平成28年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・医・農・教育学部　平成28年2月25日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農学部　$\boxed{1}$ (1)(2) $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ 数I・II・A・B (120分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ (1)(2) $\boxed{4}$ $\boxed{9}$ 数I・II・A・B (100分)

1 $0 < p < 1$ とする．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + pa_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問に答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

2 次の問に答えよ．

(1) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用して，不定積分 $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx$ を求めよ．

(2) 2つの曲線 $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

3 0でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1) $-\overline{z}$

(2) $\dfrac{1}{z^2}$

(3) $z - |z|$

4 1から5の数字が書かれたカードが1枚ずつある．これらから4枚を選び，横1列に並べる．並べられたカードに書かれた数字を左から順に a，b，c，d とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) カードの並べ方の総数を求めよ．

(2) 次のルールのもとで，3と4のカードを捨てる場合は何通りあるかを求めよ．

- $a < b < c < d$ ならば，b と c のカードを捨てる．
- $a < b < d < c$ ならば，b と d のカードを捨てる．
- $b < a < c < d$ ならば，a と c のカードを捨てる．
- $b < a < d < c$ ならば，a と d のカードを捨てる．
- その他は何も捨てない．

(3) (2)のルールのもとで，何も捨てない確率を求めよ．

5 2つの曲線 $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

6 実数 a，b は $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$a^2 + b^2 = 1$ を満たしているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 定積分

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, a\sin x - b\cos x \,|\, dx$$

を a，b を用いて表せ．

(2) S の最大値，最小値とそのときの a，b の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{7}$ 複素数平面上の点 z に対して

$$w = \frac{3(1-i)z - 2i}{z + 3(1-i)}$$

で表される点 w をとる．このとき，次の問に答えよ．

(1) $w = z$ となるような点 z は 2 つある．これらを求めよ．

(2) (1) で求めた異なる 2 点を α，β とする．ただし，$0 \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 2\pi$ とする．z が α，β と異なる点であるとき，

$$\frac{w-\beta}{w-\alpha} = k\cdot\frac{z-\beta}{z-\alpha}$$

となるような定数 k の値を求めよ．

(3) 複素数 z_n を

$$z_1 = 0, \quad z_{n+1} = \frac{3(1-i)z_n - 2i}{z_n + 3(1-i)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また，z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とする．このとき，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．さらに，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の極限を求めよ．

$\boxed{8}$ 空間に 3 点 A$(1,\ 2,\ 6)$，B$(7,\ 0,\ 9)$，C$(s,\ t,\ 0)$ がある．ただし，s，t は実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を s と t を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ となるとき，s と t の関係式を求めよ．

(3) $\triangle$ABC が $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となるとき，s と t の値を求めよ．

$\boxed{9}$ O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(4,\ 0)$，P$(t,\ 0)$ をとる．ただし，$0 < t < 4$ とする．さらに放物線 $C : y = -x^2 + 7x$ 上に 2 点 B$(4,\ 12)$，Q$(t, -t^2 + 7t)$ をとる．$\triangle$APB の面積を $f(t)$ とし，放物線 C，線分 PQ，線分 OP によって囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(t)$ を t を用いて表せ．

(2) $g(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $h(t) = f(t) + g(t)$ とおく．$0 < t < 4$ における $h(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -p(a_{n+1} - a_n) \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = -pb_n$$

$\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$，公比 $-p$ の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot (-p)^{n-1} = \boldsymbol{(-p)^{n-1}}$$

(2) (1) の結果から　$a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-p)^{k-1} = 1 + \dfrac{1 - (-p)^{n-1}}{1 + p}$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 1 + \dfrac{1 - (-p)^{n-1}}{1 + p}}$

(3) $0 < p < 1$ より　$-1 < -p < 0$ であるから　$\lim_{n \to \infty} (-p)^{n-1} = 0$

よって　$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 + \dfrac{1}{1 + p} = \boldsymbol{\dfrac{2 + p}{1 + p}}$

別解 与えられた漸化式から

$$a_{n+2} + pa_{n+1} = a_{n+1} + pa_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + pa_n = a_2 + pa_1 = 2 + p$$

上式と $a_{n+1} - a_n = (-p)^{n-1}$ の差をとると

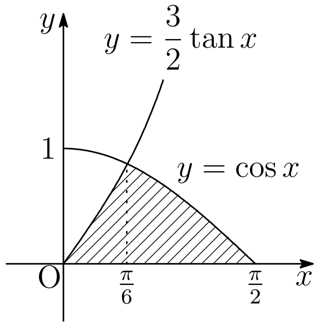
$$(1 + p)a_n = 2 + p - (-p)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{2 + p - (-p)^{n-1}}{1 + p}$$

■

2 (1) $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より，$\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ であるから

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$
$$= \boldsymbol{\tan x - x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\,\textbf{は積分定数)}$$

(2) $y = \dfrac{3}{2}\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の共有点の x 座標は



$$\frac{3}{2}\tan x = \cos x$$
$$3\sin x = 2\cos^2 x$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$
$$(\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より　　$x = \dfrac{\pi}{6}$

したがって，求める立体の体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{3}{2}\tan x\right)^2 dx + \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$
$$= \frac{9}{4}\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx$$
$$= \frac{9}{4}\pi\Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2}\Big[x + \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{5}{24}\pi^2}$$

■

3 (1) $-\overline{z} = (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$
$$= \boldsymbol{r\{\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\}}$$

(2) $\dfrac{1}{z^2} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{-2}$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\}}$$

(3) $z - |z| = r(\cos\theta + i\sin\theta) - r = r(\cos\theta - 1 + i\sin\theta)$
$$= r\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2r\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{2r\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}$$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$2r\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 異なる5枚のカードから4枚を1列に並べる順列の総数であるから

$$_5\mathrm{P}_4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = \mathbf{120}\ (\text{通り})$$

(2) i) $a < b < c < d$ において，$(b,\ c) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

ii) $a < b < d < c$ において，$(b,\ d) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(a,\ b,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

iii) $b < a < c < d$ において，$(a,\ c) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(b,\ a,\ c,\ d) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

iv) $b < a < d < c$ において，$(a,\ d) = (3,\ 4)$ のとき，次の2通り．

$$(b,\ a,\ d,\ c) = (1,\ 3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

i)〜iv) の総数であるから　$2+2+2+2 = \mathbf{8}$ (通り)

(3) 捨てられるカードは，3と4，2と3，2と4の3つの場合がある．
2と3の場合は，(2) で求めた3と4の場合と同様に8通り．
また，2と4の場合は，次の i)〜iv) の4通り．

i) $a < b < c < d$ において，$(b,\ c) = (2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

ii) $a < b < d < c$ において，$(b,\ d) = (2,\ 4)$ のとき

$$(a,\ b,\ d,\ c) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

iii) $b < a < c < d$ において，$(a,\ c) = (2,\ 4)$ のとき

$$(b,\ a,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

iv) $b < a < d < c$ において，$(a,\ d) = (3,\ 4)$ のとき

$$(b,\ a,\ d,\ c) = (1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

したがって，カードを捨てる確率は　$\dfrac{8+8+4}{120} = \dfrac{1}{6}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{1}{6} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$(2) と同じ ■

$\boxed{6}$ (1) a，b の条件から

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, a\sin x - b\cos x \,|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta\sin x - \sin\theta\cos x|\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x-\theta)|\, dx \\
&= -\int_0^{\theta} \sin(x-\theta) + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-\theta)\, dx \\
&= \Big[\ \cos(x-\theta)\ \Big]_0^{\theta} - \Big[\ \cos(x-\theta)\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 - \cos\theta - \sin\theta \quad \cdots ① \\
&= \boldsymbol{2 - a - b}
\end{aligned}$$

(2) ① から

$$S = 2 - \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{(a,\ b) = (1, 0), (0, 1)}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{1}$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\boldsymbol{a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2 - \sqrt{2}}$　■

$\boxed{7}$ (1) $w = z$ のとき　$z = \dfrac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)}$　整理すると　$z^2 = -2i$

$-2i = 2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくと

$$r^2 = 2, \quad 2\theta = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \ (n \text{ は整数})$$

したがって　$r = \sqrt{2}$，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

すなわち　$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right) = \boldsymbol{-1+i}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right) = \boldsymbol{1-i}$

(2) (1) の結果から，$\alpha = -1+i$，$\beta = 1-i$ であるから

$$\begin{aligned} w-\alpha &= \frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)} - (-1+i) \\ &= \frac{3(1-i)z-2i+(1-i)\{z+3(1-i)\}}{z+3(1-i)} = \frac{4(1-i)(z-\alpha)}{z+3(1-i)} \\ w-\beta &= \frac{3(1-i)z-2i}{z+3(1-i)} - (1-i) \\ &= \frac{3(1-i)z-2i-(1-i)\{z+3(1-i)\}}{z+3(1-i)} = \frac{2(1-i)(z-\beta)}{z+3(1-i)} \end{aligned}$$

上の 2 式から　$\dfrac{w-\beta}{w-\alpha} = \dfrac{2(1-i)}{4(1-i)}\cdot\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$　ゆえに　$k = \dfrac{2(1-i)}{4(1-i)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) (2) の結果から　$\dfrac{z_{n+1}-\beta}{z_{n+1}-\alpha} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha}$　ゆえに　$\dfrac{z_n-\beta}{z_n-\alpha} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{z_1-\beta}{z_1-\alpha}$

$z_1 = 0$，$-\alpha = \beta$ であるから

$$\frac{z_n-\beta}{z_n+\beta} = -\frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{ゆえに} \quad z_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}\beta = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}(1-i)$$

よって　$\boldsymbol{x_n = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}}$，　$\boldsymbol{y_n = -\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}+1}}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}} = \boldsymbol{1}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}} = \boldsymbol{-1}$

■

$\boxed{8}$ (1) A(1, 2, 6)，B(7, 0, 9)，C(s, t, 0) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6, -2,\ 3), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s-1,\ t-2, -6)$$

したがって $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6(s-1) - 2(t-2) + 3\cdot(-6)$$
$$= \boldsymbol{6s - 2t - 20}$$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ であるから

$$6^2 + (-2)^2 + 3^2 = (s-1)^2 + (t-2)^2 + (-6)^2$$

したがって $$\boldsymbol{(s-1)^2 + (t-2)^2 = 13}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ を (1) の結果に代入すると

$$6s - 2t - 20 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 3s - 10 \quad \cdots①$$

さらに，① を (2) の結果に代入すると

$$(s-1)^2 + (3s-10-2)^2 = 13 \quad \text{整理すると} \quad 5s^2 - 37s + 66 = 0$$

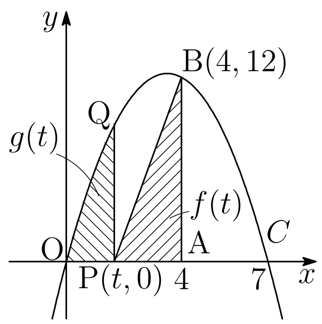
ゆえに $(s-3)(5s-22) = 0$ これを解いて $s = 3,\ \dfrac{22}{5}$

よって，① から $$\boldsymbol{(s,\ t) = (3, -1),\ \left(\frac{22}{5},\ \frac{16}{5}\right)}$$ ■

$\boxed{9}$ (1) 右の図から $f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}(4-t)\cdot 12 = \boldsymbol{-6t + 24}$

(2) 右の図から

$$g(t) = \int_0^t (-x^2 + 7x)\,dx$$
$$= \left[\,-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2\,\right]_0^t$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2}$$



(3) (1)，(2) の結果から $h(t) = f(t) + g(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{7}{2}t^2 - 6t + 24$

これを微分すると $h'(t) = -t^2 + 7t - 6 = -(t-1)(t-6)$

$0 < t < 4$ であるから，その増減表は

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		↘	極小	↗	

よって，最小値は $\boldsymbol{h(1) = \dfrac{127}{6}}$ ■