平成 27 年度　佐賀大学２次試験後期日程 (数学問題)
理工・農学部　平成 27 年 3 月 12 日

- 理工学部　1 2 3 4 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，1 , 2 (1)(2)(3), 5 , 6 数 I・II・A・B (120 分)

1 次の問に答えよ．

(1) 2 つの等式

$$\sin\theta = \frac{1}{m}, \quad \cos 2\theta = \frac{1}{n+1}$$

を満たす θ が存在するような自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

(2) 3 つの等式

$$\tan\alpha = \frac{1}{m}, \quad \tan\beta = \frac{1}{n}, \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{2}{n}$$

を満たす α，β が存在するような自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 1}$ とおくとき，a_n を b_n を用いて表せ．

(2) (1) の数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導き，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

3 $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \int_x^{2x} (x - t)\log t\,dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int t\log t\,dt$ を求めよ．

(2) $f(x)$ および $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の極値を求めよ．

4 曲線 $C_1 : y = e^x$ と曲線 $C_2 : y = e^{3x} - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)e^{2x}$ について，次の問に答えよ．

(1) 方程式 $x = x^3 - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)x^2$ を解け．

(2) C_1 と C_2 の共有点が 1 点だけであることを示せ．また，共有点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，$x < a$ において C_1 は C_2 の上側にあることを示せ．

(4) (2) で求めた a に対して，$t < a$ のとき，C_1 と C_2 および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} S(t)$ を求めよ．

5 a を正の定数とする．放物線 $C : y = x^2$ の点 $(a,\ a^2)$ を P とし，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を A とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 P における C の接線と y 軸との交点を B とする．点 B の y 座標を a を用いて表せ．

(2) (1) の点 B について，AB $=$ AP を示せ．

(3) 直線 AP と C の交点のうち P と異なるものを Q とし，線分 PQ の長さを d とする．d を a を用いて表せ．

(4) (3) の点 Q について，線分 PQ と C で囲まれた図形の面積を S とする．S を a を用いて表せ．また，S を (3) の d のみを用いて表せ．

6 a を実数とするとき，関数

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2a(2^x + 2^{-x}) + a^2 + 2a - 5$$

について，次の問に答えよ．

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき，t のとりうる値の範囲の求めよ．また，$f(x)$ を t と a を用いて表せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 4 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 2倍角の公式により　$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

上式に $\sin\theta = \dfrac{1}{m}$，$\cos 2\theta = \dfrac{1}{n+1}$ を代入すると

$$1 - \frac{2}{m^2} = \frac{1}{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{2}{m^2-2}$$

$m^2 - 2$ は 2 の約数であり，m は自然数であるから　$m = 2$

よって　$\boldsymbol{(m,\ n) = (2,\ 1)}$

(2) 加法定理により　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

上式に $\tan\alpha = \dfrac{1}{m}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{n}$，$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{2}{n}$ を代入すると

$$\frac{2}{n} = \frac{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}{1 - \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n}} \quad \text{ゆえに} \quad m = n + \frac{2}{n}$$

自然数 n は 2 の約数であるから　$n = 1,\ 2$

よって　$\boldsymbol{(m,\ n) = (3,\ 1),\ (3,\ 2)}$ ■

$\boxed{2}$ (1) $b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 1}$ より　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2 + b_n}{1 - b_n}}$

(2) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{a_n}$ より　$a_{n+1} + 1 = \dfrac{2(a_n+1)}{a_n}$，$a_{n+1} - 2 = -\dfrac{a_n - 2}{a_n}$

上の 2 式から　$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$　ゆえに　$\boldsymbol{b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}b_n}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{a_1 - 2}{a_1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

(3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$

(4) (3) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \mathbf{2}$ ■

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\int t\log t\,dt = \int\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\log t\,dt$

$$= \frac{1}{2}t^2\log t - \int\frac{1}{2}t^2\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{4}t^2 + C}\quad\textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(2) (1) の結果を用いて

$$f(x) = \int_x^{2x}(x-t)\log t\,dt = x\int_x^{2x}\log t\,dt - \int_x^{2x}t\log t\,dt$$

$$= x\Big[\,t(\log t - 1)\,\Big]_x^{2x} - \Big[\,\frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{4}t^2\,\Big]_x^{2x}$$

$$= x\left\{2x(\log 2x - 1) - x(\log x - 1)\right\}$$

$$\qquad - \left(2x^2\log 2x - x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right)$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2}$$

これを微分して　$f'(x) = -x\log x - \dfrac{1}{2}x^2\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}x$

$$= \boldsymbol{-x\log x - x}$$

(3) (2) の結果から　$f'(x) = -x(\log x + 1)$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　　**極大値** $\boldsymbol{f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{4e^2}}$

補足 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}g(t)\,dt = g(\beta(x))\beta'(x) - g(\alpha(x))\alpha'(x)$ であるから

$\displaystyle f(x) = x\int_x^{2x}\log t\,dt - \int_x^{2x}t\log t\,dt$ より

$$f'(x) = \int_x^{2x}\log t\,dt + x\left(\frac{d}{dx}\int_x^{2x}\log t\,dx\right) - \frac{d}{dx}\int_x^{2x}t\log t\,dt$$

$$= \Big[\,t(\log t - 1)\,\Big]_x^{2x} + x\left\{\log 2x\cdot(2x)' - \log x\right\}$$

$$\qquad - \left\{2x\log 2x\cdot(2x)' - x\log x\right\}$$

$$= -x\log x - x$$

■

4 (1) $x = x^3 - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)x^2$ より

$$x^3 - \left(e - \frac{1}{e}\right)x^2 - x = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x-e)\left(x + \frac{1}{e}\right) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{x = 0,\ e, -\dfrac{1}{e}}$

(2) $y = e^x$ と $y = e^{3x} - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)e^{2x}$ から y を消去すると

$$e^x = e^{3x} - \left(e - \frac{1}{e}\right)x^{2x}$$

$u = e^x$ とおくと　　$u = u^3 - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)u^2$

(1) の結果および $u > 0$ に注意して　$u = e$　ゆえに　$x = 1$

よって，P の座標は　　$\boldsymbol{(1,\ e)}$

(3) $f(u) = u - \left\{u^3 - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)u^2\right\}$ とおくと　$f(u) = -u(u-e)\left(u + \dfrac{1}{e}\right)$

$x < 1$ のとき　$f(e^x) = -e^x(e^x - e)\left(e^x + \dfrac{1}{e}\right) > 0$

したがって　　$e^x > e^{3x} - \left(e - \dfrac{1}{e}\right)e^{2x} \quad (x < 1)$

よって，$x < 1$ において C_1 は C_2 の上側にある．

(4)
$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^1 \left\{e^x - e^{3x} + \left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x}\right\}dt \\ &= \left[\ e^x - \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)e^{2x}\ \right]_t^1 \\ &= e - e^t - \frac{1}{3}(e^3 - e^{3t}) + \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)(e^2 - e^{2t}) \end{aligned}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} S(t) = \boldsymbol{\frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{2}e}$

補足 $u = e^x$ とおくと　$\dfrac{du}{dx} = u$

x	$t \longrightarrow 1$
u	$e^t \longrightarrow e$

したがって　　$S(t) = \displaystyle\int_t^1 f(e^x)\,dx = \int_{e^t}^e f(u)\cdot\frac{1}{u}du$

よって　$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} S(t) = \int_0^e \left\{-u^2 + \left(e - \frac{1}{e}\right)u + 1\right\}du = \frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{2}e$　■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

ゆえに，C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad y=2ax-a^2$$

よって，この直線と y 軸との交点 B の座標は　$\boldsymbol{(0,-a^2)}$

(2) 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{B}(0,-a^2)$ 間の距離は　$\mathrm{AB}=a^2+\dfrac{1}{4}$

2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ 間の距離は

$$\mathrm{AP}=\sqrt{a^2+\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}\right)^2}=a^2+\frac{1}{4}$$

よって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{AP}$

(3) 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通る直線の傾きは　$\dfrac{a^2-\frac{1}{4}}{a}$

この直線は点 A を通るから，その方程式は　$y=\dfrac{a^2-\frac{1}{4}}{a}x+\dfrac{1}{4}$

この直線と放物線 $y=x^2$ の方程式から，y を消去すると

$$x^2=\frac{a^2-\frac{1}{4}}{a}x+\frac{1}{4}\quad \text{ゆえに}\quad (x-a)(4ax+1)=0$$

P と異なる点 Q の x 座標は，$x\neq a$ であるから　$x=-\dfrac{1}{4a}$

したがって，点 Q の座標は　$\left(-\dfrac{1}{4a},\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2+\left(a^2-\frac{1}{16a^2}\right)^2\\&=\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2+\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2\left(a-\frac{1}{4a}\right)^2\\&=\left(a+\frac{1}{4a}\right)^2\left\{1+\left(a-\frac{1}{4a}\right)^2\right\}=\left(a+\frac{1}{4a}\right)^4\end{aligned}$$

よって　　$d=\mathrm{PQ}=\boldsymbol{\left(a+\dfrac{1}{4a}\right)^2}$

(4) $y=x^2$ の係数および P，Q の x 座標から　$S=\dfrac{1}{6}\left(a+\dfrac{1}{4a}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}d^{\frac{3}{2}}}$　■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $t = 2^x + 2^{-x} = \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 2$　よって　$\boldsymbol{t \geqq 2}$

等号が成立するのは　$2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0$　すなわち　$x = 0$

$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^2 - 2) - 2at + a^2 + 2a - 5 \\ &= \boldsymbol{(t - a)^2 + 2a - 7} \end{aligned}$$

(2) $(2^x - 2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 4$ であるから，$t \geqq 2$ のとき

$$2^x + 2^{-x} = t, \quad 2^x - 2^{-x} = \pm\sqrt{t^2 - 4}$$

上の 2 式から　$2^x = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$

したがって　$x = \log_2 \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} = \pm \log_2 \dfrac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$

$f(x) = 0$ が異なる 4 個の実数解をもつのは，t に関する 2 次方程式

$$(t - a)^2 + 2a - 7 = 0$$

が 2 より大きい異なる 2 つの解をもつときであるから，2 次関数

$$g(t) = (t - a)^2 + 2a - 7$$

の頂点 $(a,\ 2a - 7)$ および $g(2)$ の符号について

$$a > 2, \quad 2a - 7 < 0, \quad \begin{aligned} g(2) &= (2 - a)^2 + 2a - 7 \\ &= (a + 1)(a - 3) > 0 \end{aligned}$$

これらを同時に満たす a の値の範囲を求めて　$\boldsymbol{3 < a < \dfrac{7}{2}}$　■