平成28年度　佐賀大学2次試験後期日程(数学問題)
理工・農学部　平成28年3月12日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ 数I・II・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問に答えよ．

(1) 1でない正の数 a，b，c，d に対して，

$$\log_a b\cdot \log_b c\cdot \log_c d\cdot \log_d a$$

を求めよ．

(2) 1より大きい数 x，y に対して，

$$\log_2 3\cdot \log_3 x + \log_3 x\cdot \log_x y + \log_x y\cdot \log_y 2 + \log_y 2\cdot \log_2 3$$

の最小値とそのときの x，y の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の実数とする．2つの放物線 $C_1 : y = x^2 + a$，$C_2 : y = -x^2 + 8x$ について次の問に答えよ．

(1) C_1，C_2 が異なる2点で交わるときの a の値の範囲を求めよ．

(2) (1)の交点の x 座標をそれぞれ $x_1,\ x_2\ (x_1 < x_2)$ とするとき，$x_1 \leqq m \leqq x_2$ を満たす整数 m をすべて求めよ．

(3) (2)で求めた m に対し $m^2 + a \leqq n \leqq -m^2 + 8m$ を満たす整数 n を考える．このとき，m，n の組がちょうど8個存在するような a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} te^{-t}\,dt$ に対して次の問に答えよ．

(1) $f(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

(2) (1)で求めた x の範囲において $g(x) = \log f(x)$ とする．$g(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

(3) (2)の $g(x)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(g(x+1) - g(x))$ を求めよ．

4 $z^5=1$ かつ $z\neq 1$ を満たす複素数 z のうち偏角が最小になるものを α とおく．ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) α を極形式で表せ．

(2) α は $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ を満たすことを示せ．さらに $\alpha^4=\overline{\alpha}$，$\alpha^3=\overline{\alpha}^2$ となることを示せ．ただし，α と共役な複素数を $\overline{\alpha}$ で表す．

(3) $\cos(\arg\alpha)$ の値を求めよ．ただし，$\arg\alpha$ は α の偏角を表す．

5 次の問に答えよ．

(1) 1 でない正の数 a，b，c，d に対して，

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d a$$

を求めよ．

(2) 1 より大きい数 x，y に対して，

$$\log_2 x+\log_3 y+\log_x 2+\log_y 3$$

の最小値とそのときの x，y の値を求めよ．

6 A と B が続けて試合を行う．A が試合に勝つ確率を p とするとき，次の問に答えよ．ただし，$0<p<1$ とし，引き分けはないものとする．

(1) 3 試合行って多く勝った方を優勝としたとき，A が優勝する確率 q を求めよ．

(2) 先に 3 勝した方を優勝としたとき，A が優勝する確率 r を求めよ．

(3) $p>\dfrac{1}{2}$ のとき，p，q，r の大小を不等号を用いて表せ．

7 曲線 $y=x^3-x$ と直線 $y=nx$ で囲まれた図形の面積を a_n とする．ただし，n は自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 底の変換公式により

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d a=\log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a d}{\log_a c}\cdot\frac{\log_a a}{\log_a d}=\mathbf{1}$$

補足 $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ と $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ の辺々を掛けると

$$\log_a M\cdot\log_b N=\log_b M\cdot\log_a N$$

この 2 つの対数の積に関する底 (または真数) の互換性を用いると

$$\begin{aligned}\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d a&=\log_b b\cdot\log_a c\times\log_d d\cdot\log_c a\\&=\log_a c\cdot\log_c a=\log_c c\cdot\log_a a=1\end{aligned}$$

(2) 対数の積の底の互換性により

$$\begin{aligned}&\log_2 3\cdot\log_3 x+\log_3 x\cdot\log_x y+\log_x y\cdot\log_y 2+\log_y 2\cdot\log_2 3\\=&\log_3 3\cdot\log_2 x+\log_x x\cdot\log_3 y+\log_y y\cdot\log_x 2+\log_2 2\log_y 3\\=&\log_2 x+\log_3 y+\log_x 2+\log_y 3\\=&\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}+\log_3 y+\frac{1}{\log_3 y}\end{aligned}$$

$x>1$，$y>1$ より，$\log_2 x>0$，$\log_3 y>0$
したがって，相加平均・相乗平均の関係により

$$\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}\geqq 2\sqrt{\log_2 x\cdot\frac{1}{\log_2 x}}=2$$

上式において，等号が成立するのは

$$\log_2 x=\frac{1}{\log_2 x}\quad\text{すなわち}\quad x=2$$

同様に　$\log_3 y+\dfrac{1}{\log_3 y}\geqq 2$　(等号が成立するのは $y=3$ のとき)

以上のことから　$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=3}$ のとき，最小値 $2+2=\mathbf{4}$ をとる．

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $C_1 : y = x^2 + a$ と $C_2 : y = -x^2 + 8x$ から y を消去すると

$$x^2 + a = -x^2 + 8x \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - 8x + a = 0$$

この方程式の判別式を D とすると，C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるから

$$D/4 = (-4)^2 - 2a > 0$$

このとき，$a > 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 < a < 8}$

別解 2 つの放物線 $y = x^2 + a$ と $y = -x^2 + 8x$ が異なる 2 点で交わるとき，直線 $y = a$ と放物線 $y = -2x^2 + 8x$ は異なる 2 点で交わり，その交点の x 座標も一致する．

$$y = -2x^2 + 8x = -2(x-2)^2 + 8$$

これと直線 $y = a$ $(a > 0)$ が異なる 2 点で交わるとき　$0 < a < 8$

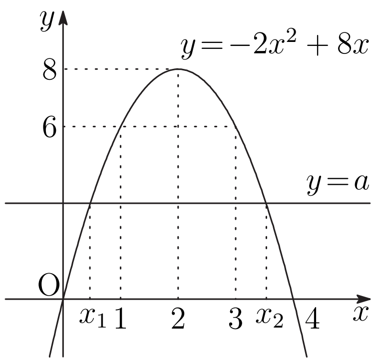
(2) (1) の交点 x_1，x_2 $(x_1 < x_2)$ は直線 $y = a$ と放物線 $y = -2x^2 + 8x$ の交点である．

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x \\ &= -2(x-2)^2 + 8 \end{aligned}$$

よって，右の図から

$\boldsymbol{0 < a \leqq 6}$ **のとき**　$\boldsymbol{m = 1,\ 2,\ 3}$

$\boldsymbol{6 < a < 8}$ **のとき**　$\boldsymbol{m = 2}$



(3) $m^2 + a \leqq n \leqq -m^2 + 8m$ は $(m,\ n$ は整数$)$，領域

$$\begin{cases} y \geqq x^2 + a \\ y \leqq -x^2 + 8x \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

にある格子点 $(m,\ n)$ を表す．また，領域

$$\begin{cases} y \geqq a \\ y \leqq -2x^2 + 8x \end{cases} \qquad \cdots (**)$$

にある格子点の x 座標は，領域 $(*)$ の格子点の x 座標と一致し，2 つの領域 $(*)$，$(**)$ にある格子点の個数も一致する．領域 $(**)$ において，格子点が 8 個あるとき，(2) の図からその格子点の座標は

$$(2,\ 8),\ (2,\ 7),\ (1,\ 6),\ (2,\ 6),\ (3,\ 6),\ (1,\ 5),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5)$$

よって　　$\boldsymbol{4 < a \leqq 5}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x} te^{-t}\,dt=\Big[-e^{-t}(t+1)\Big]_{x-1}^{x}=e^{-x}\{(e-1)x-1\}$

$f(x)>0$ のとき　$(e-1)x-1>0$　よって　$\boldsymbol{x>\dfrac{1}{e-1}}$

補足 部分積分法により

$$\int e^{ax}f(x)\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{a}+\frac{f''(x)}{a^2}-\frac{f'''(x)}{a^3}+\cdots\right\}+C$$
$$\int e^{-x}f(x)\,dx=-e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

(2) (1) の結果から

$$g(x)=\log f(x)=\log e^{-x}\{(e-1)x-1\}=-x+\log\{(e-1)x-1\}$$

微分すると　$g'(x)=-1+\dfrac{e-1}{(e-1)x-1}=\dfrac{(1-e)x+e}{(e-1)x-1}$

したがって，$g(x)$ の増減表は

x	$\left(\frac{1}{e-1}\right)$	$\cdots$	$\frac{e}{e-1}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，最大値は　$\boldsymbol{g\left(\dfrac{e}{e-1}\right)=-\dfrac{1}{e-1}+\log(e-1)}$

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned}g(x+1)-g(x)&=\log f(x+1)-\log f(x)=\log\frac{f(x+1)}{f(x)}\\&=\log\frac{e^{-x-1}\{(e-1)(x+1)-1\}}{e^{-x}\{(e-1)x-1\}}\\&=-1+\log\frac{(e-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{e-1-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{g(x+1)-g(x)\}=\boldsymbol{-1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $z \neq 1$ より，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^5 = 1$ より　　$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1$

したがって　　$r^5 = 1,\quad 5\theta = 2k\pi$ (k は整数)

$r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi$ より　　$r = 1,\quad \theta = \dfrac{2k}{5}\pi$ $(k = 1, 2, 3, 4)$

このうち，偏角が最小になるのは，$k = 1$ のときであるから

$$\boldsymbol{\alpha = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi}$$

(2) $\alpha^5 = 1$ であるから　　$(\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

$\alpha \neq 1$ より　　$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$|\alpha| = 1$ より，$|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha} = 1$ であるから

$$\alpha^4 = \frac{\alpha^5}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha},\quad \alpha^3 = \frac{\alpha^5}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \overline{\alpha}^2$$

(3) (2) の結果から

$$\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 + \alpha + \overline{\alpha} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha + \overline{\alpha})^2 + \alpha + \overline{\alpha} - 1 = 0$$

$t = \alpha + \overline{\alpha}$ とおくと　　$t = 2\cos(\arg\alpha) = 2\cos\dfrac{2}{5}\pi$

方程式 $t^2 + t - 1 = 0$ を $t > 0$ に注意して解くと　$t = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

ゆえに　$2\cos(\arg\alpha) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{\cos(\arg\alpha) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$

$\boxed{5}$ (1) 底の変換公式により

$$\log_a b\cdot \log_b c\cdot \log_c d\cdot \log_d a = \log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a d}{\log_a c}\cdot\frac{\log_a a}{\log_a d} = \mathbf{1}$$

(2) $$\log_2 x + \log_3 y + \log_x 2 + \log_y 3 = \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} + \log_3 y + \frac{1}{\log_3 y}$$

$x > 1$，$y > 1$ より，$\log_2 x > 0$，$\log_3 y > 0$

したがって，相加平均・相乗平均の関係により

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geqq 2\sqrt{\log_2 x\cdot\frac{1}{\log_2 x}} = 2$$

上式において，等号が成立するのは

$$\log_2 x = \frac{1}{\log_2 x} \quad すなわち \quad x = 2$$

同様に　$\log_3 y + \dfrac{1}{\log_3 y} \geqq 2$　(等号が成立するのは $y = 3$ のとき)

以上のことから　$\boldsymbol{x = 2}$，$\boldsymbol{y = 3}$ のとき，最小値 $2 + 2 = \mathbf{4}$ をとる．

$\boxed{6}$ (1) A が 3 勝 0 敗する確率は　p^3

A が 2 勝 1 敗する確率は　${}_3\mathrm{C}_2 p^2(1-p) = 3p^2(1-p)$

よって，A が優勝する確率 q は

$$q = p^3 + 3p^2(1-p) = \boldsymbol{p^2(3-2p)}$$

(2) A が 3 連勝する確率は　p^3

A が 2 勝 1 敗した後，A が勝つ確率は　${}_3\mathrm{C}_2 p^2(1-p)\cdot p = 3p^3(1-p)$

A が 2 勝 2 敗した後，A が勝つ確率は　${}_4\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^2\cdot p = 6p^3(1-p)^2$

よって，A が優勝する確率 r は

$$r = p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2 = \boldsymbol{p^3(6p^2 - 15p + 10)}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$q - p = p^2(3-2p) - p = p(1-p)(2p-1)$$
$$r - q = p^3(6p^2 - 15p + 10) - p^2(3-2p) = 3p^2(1-p)^2(2p-1)$$

$\dfrac{1}{2} < p < 1$ であるから　$\boldsymbol{p < q < r}$

解説 A の勝率は高いので，試合を多くする方が有利である．逆に勝率が低い場合は，一発勝負の方が有利である (九工大 [情]2014 $\boxed{4}$ 破産問題[1])．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf

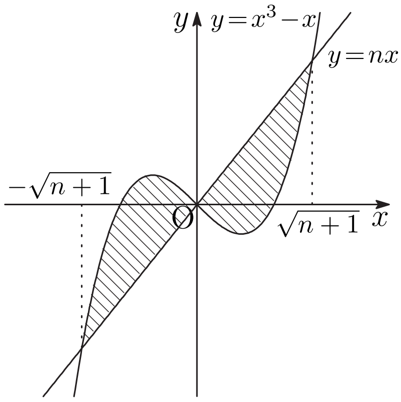
7 (1) $y = x^3 - x$ と $y = nx$ から y を消去すると

$$x^3 - x = nx$$

したがって　$x(x^2 - n - 1) = 0$

n は自然数のなので，これを解いて

$$x = 0,\ \pm\sqrt{n+1}$$



曲線 $y = x^3 - x$ と直線 $y = nx$ は原点に関して対称であるから

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^{\sqrt{n+1}} \{nx - (x^3 - x)\}\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{n+1}} \{-2x^3 + 2(n+1)x\}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + (n+1)x^2\right]_0^{\sqrt{n+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k + 1) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1) + n\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{12}n(2n^2 + 9n + 13)} \end{aligned}$$