平成 27 年度　佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・文化教育学部　平成 27 年 2 月 25 日

- 理工学部は， $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は， $\boxed{3}$ ～ $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は， $\boxed{4}$, $\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部は， $\boxed{7}$ ～ $\boxed{9}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$f(x) = \begin{cases} x(5-x) & (x \geqq 0) \\ x(x^2-1) & (x < 0) \end{cases}$$

とおき，関数 $y = f(x)$ のグラフを C とおく．直線 $y = ax$ と C は，原点 O およびそれ以外の 2 点 P，Q で交わっているものとする．ただし，点 P の x 座標は正，点 Q の x 座標は負であるとする．線分 OP と C によって囲まれる図形の面積を $S_1(a)$，線分 OQ と C によって囲まれる図形の面積を $S_2(a)$ とし，$S(a) = S_1(a) + S_2(a)$ とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) $S_1(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $S_2(a)$ を a を用いて表せ．

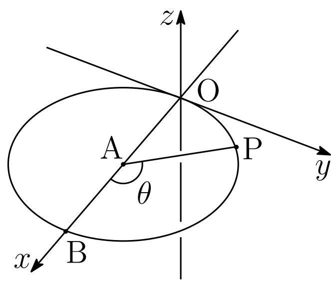
(4) (1) で求めた範囲を a が変化するとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 直線 $\ell : y = ax + b$ と曲線 $C : y = \log x$ $(x > 0)$ は接するものとする．ただし，a，b は定数であり，$a > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) ℓ と C および x 軸で囲まれた図形の面積を S とする．$0 < a < 1$ のとき，S を a を用いて表せ．

3 点 O を原点とし，x 軸，y 軸，z 軸を座標軸とする座標空間において，3 点 A(1, 0, 0)，B(2, 0, 0)，C(1, 0, 1) がある．点 A を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上に点 P をとり，図のように $\theta = \angle\mathrm{BAP}$ とおく．ただし，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ とする．また，直線 CP と yz 平面の交点を Q とおく．このとき，次の問に答えよ．



(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．

(3) θ の値が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化するとき，yz 平面における点 Q の軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ．

4 正方形の 4 個の頂点を，時計回りに順に A，B，C，D とする．頂点 A から出発して頂点上を時計回りに点 P を進めるゲームを行う．硬貨を 1 回投げるごとに，表が出たときには頂点 1 つ分だけ点 P を進め，裏が出たときには頂点 2 つ分だけ点 P を進めるものとする．ただし，点 P が頂点 D にとまった時点でゲームは終わるものとする．

硬貨を n 回投げ終えた時点で点 P が頂点 A に到達する確率を p_n とするとき，次の問に答えよ．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_4，p_5 を求めよ．

(3) p_{12} を求めよ．

5 a，b は定数であり，$0 < a < b$ とする．定積分

$$I = \int_0^1 a^{1-t} b^t \, dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) I を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ．また，$I > \sqrt{ab}$ を示せ．

(3) $0 < t < 1$ とする．$x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3) の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ p を素数とするとき，次の問に答えよ．

(1) 2 つの自然数 m，n の最大公約数は 1 であるとし，$x = \dfrac{n}{m}$ とおく．p^x が有理数であるならば，$m = 1$ であることを示せ．

(2) 方程式

$$p^x = -x^2 + 9x - 5$$

が有理数の解 x をもつような組 $(p,\ x)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{6}, \qquad \sum_{k=11}^{40} a_k = 250$$

を満たすとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $a_n \leqq 10$ となる n の最大値 N を求めよ．

(3) (2) で求めた N に対して，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ a，b，c を正の定数とし，3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ の定める平面を α とする．また，原点を O とし，平面 α に垂直な単位ベクトルを $\vec{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ とする．ただし，$n_1 > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{n}$ を求めよ．

(2) 平面 α 上に点 H があり，直線 OH は α に垂直であるとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積を S_1 とする．四面体 OABC の体積を考えることにより，$S_1 = n_1 S$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ a を定数とし，関数

$$f(\theta) = \sin^3\theta + a\cos 2\theta + \frac{21}{4}\sin\theta$$

は $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{13}{4}$ を満たすものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) $t = \sin\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t を用いて表せ．

(3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 直線 $y = ax$ を ℓ とする．

$x > 0$ のとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

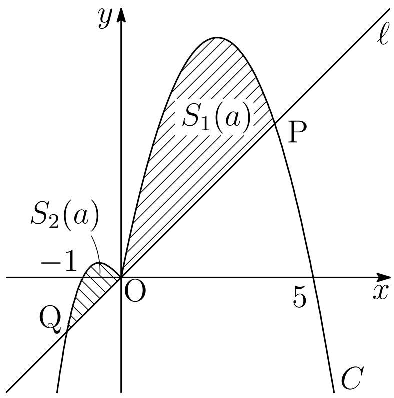
$$x(5-x) = ax \quad \text{ゆえに} \quad x(x-5+a) = 0$$

よって，点 P の x 座標は　$x = 5 - a$

$x < 0$ のとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x(x^2-1) = ax \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2-a-1) = 0$$

よって，点 Q の x 座標は　$x = -\sqrt{a+1}$



P，Q それぞれの x 座標の符号から　$5 - a > 0$，$-\sqrt{a+1} < 0$

これを解いて　$\boldsymbol{-1 < a < 5}$

(2) $$S_1(a) = \int_0^{5-a} \{x(5-x) - ax\}\,dx$$
$$= -\int_0^{5-a} x(x-5+a)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{6}(5-a)^3}$$

(3) $$S_2(a) = \int_{-\sqrt{a+1}}^{0} \{(x^3 - x) - ax\}\,dx = \int_{-\sqrt{a+1}}^{0} \{x^3 - (a+1)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(a+1)x^2\right]_{-\sqrt{a+1}}^{0} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(a+1)^2}$$

(4) $S(a) = S_1(a) + S_2(a)$ より，(2)，(3) の結果から

$$S(a) = \frac{1}{6}(5-a)^3 + \frac{1}{4}(a+1)^2$$
$$S'(a) = -\frac{1}{2}(5-a)^2 + \frac{1}{2}(a+1) = -\frac{1}{2}(a-3)(a-8)$$

$-1 < a < 5$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる．

a	(-1)	$\cdots$	3	$\cdots$	(5)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	

よって，$S(a)$ の最小値は　$S(3) = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=ax+b$，$g(x)=\log x$ とおくと

$$f'(x)=a,\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

ℓ と C の接点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

$$at+b=\log t,\quad a=\frac{1}{t}$$

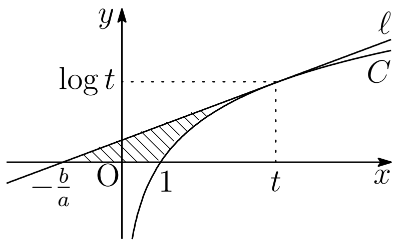
上の第 2 式より，$t=\dfrac{1}{a}$ であるから，これを第 1 式に代入すると

$$a\cdot\frac{1}{a}+b=\log\frac{1}{a}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b=-\log a-1}$$

(2) $0<a<1$ より　$t=\dfrac{1}{a}>1$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は

$$ax+b=0\quad \text{ゆえに}\quad x=-\frac{b}{a}$$



求める面積は，右の図の斜線部分であるから，(1) の結果により

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\left\{t-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}\log t-\int_1^t\log x\,dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\right)\log t-\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^t\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{\log a+1}{a}\right)\log t-t(\log t-1)-1\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{\log a}{a}\right)(-\log a)-\frac{1}{a}(-\log a-1)-1\\
&=\frac{(\log a)^2}{2a}+\frac{\log a+1}{a}-1\\
&=\boldsymbol{\frac{(\log a)^2+2\log a-2a+2}{2a}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= (1,\ 0,\ 0) + (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\ &= (1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\end{aligned}$$

よって，点 P の座標は　$\boldsymbol{(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)}$

(2) 直線 CP を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (1-t)(1,\ 0,\ 1) + t(1+\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)\\ &= (1+t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t) \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

直線 CP と yz 平面との交点 Q の x 座標は 0 であるから

$$1+t\cos\theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{1}{\cos\theta}$$

これを $(*)$ に代入すると　$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0},\ -\tan\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\cos\boldsymbol{\theta}}\right)$

(3) (2) の結果から，点 $\mathrm{Q}(0,\ y,\ z)$ は

$$y = -\tan\theta, \quad z = 1+\frac{1}{\cos\theta} \qquad \cdots(**)$$

このとき，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ より　$z \leqq 0 \quad \cdots ①$

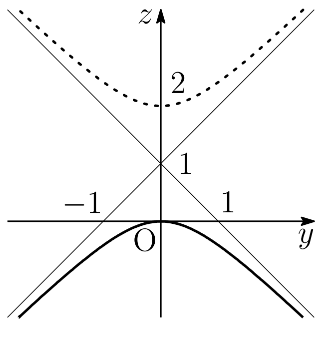
$(**)$ から　$\tan\theta = -y$，$\dfrac{1}{\cos\theta} = z-1$

これらを $1+\tan^2\theta = \left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ に代入すると　$1+(-y)^2 = (z-1)^2$

点 Q の軌跡の方程式は，上式および ① から

$$\boldsymbol{x = 0, \quad y^2 - (z-1)^2 = -1, \quad z \leqq 0}$$

yz 平面における点 Q が描く軌跡は，双曲線 $y^2 - z^2 = -1$ を z 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，下の図の実線部分である．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) p_2 は，2 回連続して裏が出る確率であるから

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

p_3 は,「表表裏」の順に出る確率であるから

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

(2) (1) の結果から

$$p_4 = p_2 \times p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{16}}$$
$$p_5 = p_3 \times p_2 + p_2 \times p_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{16}}$$

(3) (2) の結果から

$$p_6 = p_4 \times p_2 + p_3 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$
$$p_7 = p_5 \times p_2 + p_4 \times p_3 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$$
$$p_8 = p_6 \times p_2 + p_5 \times p_3 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$
$$p_9 = p_7 \times p_2 + p_6 \times p_3 = \frac{3}{128} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{512}$$
$$p_{10} = p_8 \times p_2 + p_7 \times p_3 = \frac{1}{64} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{128} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{1024}$$

よって

$$p_{12} = p_{10} \times p_2 + p_9 \times p_3 = \frac{7}{1024} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{512} \times \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{3}{1024}}$$

別解 p_2，p_3 に対する事象をそれぞれ X，Y とする．硬貨を 12 回投げ終えて P が A に到達するまでに X，Y が起きた回数をそれぞれ x，y とすると

$$2x + 3y = 12 \quad \text{これを解いて} \quad (x,\ y) = (6,\ 0),\ (3,\ 2),\ (0,\ 4)$$

よって，求める確率は

$$p_{12} = (p_2)^6 + {}_5\mathrm{C}_2 (p_2)^3 (p_3)^2 + (p_3)^4$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 10\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{3}{1024}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $I = \displaystyle\int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt = a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$

$$= \frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left[\ \left(\frac{b}{a}\right)^t\ \right]_0^1 = \frac{a}{\log\frac{b}{a}}\left(\frac{b}{a}-1\right) = \boldsymbol{\frac{b-a}{\log b - \log a}}$$

(2) $\left(a^{\frac{1-t}{2}}b^{\frac{t}{2}} - a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}\right)^2 \geqq 0 \cdots (*)$ であるから

$$a^{1-t}b^t - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + a^t b^{1-t} \geqq 0$$

すなわち　$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots (**)$

$0 < a < b$ より，$(*)$ において，等号が成立するとき

$$a^{\frac{1-t}{2}}b^{\frac{t}{2}} = a^{\frac{t}{2}}b^{\frac{1-t}{2}}$$

したがって　$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}-t} = 1$　すなわち　$t = \dfrac{1}{2}$

$I = \displaystyle\int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt$ で $u = 1-t$ とおくと　$\dfrac{dt}{du} = -1$，

t	$0 \longrightarrow 1$
u	$1 \longrightarrow 0$

したがって　$I = \displaystyle\int_1^0 a^u b^{1-u}\,(-du) = \int_0^1 a^u b^{1-u}\,du = \int_0^1 a^t b^{1-t}\,dt$

$(**)$ において，等号が成立するのは，$t = \dfrac{1}{2}$ のときに限るので

$$\int_0^1 (a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t})\,dt > \int_0^1 2\sqrt{ab}\,dt$$

したがって　$I + I > 2\sqrt{ab}\Big[\ t\ \Big]_0^1$　よって　$I > \sqrt{ab}$

(3) $f(u) = u^t$ とおくと，$f'(u) = tu^{t-1}$．平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c) \quad (1 < c < x)$$

を満たす c が存在する．$0 < t < 1$ より　$f'(c) = tc^{t-1} < t{\cdot}1^{t-1} = t$

したがって　$\dfrac{x^t - 1}{x-1} < t$　よって　$x^t < 1 + t(x-1)$

(4) $0 < a < b$ より，$x = \dfrac{b}{a} > 1$ とおくと，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^t < 1 + t\left(\dfrac{b}{a}-1\right)$ であるから

$$I = a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt < a\int_0^1 \left\{1 + t\left(\frac{b}{a}-1\right)\right\} dt = \frac{a+b}{2}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) p^x が有理数 $\dfrac{a}{b}$ に等しいとき (a，b は互いに素とする)

$$p^{\frac{n}{m}} = \frac{a}{b} \qquad \text{ゆえに} \qquad p^n = \frac{a^m}{b^m} \quad \cdots ①$$

① は整数であるから　$b^m = 1$　ゆえに　$b = 1$

これを ① に代入すると　　$p^n = a^m \quad \cdots ②$

② より，a は p を因数にもつから，$a = p^k$ とおく (k は整数).

これを ② に代入すると

$$p^n = (p^k)^m \qquad \text{ゆえに} \qquad p^n = p^{km}$$

上の第 2 式から　　$n = km$　　ゆえに　　$k = \dfrac{n}{m}$

m，n の最大公約数は 1 であるから　　$m = 1$

(2) (1) の結果から，x は整数であるから

$$p^x = -x^2 + 9x - 5 \quad \cdots (*)$$

は正の整数である．$f(x) = -x^2 + 9x - 5$ とおくと，$f(x) > 0$ となる x は

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	9	13	15	15	13	9	3

上の表から，$(*)$ を満たすのは，次の 2 つである．

$$3^1 = f(1), \quad 3^2 = f(2)$$

よって　　$\boldsymbol{(p,\ x) = (3,\ 1),\ (3,\ 2)}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_{11}=\frac{1}{6}+10d,\quad a_{40}=\frac{1}{6}+39d$$

$\displaystyle\sum_{k=11}^{40}a_k=250$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 30\left\{\left(\frac{1}{6}+10d\right)+\left(\frac{1}{6}+39d\right)\right\}=250\quad \text{これを解いて}\quad d=\frac{1}{3}$$

よって，$\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\frac{1}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}}$

(2) (1) の結果から，$a_n\leqq 10$ のとき

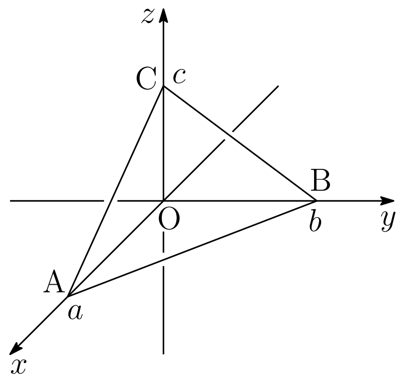
$$\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}\leqq 10\quad \text{ゆえに}\quad n\leqq 30+\frac{1}{2}$$

これを満たす n の最大値 N は　**30**

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}a_k&=\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{3}k-\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 30(30+1)-\frac{1}{6}\cdot 30=\mathbf{150}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-a,\ b,\ 0),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a,\ 0,\ c)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{r} = (bc,\ ca,\ ab)$$

とおくと，$\vec{n}$ の x 成分の符号に注意して

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}\,|}\vec{r} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}(bc,\ ca,\ ab)}$$

(2) $$\vec{r} = (bc,\ ca,\ ab) = \frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{r}$ に平行であるから (k は定数)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{r}$　$\cdots$ ②

① を ② に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= k\left(\frac{bc}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\ &= \frac{bc}{a}k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ca}{b}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{ab}{c}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

H は平面 α 上の点であるから　$\dfrac{bc}{a}k + \dfrac{ca}{b}k + \dfrac{ab}{c}k = 1$

したがって　$k = \dfrac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2} = \dfrac{abc}{|\vec{r}\,|^2}$　$\cdots$ ③

②，③ および $k > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}\vec{r}\\ &= \boldsymbol{\frac{abc}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}(bc,\ ca,\ ab)}\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = k|\vec{r}\,| = \frac{abc}{|\vec{r}\,|^2}|\vec{r}\,| = \frac{abc}{|\vec{r}\,|} = \boldsymbol{\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}}$$

(3) (1) の結果から　$n_1 = \dfrac{bc}{|\vec{r}\,|}$

四面体 OABC の体積により，$\dfrac{1}{3}S_1 a = \dfrac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ であるから

$$S_1 a = S \times \frac{abc}{|\vec{r}\,|} \qquad \text{ゆえに} \qquad S_1 = \frac{bc}{|\vec{r}\,|}S = n_1 S$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(\theta)=\sin^3\theta+a\cos 2\theta+\dfrac{21}{4}\sin\theta$ に $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-a+\frac{21}{4}=\frac{25}{4}-a$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{13}{4}$ であるから

$$\frac{25}{4}-a=\frac{13}{4}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=3}$$

(2) $a=3$，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より

$$\begin{aligned} f(\theta)&=t^3+3(1-2t^2)+\frac{21}{4}t \\ &=\boldsymbol{t^3-6t^2+\frac{21}{4}t+3} \end{aligned}$$

(3) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-1\leqq t\leqq 1$

$$g(t)=t^3-6t^2+\frac{21}{4}t+3 \qquad (-1\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} g'(t)&=3t^2-12t+\frac{21}{4} \\ &=\frac{3}{4}(4t^2-16t+7)=\frac{3}{4}(2t-1)(2t-7) \end{aligned}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{13}{4}$

よって $t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{17}{4}}$

$t=-1$ すなわち $\boldsymbol{\theta=-\dfrac{\pi}{2}}$ のとき 最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{37}{4}}$