

平成 28 年度 佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理工・医・農・教育学部 平成 28 年 2 月 25 日

- 理工学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は, [1], [5] ~ [7] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は, [1] (1)(2), [4], [8], [9] 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部は, [1] (1)(2), [4], [9] 数 I・II・A・B (100 分)

[1] $0 < p < 1$ とする.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して, 次の問に答えよ.

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

[2] 次の問に答えよ.

(1) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ を利用して, 不定積分 $\int \tan^2 x \, dx$ を求めよ.

(2) 2 つの曲線 $y = \frac{3}{2} \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

[3] 0 でない複素数 z の極形式を $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とするとき, 次の複素数を極形式で表せ. ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とし, また z と共役な複素数を \bar{z} で表す.

- (1) $-\bar{z}$
- (2) $\frac{1}{z^2}$
- (3) $z - |z|$

4 1 から 5 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつある。これらから 4 枚を選び、横 1 列に並べる。並べられたカードに書かれた数字を左から順に a, b, c, d とおく。このとき、次の間に答えよ。

(1) カードの並べ方の総数を求めよ。

(2) 次のルールのもとで、3 と 4 のカードを捨てる場合は何通りあるかを求めよ。

- $a < b < c < d$ ならば、 b と c のカードを捨てる。
- $a < b < d < c$ ならば、 b と d のカードを捨てる。
- $b < a < c < d$ ならば、 a と c のカードを捨てる。
- $b < a < d < c$ ならば、 a と d のカードを捨てる。
- その他は何も捨てない。

(3) (2) のルールのもとで、何も捨てない確率を求めよ。

5 2 つの曲線 $y = \frac{3}{2} \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$), $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と x 軸で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

6 実数 a, b は $a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 = 1$ を満たしているとする。このとき、次の間に答えよ。

(1) 定積分

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \sin x - b \cos x| dx$$

を a, b を用いて表せ。

(2) S の最大値、最小値とそのときの a, b の値をそれぞれ求めよ。

7 複素数平面上の点 z に対して

$$w = \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)}$$

で表される点 w をとる. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $w = z$ となるような点 z は 2 つある. これらを求めよ.
 (2) (1) で求めた異なる 2 点を α, β とする. ただし, $0 \leq \arg \alpha < \arg \beta < 2\pi$ とする. z が α, β と異なる点であるとき,

$$\frac{w - \beta}{w - \alpha} = k \cdot \frac{z - \beta}{z - \alpha}$$

となるような定数 k の値を求めよ.

- (3) 複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \frac{3(1-i)z_n - 2i}{z_n + 3(1-i)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. また, z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n, y_n とする. このとき, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ. さらに, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の極限を求めよ.

8 空間に 3 点 $A(1, 2, 6), B(7, 0, 9), C(s, t, 0)$ がある. ただし, s, t は実数とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を s と t を用いて表せ.
 (2) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ となるとき, s と t の関係式を求めよ.
 (3) $\triangle ABC$ が $\angle BAC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となるとき, s と t の値を求めよ.

9 O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(4, 0), P(t, 0)$ をとる. ただし, $0 < t < 4$ とする. さらに放物線 $C: y = -x^2 + 7x$ 上に 2 点 $B(4, 12), Q(t, -t^2 + 7t)$ をとる. $\triangle APB$ の面積を $f(t)$ とし, 放物線 C , 線分 PQ , 線分 OP によって囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $f(t)$ を t を用いて表せ.
 (2) $g(t)$ を t を用いて表せ.
 (3) $h(t) = f(t) + g(t)$ とおく. $0 < t < 4$ における $h(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ.

正解

1 (1) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = -pb_n$$

$\{b_n\}$ は、初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 、公比 $-p$ の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-p)^{n-1} = (-p)^{n-1}$$

(2) (1) の結果から $a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1} = 1 + \frac{1 - (-p)^{n-1}}{1 + p}$$

上式は、 $n = 1$ のときも成立するから $a_n = 1 + \frac{1 - (-p)^{n-1}}{1 + p}$

(3) $0 < p < 1$ より $-1 < -p < 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (-p)^{n-1} = 0$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \frac{1}{1 + p} = \frac{2 + p}{1 + p}$$

別解 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} + pa_{n+1} = a_{n+1} + pa_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + pa_n = a_2 + pa_1 = 2 + p$$

上式と $a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$ の差をとると

$$(1 + p)a_n = 2 + p - (-p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}$$

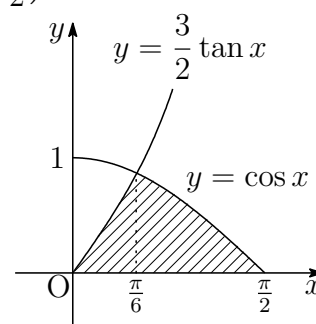
2 (1) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ より, $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ であるから

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \tan x - x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(2) $y = \frac{3}{2} \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) と $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \tan x &= \cos x \\ 3 \sin x &= 2 \cos^2 x \\ 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 &= 0 \\ (\sin x + 2)(2 \sin x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ より $x = \frac{\pi}{6}$



したがって, 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{2} \tan x \right)^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{9}{4} \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x \, dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{9}{4} \pi \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{5}{24} \pi^2 \end{aligned}$$

3 (1) $-\bar{z} = (\cos \pi + i \sin \pi) \cdot r \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \}$
 $= r \{ \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) \}$

(2) $\frac{1}{z^2} = \{ r(\cos \theta + i \sin \theta) \}^{-2}$
 $= \frac{1}{r^2} \{ \cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta) \}$

(3) $z - |z| = r(\cos \theta + i \sin \theta) - r = r(\cos \theta - 1 + i \sin \theta)$
 $= r \left(-2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) = 2r \sin \frac{\theta}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right)$
 $= 2r \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$

ここで, $0 \leq \theta < 2\pi$ より, $2r \sin \frac{\theta}{2} \geq 0$

- 4 (1) 異なる5枚のカードから4枚を1列に並べる順列の総数であるから

$${}_5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{120} \text{ (通り)}$$

- (2) i) $a < b < c < d$ において, $(b, c) = (3, 4)$ のとき, 次の2通り.

$$(a, b, c, d) = (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5)$$

- ii) $a < b < d < c$ において, $(b, d) = (3, 4)$ のとき, 次の2通り.

$$(a, b, d, c) = (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5)$$

- iii) $b < a < c < d$ において, $(a, c) = (3, 4)$ のとき, 次の2通り.

$$(b, a, c, d) = (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5)$$

- iv) $b < a < d < c$ において, $(a, d) = (3, 4)$ のとき, 次の2通り.

$$(b, a, d, c) = (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5)$$

i)~iv)の総数であるから $2 + 2 + 2 + 2 = \mathbf{8}$ (通り)

- (3) 捨てられるカードは, 3と4, 2と3, 2と4の3つの場合がある.

2と3の場合は, (2)で求めた3と4の場合と同様に8通り.

また, 2と4の場合は, 次のi)~iv)の4通り.

- i) $a < b < c < d$ において, $(b, c) = (2, 4)$ のとき

$$(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 5)$$

- ii) $a < b < d < c$ において, $(b, d) = (2, 4)$ のとき

$$(a, b, d, c) = (1, 2, 4, 5)$$

- iii) $b < a < c < d$ において, $(a, c) = (2, 4)$ のとき

$$(b, a, c, d) = (1, 2, 4, 5)$$

- iv) $b < a < d < c$ において, $(a, d) = (2, 4)$ のとき

$$(b, a, d, c) = (1, 2, 4, 5)$$

したがって, カードを捨てる確率は $\frac{8 + 8 + 4}{120} = \frac{1}{6}$

求める確率は, この余事象の確率であるから $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

- 5 2 (2)と同じ

6 (1) a, b の条件から

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \sin x - b \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos \theta \sin x - \sin \theta \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x - \theta)| dx \\ &= -\int_0^{\theta} \sin(x - \theta) + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - \theta) dx \\ &= \left[\cos(x - \theta) \right]_0^{\theta} - \left[\cos(x - \theta) \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - \cos \theta - \sin \theta \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \mathbf{2 - a - b} \end{aligned}$$

(2) ① から

$$S = 2 - \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

よって $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ すなわち $(a, b) = (1, 0), (0, 1)$ のとき, 最大値 **1**

$\theta = \frac{\pi}{4}$ すなわち $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 最小値 **$2 - \sqrt{2}$**

7 (1) $w = z$ のとき $z = \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)}$ 整理すると $z^2 = -2i$

$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right) \text{ であるから}$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくと

$$r^2 = 2, \quad 2\theta = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\text{したがって} \quad r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{すなわち} \quad z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -1 + i$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = 1 - i$$

(2) (1) の結果から, $\alpha = -1 + i$, $\beta = 1 - i$ であるから

$$\begin{aligned} w - \alpha &= \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)} - (-1 + i) \\ &= \frac{3(1-i)z - 2i + (1-i)\{z + 3(1-i)\}}{z + 3(1-i)} = \frac{4(1-i)(z - \alpha)}{z + 3(1-i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w - \beta &= \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)} - (1 - i) \\ &= \frac{3(1-i)z - 2i - (1-i)\{z + 3(1-i)\}}{z + 3(1-i)} = \frac{2(1-i)(z - \beta)}{z + 3(1-i)} \end{aligned}$$

$$\text{上の 2 式から} \quad \frac{w - \beta}{w - \alpha} = \frac{2(1-i)}{4(1-i)} \cdot \frac{z - \beta}{z - \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{2(1-i)}{4(1-i)} = \frac{1}{2}$$

$$(3) (2) \text{ の結果から} \quad \frac{z_{n+1} - \beta}{z_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z_n - \beta}{z_n - \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{z_n - \beta}{z_n - \alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{z_1 - \beta}{z_1 - \alpha}$$

$z_1 = 0$, $-\alpha = \beta$ であるから

$$\frac{z_n - \beta}{z_n + \beta} = -\frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{ゆえに} \quad z_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} + 1} \beta = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} + 1} (1 - i)$$

$$\text{よって} \quad x_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} + 1}, \quad y_n = -\frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1} + 1}$$

$$\text{また} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{2^{n-1}}}{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} = -1$$

- 8 (1) $A(1, 2, 6)$, $B(7, 0, 9)$, $C(s, t, 0)$ より

$$\vec{AB} = (6, -2, 3), \quad \vec{AC} = (s-1, t-2, -6)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 6(s-1) - 2(t-2) + 3 \cdot (-6) \\ &= 6s - 2t - 20 \end{aligned}$$

- (2) $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$ より, $|\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2$ であるから

$$6^2 + (-2)^2 + 3^2 = (s-1)^2 + (t-2)^2 + (-6)^2$$

$$\text{したがって } (s-1)^2 + (t-2)^2 = 13$$

- (3) $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ であるから, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ を (1) の結果に代入すると

$$6s - 2t - 20 = 0 \quad \text{ゆえに } t = 3s - 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに, ①を (2) の結果に代入すると

$$(s-1)^2 + (3s-10-2)^2 = 13 \quad \text{整理すると } 5s^2 - 37s + 66 = 0$$

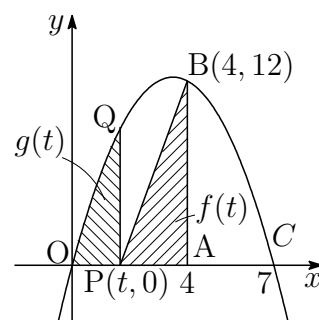
$$\text{ゆえに } (s-3)(5s-22) = 0 \quad \text{これを解いて } s = 3, \frac{22}{5}$$

$$\text{よって, ①から } (s, t) = (3, -1), \left(\frac{22}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

- 9 (1) 右の図から $f(t) = \frac{1}{2}PA \cdot AB = \frac{1}{2}(4-t) \cdot 12 = -6t + 24$

- (2) 右の図から

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t (-x^2 + 7x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 \end{aligned}$$



- (3) (1), (2) の結果から $h(t) = f(t) + g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 6t + 24$

$$\text{これを微分すると } h'(t) = -t^2 + 7t - 6 = -(t-1)(t-6)$$

$0 < t < 4$ であるから, その増減表は

t	(0)	...	1	...	(4)
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$		↘	極小	↗	

$$\text{よって, 最小値は } h(1) = \frac{127}{6}$$