

平成 27 年度 佐賀大学 2 次試験後期日程 (数学問題)

理工・農学部 平成 27 年 3 月 12 日

- 理工学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は, [1], [2] (1)(2)(3), [5], [6] 数 I・II・A・B (120 分)

[1] 次の問に答えよ.

(1) 2 つの等式

$$\sin \theta = \frac{1}{m}, \quad \cos 2\theta = \frac{1}{n+1}$$

を満たす θ が存在するような自然数の組 (m, n) をすべて求めよ.

(2) 3 つの等式

$$\tan \alpha = \frac{1}{m}, \quad \tan \beta = \frac{1}{n}, \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{n}$$

を満たす α, β が存在するような自然数の組 (m, n) をすべて求めよ.[2] 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ とおくとき, a_n を b_n を用いて表せ.
- (2) (1) の数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導き, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

[3] $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \int_x^{2x} (x-t) \log t \, dt$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) 不定積分 $\int t \log t \, dt$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ および $f'(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ の極値を求めよ.

4 曲線 $C_1: y = e^x$ と曲線 $C_2: y = e^{3x} - \left(e - \frac{1}{e}\right) e^{2x}$ について、次の問に答えよ。

- (1) 方程式 $x = x^3 - \left(e - \frac{1}{e}\right) x^2$ を解け。
- (2) C_1 と C_2 の共有点が 1 点だけであることを示せ。また、共有点 P の座標 (a, b) を求めよ。
- (3) (2) で求めた a に対して、 $x < a$ において C_1 は C_2 の上側にあることを示せ。
- (4) (2) で求めた a に対して、 $t < a$ のとき、 C_1 と C_2 および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする。極限值 $\lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)$ を求めよ。

5 a を正の定数とする。放物線 $C: y = x^2$ の点 (a, a^2) を P とし、点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を A とおく。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 点 P における C の接線と y 軸との交点を B とする。点 B の y 座標を a を用いて表せ。
- (2) (1) の点 B について、 $AB = AP$ を示せ。
- (3) 直線 AP と C の交点のうち P と異なるものを Q とし、線分 PQ の長さを d とする。 d を a を用いて表せ。
- (4) (3) の点 Q について、線分 PQ と C で囲まれた図形の面積を S とする。 S を a を用いて表せ。また、 S を (3) の d のみを用いて表せ。

6 a を実数とするとき、関数

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2a(2^x + 2^{-x}) + a^2 + 2a - 5$$

について、次の問に答えよ。

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき、 t のとりうる値の範囲の求めよ。また、 $f(x)$ を t と a を用いて表せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 4 個の実数解をもつように、 a の値の範囲を定めよ。

正解

1 (1) 2倍角の公式により $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$

上式に $\sin \theta = \frac{1}{m}$, $\cos 2\theta = \frac{1}{n+1}$ を代入すると

$$1 - \frac{2}{m^2} = \frac{1}{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{2}{m^2 - 2}$$

$m^2 - 2$ は 2 の約数であり, m は自然数であるから $m = 2$

よって $(m, n) = (2, 1)$

(2) 加法定理により $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

上式に $\tan \alpha = \frac{1}{m}$, $\tan \beta = \frac{1}{n}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{n}$ を代入すると

$$\frac{2}{n} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} \quad \text{ゆえに} \quad m = n + \frac{2}{n}$$

自然数 n は 2 の約数であるから $n = 1, 2$

よって $(m, n) = (3, 1), (3, 2)$

2 (1) $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ より $a_n = \frac{2 + b_n}{1 - b_n}$

(2) $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$ より $a_{n+1} + 1 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n}$, $a_{n+1} - 2 = -\frac{a_n - 2}{a_n}$

上の 2 式から $\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ ゆえに $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 + 1} = -\frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると $a_n = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

(4) (3) の結果から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = 2$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \quad (1) \quad \int t \log t \, dt &= \int \left(\frac{1}{2}t^2\right)' \log t \, dt \\
 &= \frac{1}{2}t^2 \log t - \int \frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{1}{t} \, dt \\
 &= \frac{1}{2}t^2 \log t - \frac{1}{4}t^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_x^{2x} (x-t) \log t \, dt = x \int_x^{2x} \log t \, dt - \int_x^{2x} t \log t \, dt \\
 &= x \left[t(\log t - 1) \right]_x^{2x} - \left[\frac{1}{2}t^2 \log t - \frac{1}{4}t^2 \right]_x^{2x} \\
 &= x \{2x(\log 2x - 1) - x(\log x - 1)\} \\
 &\quad - (2x^2 \log 2x - x^2) + \left(\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{これを微分して} \quad f'(x) &= -x \log x - \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x \\
 &= -x \log x - x
 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $f'(x) = -x(\log x + 1)$

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

$$\text{よって} \quad \text{極大値} \quad f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{4e^2}$$

補足 $\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t) \, dt = g(\beta(x))\beta'(x) - g(\alpha(x))\alpha'(x)$ であるから

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \int_x^{2x} \log t \, dt - \int_x^{2x} t \log t \, dt \text{ より} \\
 f'(x) &= \int_x^{2x} \log t \, dt + x \left(\frac{d}{dx} \int_x^{2x} \log t \, dx \right) - \frac{d}{dx} \int_x^{2x} t \log t \, dt \\
 &= \left[t(\log t - 1) \right]_x^{2x} + x \{ \log 2x \cdot (2x)' - \log x \} \\
 &\quad - \{ 2x \log 2x \cdot (2x)' - x \log x \} \\
 &= -x \log x - x
 \end{aligned}$$

4 (1) $x = x^3 - \left(e - \frac{1}{e}\right)x^2$ より

$$x^3 - \left(e - \frac{1}{e}\right)x^2 - x = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x - e)\left(x + \frac{1}{e}\right) = 0$$

よって $x = 0, e, -\frac{1}{e}$

(2) $y = e^x$ と $y = e^{3x} - \left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x}$ から y を消去すると

$$e^x = e^{3x} - \left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x}$$

$u = e^x$ とおくと $u = u^3 - \left(e - \frac{1}{e}\right)u^2$

(1) の結果および $u > 0$ に注意して $u = e$ ゆえに $x = 1$

よって, P の座標は $(1, e)$

(3) $f(u) = u - \left\{u^3 - \left(e - \frac{1}{e}\right)u^2\right\}$ とおくと $f(u) = -u(u - e)\left(u + \frac{1}{e}\right)$

$x < 1$ のとき $f(e^x) = -e^x(e^x - e)\left(e^x + \frac{1}{e}\right) > 0$

したがって $e^x > e^{3x} - \left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x} \quad (x < 1)$

よって, $x < 1$ において C_1 は C_2 の上側にある.

$$\begin{aligned} (4) \quad S(t) &= \int_t^1 \left\{ e^x - e^{3x} + \left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x} \right\} dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x} \right]_t^1 \\ &= e - e^t - \frac{1}{3}(e^3 - e^{3t}) + \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)(e^2 - e^{2t}) \end{aligned}$$

よって $\lim_{t \rightarrow -\infty} S(t) = \frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{2}e$

補足 $u = e^x$ とおくと $\frac{du}{dx} = u$

x	$t \rightarrow 1$
u	$e^t \rightarrow e$

したがって $S(t) = \int_t^1 f(e^x) dx = \int_{e^t}^e f(u) \cdot \frac{1}{u} du$

よって $\lim_{t \rightarrow -\infty} S(t) = \int_0^e \left\{ -u^2 + \left(e - \frac{1}{e}\right)u + 1 \right\} du = \frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{2}e$

5 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

ゆえに, C 上の点 $P(a, a^2)$ における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

よって, この直線と y 軸との交点 B の座標は $(0, -a^2)$

(2) 2点 $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $B(0, -a^2)$ 間の距離は $AB = a^2 + \frac{1}{4}$

2点 $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $P(a, a^2)$ 間の距離は

$$AP = \sqrt{a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = a^2 + \frac{1}{4}$$

よって $AB = AP$

(3) 2点 $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $P(a, a^2)$ を通る直線の傾きは $\frac{a^2 - \frac{1}{4}}{a}$

この直線は点 A を通るから, その方程式は $y = \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{a}x + \frac{1}{4}$

この直線と放物線 $y = x^2$ の方程式から, y を消去すると

$$x^2 = \frac{a^2 - \frac{1}{4}}{a}x + \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad (x - a)(4ax + 1) = 0$$

P と異なる点 Q の x 座標は, $x \neq a$ であるから $x = -\frac{1}{4a}$

したがって, 点 Q の座標は $\left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{16a^2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad PQ^2 &= \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{16a^2}\right)^2 \\ &= \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 \left(a - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2 \left\{1 + \left(a - \frac{1}{4a}\right)^2\right\} = \left(a + \frac{1}{4a}\right)^4 \end{aligned}$$

よって $d = PQ = \left(a + \frac{1}{4a}\right)^2$

(4) $y = x^2$ の係数および P, Q の x 座標から $S = \frac{1}{6} \left(a + \frac{1}{4a}\right)^3 = \frac{1}{6} d^{\frac{3}{2}}$

6 (1) $t = 2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$ よって $t \geq 2$

等号が成立するのは $2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0$ すなわち $x = 0$

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^2 - 2) - 2at + a^2 + 2a - 5 \\ &= (t - a)^2 + 2a - 7 \end{aligned}$$

(2) $(2^x - 2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 4$ であるから, $t \geq 2$ のとき

$$2^x + 2^{-x} = t, \quad 2^x - 2^{-x} = \pm\sqrt{t^2 - 4}$$

上の2式から
$$2^x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

したがって
$$x = \log_2 \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} = \pm \log_2 \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

$f(x) = 0$ が異なる4個の実数解をもつのは, t に関する2次方程式

$$(t - a)^2 + 2a - 7 = 0$$

が2より大きい異なる2つの解をもつときであるから, 2次関数

$$g(t) = (t - a)^2 + 2a - 7$$

の頂点 $(a, 2a - 7)$ および $g(2)$ の符号について

$$\begin{aligned} a > 2, \quad 2a - 7 < 0, \quad g(2) &= (2 - a)^2 + 2a - 7 \\ &= (a + 1)(a - 3) > 0 \end{aligned}$$

これらを同時に満たす a の値の範囲を求めて $3 < a < \frac{7}{2}$