+d^2=4$

Q は ①，② の交点で，上式に注意してこれを解くと

$$x=\frac{c(ac+bd)}{4},\quad y=\frac{d(ac+bd)}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\frac{c(ac+bd)}{4},\ \frac{d(ac+bd)}{4}\right)}$

(3) PO $=$ PQ であるから　　$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{PQO}=\theta$

よって　　$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{POQ}+\angle\mathrm{PQO}=\theta+\theta=\boldsymbol{2\theta}$

(1) の図から　　$\mathrm{OQ}=\mathrm{AO}\cos\theta=\boldsymbol{2\cos\theta}$