平成 26 年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・文化教育学部　平成 26 年 2 月 25 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 医学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部は，$\boxed{8}$ ～ $\boxed{11}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部は，$\boxed{9}$ ～ $\boxed{11}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ を満たす定数とする．2 つの曲線

$$y = \sin x \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq a\right),$$
$$y = \cos x \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と 2 つの直線 $x = a$，$y = 0$ で囲まれる図形を D とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

(2) D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の問に答えよ．

$$\begin{array}{ll} a_1 = 3,\ b_1 = 4 & \\ 2a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + 1, & \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ -a_{n+1} - 2b_{n+1} = 3b_n - 17 & \end{array}$$

(1) $c_n = a_n - a$，$d_n = b_n - b$ とおいて

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる定数 a，b を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 10個のアルファベットの大文字 A，B，C，D，E，F，H，I，O，X を重複を許して並べてできる5文字の順列を1枚のカードに1つずつ書くとする．なお，文字 H，I，O，X は上下を逆さまにしてもそれぞれ H，I，O，X と読めるので，これらの文字で書かれた5文字の順列はカードごと上下を逆さまにすると，$i = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して i 番目の文字がもとの $6 - i$ 番目の文字に対応する5文字の順列が書かれたカードとして使えるとする．例えば，HIOXX と書かれたカードは上下を逆さかにして，XXOIH と書かれたカードとしても使える．しかし，ABEIF と書かれたカードは上下を逆さまにすると5文字の順列を表すカードとしては使えない．このとき，次の問に答えよ．

(1) 上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すカードの総数を求めよ．

(2) 上下を逆さまにして読むと異なる順列を表すカードの総数を求めよ．

(3) 上下を逆さまにすることにより1枚のカードを2度まで使うことを許すとする．すべての順列を書くためには，最小限で何枚のカードが必要か．

$\boxed{\mathbf{4}}$ xy 平面上に $x = 2\cos 2\theta,\ y = 2\cos 3\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と媒介変数表示された曲線 C を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $t = \cos\theta$ とおいて，x と y を t の式で表せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，y を x の式で表せ．また，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ において，y を x の式で表せ．

(3) 曲線 C の概形を描け．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面上に $x = 2\cos 2\theta,\ y = 2\cos 3\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と媒介変数表示された曲線 C を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，y を x の式で表せ．また，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ において，y を x の式で表せ．

(2) 曲線 C の概形を描け．

(3) 曲線 C が囲む領域の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して，ベクトル $\vec{u} = (p,\ q)$，$\vec{v} = (r,\ s)$ は

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1, \quad A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

を満たすとする．ただし，α，β は相異なる実数である．このとき，次の問に答えよ．

(1) ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ は直交することを示せ．

(2) 行列 $X = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ は逆行列をもつことを示せ．

(3) (2) の X に対して，$AX = X\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(4) 自然数 n に対して，$A^n = \begin{pmatrix} f_n & g_n \\ h_n & k_n \end{pmatrix}$ とする．このとき，$f_n + k_n$ を α，β，n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 連続関数 $f(x)$ に対して

$$v(x) = \int_0^x e^t f(x-t)\,dt$$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x) = x$ のとき，$v(x)$ を求めよ．

(2) $v(x) + f(x) = \sin^4 x$ のとき，$v(x)$ を求めよ．

(3) $v(x) + f(x) = \sin^4 x$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の問に答えよ．

(1) 0 以上の整数 n に対して，2 次方程式 $x^2 + 2(n-5)x + n^2 - n = 0$ が実数解をもつとする．このとき，n の値をすべて求めよ．

(2) 二桁の自然数で，一の位の数と十の位の数の和の 2 乗がもとの二桁の自然数になるような数をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 三角形 ABC は $\mathrm{AB} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，$\mathrm{BC} = 4$，$\mathrm{AC} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ を満たしている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 角 A の大きさを求めよ．

(2) $\sin B$ と $\cos B$ の値を求めよ．

(3) 加法定理を用いて，角 B の大きさを求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 放物線 $C : y = x^2$ と，それと共有点をもたない直線 $\ell : y = ax + b$ を考える．直線 ℓ 上の点 P から放物線 C に相異なる 2 本の接線を引き，その接点をそれぞれ Q，R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 Q，R の座標をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ とおく．点 P の x 座標を α，β で表せ．

(2) 直線 QR は点 P を ℓ 上どのようにとっても，定点を通ることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 箱の中に 1 から 4 までの番号が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードが入っている．また，手元に 0 の番号が書かれたカードを持っているとする．箱の中からカードを 1 枚引き，手元のカードと比較して番号の小さい方のカードを箱に戻して，大きい方のカードを手元に残すという試行を繰り返す．このとき，次の問に答えよ．

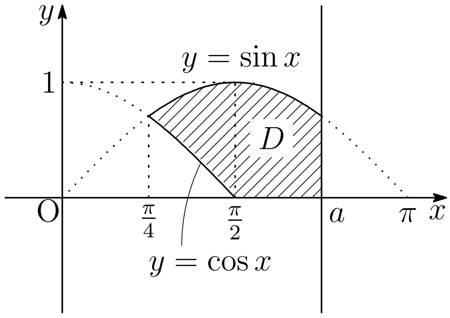
(1) 3 回繰り返して手元のカードが 4 である確率を求めよ．また，n 回繰り返して手元のカードが 4 である確率を求めよ．

(2) 3 回繰り返して手元のカードが 2 である確率を求めよ．また，n 回繰り返して手元のカードが 2 である確率を求めよ．

(3) n 回繰り返して手元のカードが 3 である確率を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ &= \Big[-\cos x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{a} - \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{-\cos a + \sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

(2) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \sin^2 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{a} - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\sin 2a + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{V = \frac{\pi}{4}(2a - \sin 2a + 2 - \pi)}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n+1$，$-a_{n+1}-2b_{n+1}=3b_n-17$ に対して

$$2a+b=3a+1,\quad -a-2b=3b-17 \qquad \cdots(*)$$

とおくと

$$2(a_{n+1}-a)+(b_{n+1}-b)=3(a_n-a)$$
$$-(a_{n+1}-a)-2(b_{n+1}-b)=3(b_n-b)$$

$c_n=a_n-a$，$d_n=b_n-b$ より

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

上式の両辺に左から $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ を掛けると

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \qquad \cdots(**)$$

これをみたす a，b は，$(*)$ を解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=3}$

(2) (1) の結果から　$c_1=a_1-a=3-2=1$，$d_1=b_1-b=4-3=1$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと　　$A^2=3E$

$(**)$ から　　$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i) n が奇数のとき

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(A^2)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(3E)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) n が偶数のとき

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(A^2)^{\frac{n-2}{2}}A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(3E)^{\frac{n-2}{2}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$=3^{\frac{n-2}{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}=3^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$a_n=c_n+a$，$b_n=d_n+b$ であるから，(i)，(ii) および (1) の結果から

n が奇数のとき　　$\boldsymbol{a_n=3^{\frac{n-1}{2}}+2,\ b_n=3^{\frac{n-1}{2}}+3}$

n が偶数のとき　　$\boldsymbol{a_n=3^{\frac{n}{2}}+2,\ b_n=-3^{\frac{n}{2}}+3}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 上下を逆さまにしても読めるのはH，I，O，Xの4文字で，これらの4文字から重複を許して並べるとき，上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すのは，1番目と5番目，2番目と4番目が同じ文字の場合である．

よって，求める順列の総数は，4文字から1(5)番目，2(4)番目，3番目の3つを重複を許して並べるカードの総数である．

$$4^3 = \mathbf{64} \quad (\text{枚})$$

(2) 上下を逆さまにしても読めるのはH，I，O，Xの4文字で，これらの4文字から重複を許して並べるカードの総数は

$$4^5 = 1024 \quad (\text{枚})$$

このうち，上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すのが，(1)の結果であるから，よって，求めるカードの総数は

$$1024 - 64 = \mathbf{960} \quad (\text{枚})$$

(3) 上下を逆さまにすると読めないカードの総数は

$$10^5 - 4^5 \quad (\text{枚})$$

(1)の結果から．上下を逆さまにしても読めるが，1度しか使えないカードの総数は

$$4^3 \quad (\text{枚})$$

(2)の結果から，上下を逆さまにしても読めて，2度使えるカードの総数は

$$\frac{4^5 - 4^3}{2} \quad (\text{枚})$$

よって，求めるカードの総数は

$$(10^5 - 4^5) + \frac{4^5 - 4^3}{2} + 4^3 = 10^5 - \frac{4^5}{2} + \frac{4^3}{2} = \mathbf{99520} \quad (\text{枚})$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 加法定理により

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

$t=\cos\theta$ より

$$x = 2\cos\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = \boldsymbol{4t^2 - 2}$$

$$y = 2\cos 3\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = \boldsymbol{8t^3 - 6t}$$

(2) (1) の結果から $\quad t^2 = \dfrac{x+2}{4}$

(i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t \geqq 0$ より $\quad t = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

$$\begin{aligned}y = 2t(4t^2-3) &= 2\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{2}\left(4\cdot\frac{x+2}{4} - 3\right) \\ &= \boldsymbol{(x-1)\sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$t \leqq 0$ より $\quad t = -\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

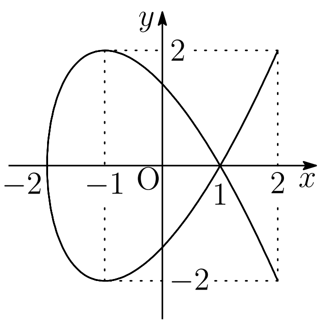
$$\begin{aligned}y = 2t(4t^2-3) &= 2\left(-\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)\left(4\cdot\frac{x+2}{4} - 3\right) \\ &= \boldsymbol{-(x-1)\sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

(3) $x = 2\cos 2\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より $\quad -2 \leqq x \leqq 2$
$f(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ とおくと

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + (x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2



$y = f(x)$ と $y = -f(x)$ を合わせたものが C の表す図形であり，これらは，x 軸に関して対称であるから，その概形は右の図のようになる．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 加法定理により $\quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

$t=\cos\theta$ とおくと $\quad x = 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = 4t^2 - 2$

$$y = 2\cos 3\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 8t^3 - 6t$$

したがって $\quad t^2 = \dfrac{x+2}{4}$

(i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t \geqq 0$ より $\quad t = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

$$y = 2t(4t^2-3) = 2\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{2}\left(4\cdot\frac{x+2}{4} - 3\right) = \boldsymbol{(x-1)\sqrt{x+2}}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$t \leqq 0$ より $\quad t = -\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

$$y = 2t(4t^2-3) = 2\left(-\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)\left(4\cdot\frac{x+2}{4} - 3\right) = \boldsymbol{-(x-1)\sqrt{x+2}}$$

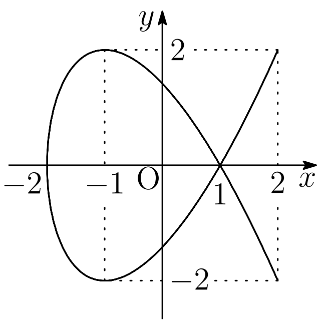
(2) $x = 2\cos 2\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より $\quad -2 \leqq x \leqq 2$

$f(x) = (x-1)\sqrt{x+2}\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ とおくと

$$f'(x) = \sqrt{x+2} + (x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2



$y = f(x)$ と $y = -f(x)$ を合わせたものが C の表す図形であり，これらは，x 軸に関して対称であるから，その概形は右の図のようになる．

(3) 求める面積を S とすると，(2) の結果から

$$\frac{S}{2} = \int_{-2}^{1}\{-(x-1)\sqrt{x+2}\}\,dx = \int_{-2}^{1}\{-(x+2)^{\frac{3}{2}} + 3(x+2)^{\frac{1}{2}}\}\,dx$$

$$\left[-\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} + 2(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{1} = \frac{12\sqrt{3}}{5}$$

よって $\quad S = \boldsymbol{\dfrac{24\sqrt{3}}{5}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\alpha\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bq \\ bp+cq \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v} &= \alpha\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap+bq & bp+cq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\beta\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \beta\,\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

ゆえに　$(\alpha-\beta)\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$　　$\alpha \neq \beta$ より　$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

よって，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は直交する．

(2) $(p^2+q^2)(r^2+s^2) = (pr+qs)^2 + (ps-rq)^2$ であるから

$$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 = (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + (\det X)^2$$

$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ および (1) の結果から　　$\det X = \pm 1$

$\det X \neq 0$ であるから，X は逆行列をもつ．

(3) $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ より

$$A\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p & \beta r \\ \alpha q & \beta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

よって　　$AX = X\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

(4) (2)，(3) の結果から　$A = X\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}X^{-1}$ であるから

$$\begin{aligned}A^n &= X\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}X^{-1} \\ &= \frac{1}{\det X}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det X}\begin{pmatrix} ps\alpha^n - rq\beta^n & * \\ * & -rq\alpha^n + ps\beta^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって　　$f_n + k_n = \dfrac{ps-rq}{\det X}(\alpha^n + \beta^n) = \boldsymbol{\alpha^n + \beta^n}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $f(x) = x$ より

$$v(x) = \int_0^x e^t(x-t)\,dt = \Big[\ e^t(x-t+1)\ \Big]_0^x = \boldsymbol{e^x - x - 1}$$

(2) $v(x) = \displaystyle\int_0^x e^t f(x-t)\,dt$ において，$u = x - t$ とおくと

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow 0$

$dt = -du$

$$v(x) = \int_x^0 e^{x-u} f(u)\,(-du) = e^x \int_0^x e^{-u} f(u)\,du \text{ を微分すると}$$

$$v'(x) = e^x \int_0^x e^{-u} f(u)\,du + e^x \cdot e^{-x} f(x) = v(x) + f(x)$$

$v(x) + f(x) = \sin^4 x$ より，$v'(x) = \sin^4 x$ であるから

$$\begin{aligned} v(x) = \int \sin^4 x\,dx &= -\int \sin^3 x(\cos x)'\,dx \\ &= -\sin^3 x\cos x + \int 3\sin^2 x\cos x \cdot \cos x\,dx \\ &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\,dx - 3\int \sin^4 x\,dx \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} v(x) = \int \sin^4 x\,dx &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C \end{aligned}$$

$v(0) = 0$ であるから $\quad \boldsymbol{v(x) = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x}$

(3) (2) の結果から

$$f(x) = \sin^4 x - v(x) = \sin^4 x + \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x$$

ゆえに $\quad \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sin x}{x}\left(\sin^3 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 x\cos x\right) - \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}$

よって $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1(0+0) - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cdot 1 = \mathbf{0}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 2 次方程式 $x^2+2(n-5)x+n^2-n=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=(n-5)^2-1\cdot(n^2-n)=-9n+25$$

方程式が実数解をもつので，$D \geqq 0$ より

$$-9n+25 \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad n \leqq \frac{25}{9}$$

n は 0 以上の整数であるから　　$\boldsymbol{n=0,\ 1,\ 2}$

(2) 求める 2 桁の自然数の十の位を x，一の位を n とすると

$$(x+n)^2=10x+n \quad \text{ゆえに} \quad x^2+2(n-5)x+n^2-n=0 \quad \cdots(*)$$

x は実数であるから，(1) の結果より　$n=0,\ 1,\ 2$

(i) $n=0$ のとき，$(*)$ は

$$x^2-10x=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 10$$

x は十の位の数であるから，これらは不適.

(ii) $n=1$ のとき，$(*)$ は

$$x^2-8x=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 8$$

x は十の位の数であるから，適するのは　$x=8$

(iii) $n=2$ のとき，$(*)$ は

$$x^2-6x+2=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=3\pm\sqrt{7}$$

x は十の位の数であるから，これらは不適.

(i)〜(iii) より，求める 2 けた数は　　**81**

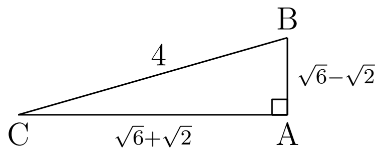
$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $a=4$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-4^2}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=0$$

よって　　$\boldsymbol{A=90^\circ}$

(2) (1) の結果から，右図により

$$\sin B=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$
$$\cos B=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$



(3) 加法定理から

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(45^\circ+30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

B は鋭角であるから，上式および (2) の結果から　　$\boldsymbol{B=75^\circ}$

10 (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は

$$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad y=2\alpha x-\alpha^2\quad \cdots①$$

同様に，C 上の点 $\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ における接線の方程式は

$$y=2\beta x-\beta^2\quad \cdots②$$

P は ①，② の交点であるから，①，② を解いて　$\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

よって，点 P の x 座標は　$\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{2}}$

(2) 点 $\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ は直線 $y=ax+b$ 上の点であるから

$$\alpha\beta=a\times\frac{\alpha+\beta}{2}+b\quad \cdots③$$

2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を通る直線の方程式は

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\cdots④$$

直線 ④ は，③ により　$y=(\alpha+\beta)x-a\times\frac{\alpha+\beta}{2}-b$

ゆえに　$$y+b=(\alpha+\beta)\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

よって，この直線は，定点 $\left(\frac{a}{2},-b\right)$ を通る．

11 (1) 3 回繰り返して手元のカードが 3 以下である確率は，3 回とも 4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

よって，3 回繰り返して手元のカードが 4 である確率は

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\boldsymbol{\frac{37}{64}}$$

同様に，n 回繰り返して手元のカードが 3 以下である確率は，n 回とも 4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n\quad \cdots①$$

よって，n 回繰り返して手元のカードが 4 である確率は

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n=\boldsymbol{\frac{4^n-3^n}{4^n}}$$

(2) 3 回繰り返して手元のカードが 2 以下である確率は，3 回とも 3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3$$

3 回繰り返して手元のカードが 1 である確率は，3 回とも 2,3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ゆえに，3 回繰り返して手元のカードが 2 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{7}{64}}$$

同様に，n 回繰り返して手元のカードが 2 以下である確率は，n 回とも 3,4 以外のカードの確率であるから

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n \quad \cdots ②$$

n 回繰り返して手元のカードが 1 である確率は，n 回とも 2,3,4 以外の確率であるから

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，n 回繰り返して手元のカードが 2 である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n = \boldsymbol{\frac{2^n - 1}{4^n}}$$

(3) n 回繰り返して手元のカードが 3 である確率は，①，② より

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{4}\right)^n = \boldsymbol{\frac{3^n - 2^n}{4^n}}$$