平成25年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・医・農・文化教育学部　平成25年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 医学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{7}$, $\boxed{9}$ 〜 $\boxed{11}$ 数I・II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 一辺の長さが2の正三角形OABにおいて，線分OAを1 : 3に内分する点をP，線分OBを3 : 1に内分する点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) 線分PQの長さを求めよ．

(4) 線分OBの中点をCとし，線分ACと線分PQの交点をRとする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_n = \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$のとき，等式$\dfrac{1}{2}\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan 2\theta}$を示せ．

(2) (1)を用いて，和$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$を求めよ．

(3) 無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$の和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 定数a，bと自然対数の底eに対して，$f(x) = (ax+b)e^{-x}$とおく．曲線$y = f(x)$は点$(0,\ 2)$を通り，その点における接線の傾きは2であるとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) a，bの値を求めよ．

(2) 関数$f(x)$の極値を求めよ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$の範囲において，曲線$y = f(x)$とx軸で囲まれた図形の面積Sを求めよ．

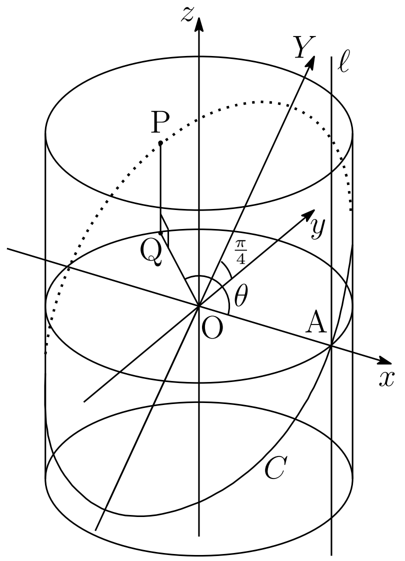
4 $\alpha > 1$ とする．曲線 $C : y = x^{\alpha}$ $(x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^{\alpha})$ における C の接線と y 軸の交点を Q とし，x 軸上に点 R を $\mathrm{PR} = \mathrm{PQ}$ をみたすようにとる．ただし，点 R の x 座標は点 P の x 座標より小さいものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 Q の y 座標を求めよ．

(2) 点 R の x 座標を求めよ．

(3) x 軸と直線 RP のなす鋭角を θ とするとき，$\displaystyle\lim_{p\to\infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ をみたす α の値を求めよ．

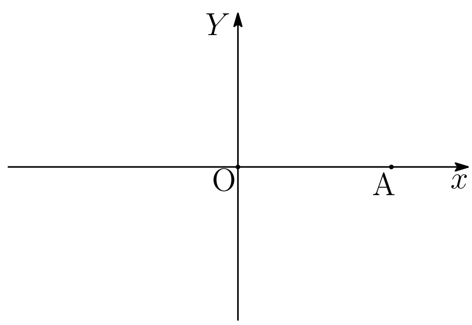
5 x 軸，y 軸，z 軸を座標軸，原点を O とする座標空間において，z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱を考える．次に，x 軸を含み xy 平面とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となる平面を α とし，平面 α による円柱の切り口の曲線を C とする．また，点 $(1,\ 0,\ 0)$ とする．さらに，曲線 C 上の点 P から xy 平面に下ろした垂線を PQ とし，$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．このとき，次の問に答えよ．



(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 A を通り z 軸に平行な直線を ℓ とする．ℓ によって円柱の側面を切り開いた展開図の上に，曲線 C の概形をかけ．

(3) 図のように，平面 α と yz 平面の交線を Y 軸とする．xY 平面における曲線 C の方程式を求め，その概形をかけ．



6 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ に関して次の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = 0$ を使ってよい．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となるものを l とする．その接線 l の方程式と接点 $(a,\ f(a))$ を求めよ．

(3) $x < a$ において，接線 l は曲線 $y = f(x)$ より上側にあることを証明せよ．ただし，a は (2) で求めたものとする．

(4) 曲線 $y = f(x)$，接線 l，および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

7 次の問に答えよ．

(1) $a + \dfrac{1}{a} = b + \dfrac{1}{b}$ が成り立つとき，a を b を用いて表せ．

(2) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{y}{8} + \dfrac{8}{y} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ をみたす実数 x，y の組をすべて求めよ．

8 $0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$，$0^\circ \leqq \beta \leqq 90^\circ$ について，$\sin\alpha = 2\sin^2\beta$ が成り立つものとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\cos 2\beta$ を $\sin\beta$ を用いて表せ．また，$\cos 4\beta$ を $\sin\beta$ を用いて表せ．

(2) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ のとき，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

(3) $\alpha + 4\beta = 90^\circ$ のとき，$\sin\alpha$ の値を求めよ．

9 点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円 C と放物線 $F : y = x^2$ を考える．ただし，$a > 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 円 C と放物線 F が点 $(b,\ b^2)$ で同じ接線を持つとする．ただし，$b > 0$ とする．このとき，C の中心と点 $(b,\ b^2)$ を結ぶ直線の傾きを b を用いて表せ．また，r を b を用いて表せ．

(2) (1) において $r = 1$ とする．このとき，C と F で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) C と F の共有点が原点のみであるための r の条件を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ さいころを 4 回振って出た目を順に a，b，c，d とし，

$$N = 1000a + 100b + 10c + d, \quad M = 1000d + 100c + 10b + a$$

と定める．このとき，次に問に答えよ．ただし，n の倍数は，$0,\ \pm n,\ \pm 2n,\ \cdots$ であるとする．

(1) $N - M$ は 9 の倍数であることを示せ．

(2) $N - M$ が 18 の倍数となる確率を求めよ．

(3) $N - M$ が 37 の倍数となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 「$n \leqq \sqrt{11} < n+1$ が成り立つような整数 n を見つけよ.」という問題に対して以下の答案があった．この答案の趣旨を詳しく説明せよ．

［答案］

まず，$\sqrt{11}^2 = 11$ から奇数を小さい順に引いていく．つまり，

$$11 - 1 = 10, \quad 10 - 3 = 7, \quad 7 - 5 = 2$$

となり，これ以上引くと負の数になるからここで計算を止める．
結局，奇数を 3 回引いたので，$n = 3$ となる．

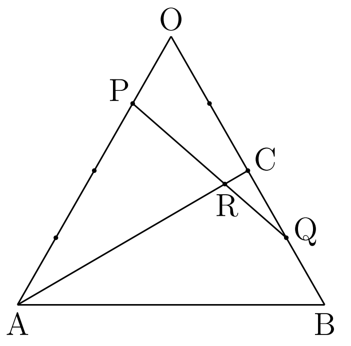
正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2} = \mathbf{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$= \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$ より



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| &= \frac{1}{4}|-\vec{a} + 3\vec{b}| \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2^2 - 6\cdot 2 + 9\cdot 2^2} \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{7} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}\end{aligned}$$

(4) R は AC 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \quad \cdots ①$$

$\vec{a} = 4\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{b} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 4(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

また，R は PQ 上の点であるから

$$4(1-t) + \frac{2t}{3} = 1 \quad ゆえに \quad t = \frac{9}{10}$$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{10}\vec{a} + \dfrac{9}{20}\vec{b}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta \neq 0$，$\tan 2\theta \neq 0$．2 倍角の公式により

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad ゆえに \quad \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1}{2\tan\theta} - \frac{1}{2}\tan\theta$$

よって　　$\dfrac{1}{2}\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan 2\theta}$

(2) (1) の結果から，k を自然数とすると

$$\frac{1}{2^k}\tan\theta = \frac{1}{2^k\tan\theta} - \frac{1}{2^{k-1}\tan 2\theta}$$

$0 < \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\theta = \dfrac{1}{2^k}$ とおくと

$$a_k = \frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}$$

よって
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2^n\tan\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2^n}}{\tan\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}\right) = \boldsymbol{1 - \frac{1}{\tan 1}}$$

3 (1) $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ より　$f'(x) = (-ax+a-b)e^{-x}$

点 $(0,\ 2)$ を通るから，$f(0) = 2$ より

$$b = 2 \quad \cdots ①$$

点 $(0,\ 2)$ における接線の傾きが 2 であるから，$f'(0) = 2$ より

$$a - b = 2 \quad \cdots ②$$

①，② より　$\boldsymbol{a = 4,\ b = 2}$

(2) (1) の結果から

$$f(x) = (4x+2)e^{-x}$$
$$f'(x) = 2(1-2x)e^{-x}$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$4e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$

したがって，$f(x)$ の増減は右のようになる．

よって，$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ のとき**極大値** $\boldsymbol{4e^{-\frac{1}{2}}}$ をとる．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，$f(x) > 0$ であるから，求める面積 S は

$$S = \int_0^1 (4x+2)e^{-x}\,dx = \Big[-(4x+6)e^{-x}\Big]_0^1 = \boldsymbol{-10e^{-1} + 6}$$

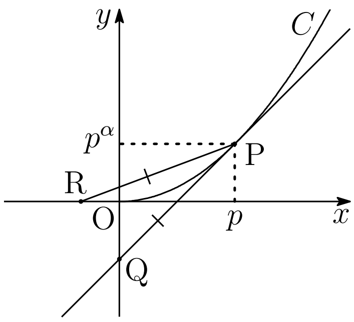
$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $y = x^{\alpha}$ より　$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

点 $\mathrm{P}(p,\ p^{\alpha})$ における接線の方程式は

$$y - p^{\alpha} = \alpha p^{\alpha-1}(x - p)$$

ゆえに　$y = \alpha p^{\alpha-1}x + (1-\alpha)p^{\alpha}$

よって，点 Q の y 座標は　$\boldsymbol{(1-\alpha)p^{\alpha}}$



(2) 点 R の座標を $(r,\ 0)$ とすると，

$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$(p-r)^2 + (p^{\alpha})^2 = p^2 + \{p^{\alpha} - (1-\alpha)p^{\alpha}\}^2$$
$$(p-r)^2 + p^{2\alpha} = p^2 + \alpha^2 p^{2\alpha}$$
$$(p-r)^2 = p^2 + (\alpha^2-1)p^{2\alpha}$$

$p > r$ より　$p - r = \sqrt{p^2 + (\alpha^2-1)p^{2\alpha}}$　$\cdots$①

よって　$r = \boldsymbol{p - \sqrt{p^2 + (\alpha^2-1)p^{2\alpha}}}$

(3) ① および P の y 座標から

$$\tan\theta = \frac{p^{\alpha}}{\sqrt{p^2 + (\alpha^2-1)p^{2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{p^{2(1-\alpha)} + (\alpha^2-1)}}$$

$\alpha > 1$ より，$\displaystyle\lim_{p\to\infty} p^{2(1-\alpha)} = 0$ であるから

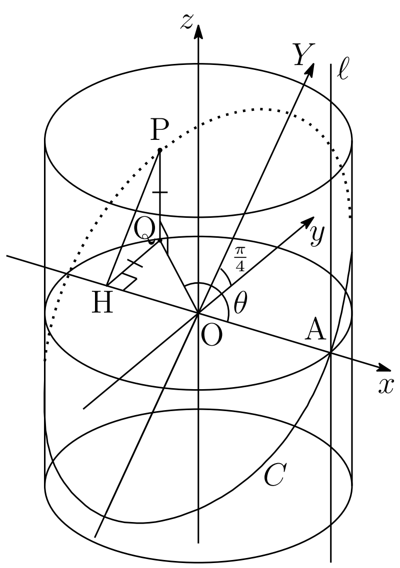
$$\lim_{p\to\infty} \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$\displaystyle\lim_{p\to\infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ より　$\displaystyle\lim_{p\to\infty} \tan\theta = 1$

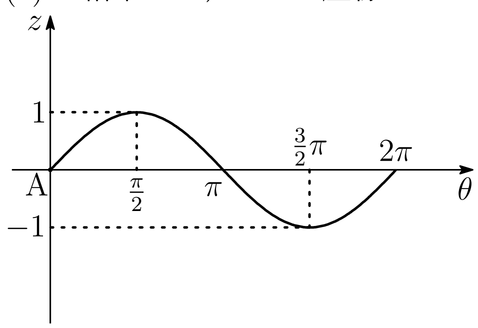
したがって　$\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{\alpha = \sqrt{2}}$

$\boxed{5}$ (1) Q$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ である．Q から x 軸に垂線 QH を下すと，$\angle\mathrm{PHQ} = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\mathrm{PQ} = \mathrm{QH}$ であり，P の z 座標と Q の y 座標が等しい．

よって　$\mathbf{P(\cos\boldsymbol{\theta},\ \sin\boldsymbol{\theta},\ \sin\boldsymbol{\theta})}$

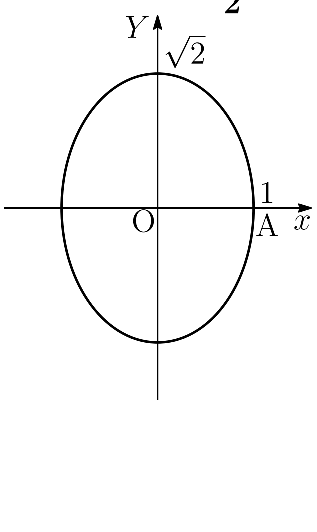


(2) (1) の結果から，P の z 座標が $\sin\theta$ であるから



(3) $\mathrm{PH} = \sqrt{2}\mathrm{QH}$ であるから，$x = \cos\theta$，$Y = \sqrt{2}\sin\theta$．

よって　$\boldsymbol{x^2 + \dfrac{Y^2}{2} = 1}$



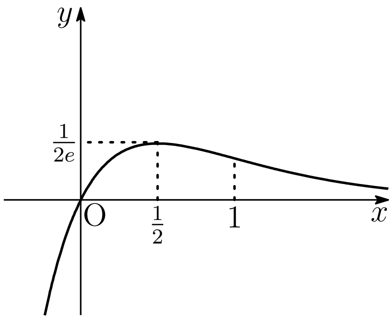
$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = xe^{-2x}$ より

$$f'(x) = (1-2x)e^{-2x} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f''(x) = 4(x-1)e^{-2x} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

よって，$f(x)$ の増減，凹凸は下の表のようになる．したがって，グラフの概形は右の図のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘



(2) $f'(x)$ は (1) の表から，$x=1$ で最小となり，最小値 $f'(1) = -\dfrac{1}{e^2}$ をとる．したがって，曲線 $y=f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となる直線 l は，点 $(a,\ f(a)) = \left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^2}}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{e^2}$ の直線である．

$$y - \frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}}$$

(3) $g(x) = \left(-\dfrac{1}{e^2}x + \dfrac{2}{e^2}\right) - f(x)$ とおくと

$$g'(x) = -f'(x) - \frac{1}{e^2}$$

(2) で述べたように $x < 1$ において

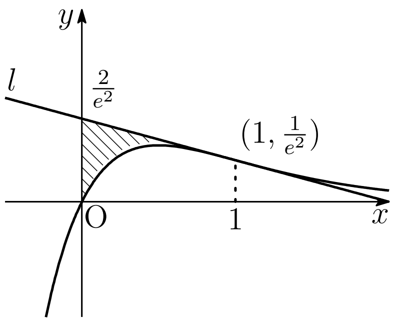
$$f'(x) > -\frac{1}{e^2} \quad \text{ゆえに} \quad g'(x) = -f'(x) - \frac{1}{e^2} < 0$$

したがって，$g(x)$ は $x<1$ において単調減少である．また

$$g(1) = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} - f(1) = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} = 0$$

よって，$x<1$ において $g(x) > 0$ となり，題意は示された．

(4) 求める面積 S は，右の図の斜線部分である．



$$S=\int_0^1\left\{\left(-e^{-2}x+2e^{-2}\right)-xe^{-2x}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{e^{-2}}{2}x^2+2e^{-2}x+\frac{xe^{-2x}}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1$$
$$=\boldsymbol{\frac{9}{4e^2}-\frac{1}{4}}$$

別解　直線 l と x 軸，y 軸，直線 $x=1$ で囲まれた台形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left(\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}\right)=\frac{3}{2e^2}$$

よって　　$S=\dfrac{3}{2e^2}-\displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx=\dfrac{9}{4e^2}-\dfrac{1}{4}$

7 (1) $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ の両辺に ab を掛けると

$$a^2b+b=ab^2+a$$
$$ab(a-b)-(a-b)=0$$
$$(a-b)(ab-1)=0$$

よって　　$\boldsymbol{a=b}$ **または** $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{b}}$

(2) 与式から

$$x+\frac{1}{x}=\frac{y}{8}+\frac{8}{y}\cdots①\quad かつ\quad x+\frac{1}{x}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\cdots②$$

① から　$x=\dfrac{y}{8}$　または　$x=\dfrac{8}{y}$

② から　$x=\dfrac{x}{y}$　または　$x=\dfrac{y}{x}$

したがって，4 つの連立方程式

$$\begin{cases}x=\frac{y}{8}\\ x=\frac{x}{y}\end{cases},\quad \begin{cases}x=\frac{y}{8}\\ x=\frac{y}{x}\end{cases},\quad \begin{cases}x=\frac{8}{y}\\ x=\frac{x}{y}\end{cases},\quad \begin{cases}x=\frac{8}{y}\\ x=\frac{y}{x}\end{cases}$$

を解くと，それぞれ次の解を得る．

$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{1}{8},\ 1\right),\ (8,\ 64),\ (8,\ 1),\ (2,\ 4)}$$

$\boxed{8}$ (1) 2倍角の公式により

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= \mathbf{1 - 2\sin^2\boldsymbol{\beta}}\\ \cos 4\beta &= 2\cos^2 2\beta - 1\\ &= 2(1-2\sin^2\beta)^2 - 1\\ &= \mathbf{8\sin^4\boldsymbol{\beta} - 8\sin^2\boldsymbol{\beta} + 1}\end{aligned}$$

(2) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ より

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(90^\circ - 2\beta)\\ &= \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta\end{aligned}$$

$\sin\alpha = 2\sin^2\beta \cdots$ ① により

$$1 - 2\sin^2\beta = 2\sin^2\beta \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2\beta = \frac{1}{4}$$

これを ① に代入して　$\sin\alpha = 2 \times \dfrac{1}{4} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) の結果，①，$\alpha + 4\beta = 90^\circ$ より

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(90^\circ - 4\beta) = \cos 4\beta\\ &= 8\sin^4\beta - 8\sin^2\beta + 1\\ &= 2(2\sin^2\beta)^2 - 4\cdot 2\sin^2\beta + 1\\ &= 2\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1\end{aligned}$$

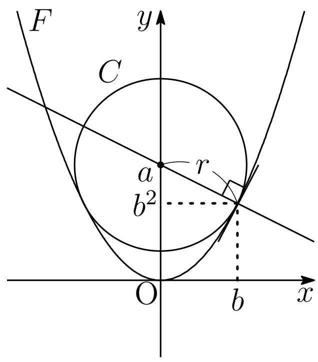
$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ より $0 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ に注意して

$$\sin\alpha = 2\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1$$

を解くと　$\boldsymbol{\sin\alpha = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x)=x^2$ より　$f'(x)=2x$

求める直線の傾きは F の点 $(b,\ b^2)$ における法線の傾きであるから



$$-\frac{1}{f'(b)}=\boldsymbol{-\frac{1}{2b}}$$

また，この法線の方程式は

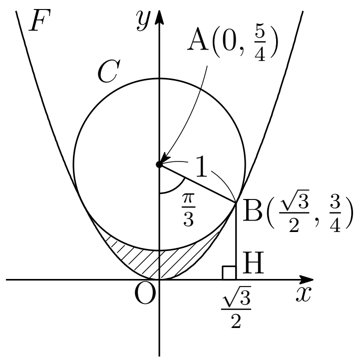
$$y-b^2=-\frac{1}{2b}(x-b)$$
$$y=-\frac{1}{2b}x+b^2+\frac{1}{2}$$

この直線が円の中心 $(0,\ a)$ を通るから　$a=b^2+\dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

C の半径は，中心 $\left(0,\ b^2+\dfrac{1}{2}\right)$ と接点 $(b,\ b^2)$ の 2 点間の距離であるから

$$r=\sqrt{(b-0)^2+\left\{b^2-\left(b^2+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}=\boldsymbol{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}}}$$

(2) $r=1$ を (1) の結果に代入して $(b>0)$



$$1=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}}\qquad ゆえに\quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを ① に代入して　$a=\dfrac{5}{4}$

右の図のように点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，

$\mathrm{H}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ とすると，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{3}$

台形 OABH の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

半径 1，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の扇形の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

したがって　$\dfrac{S}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}-\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2\,dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

よって　$\boldsymbol{S=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}}$

(3) (1) の結果から，円 C は，2 点 $(b,\ b^2)$，$(-b,\ b^2)$ で接し，中心 $\left(0,\ b^2+\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\sqrt{b^2+\dfrac{1}{4}}$ である．$b\to 0$ の極限の位置にある円の半径が $\dfrac{1}{2}$ である．したがって，C と F の共有点が原点のみであるための r の条件は

$$\boldsymbol{0<r\leqq\frac{1}{2}}$$

補足 $b\to 0$ の極限の位置にある円 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ は F の原点における曲率円 (接触円) である．九大 2009 年一般前期理系数学 $\boxed{\mathbf{3}}$ の解説を参照[1]

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1)

$$\begin{aligned} N-M &= 999a+90b-90c-999d \\ &= 9(111a+10b-10c-111d) \end{aligned}$$

a，b，c，d は整数であるから，$N-M$ は 9 の倍数である．

(2)

$$N-M=18(5b-5c)+9{\cdot}111(a-d)$$

$a-d$ が偶数，すなわち，a と d が共に偶数または共に奇数の場合であるから，求める確率は

$$\frac{3{\cdot}3+3{\cdot}3}{6^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)

$$N-M=37{\cdot}27(a-d)+90(b-c)$$

$b-c$ が 37 の倍数，すなわち，$b=c$ の場合であるから，求める確率は

$$\frac{6}{6^2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ 連続する k 個の奇数 $1,\ 3,\ \cdots,\ 2k-1$ は k^2 であることを利用する．

答案の計算

$$11-1=10,\quad 10-3=7,\quad 7-5=2$$

の辺々を加えると　$11-(1+3+5)=2$　すなわち　$11-3^2>0$　$\cdots$①

また　$11-(1+3+5+7)=-5$　すなわち　$11-4^2<0$　$\cdots$②

①，② から　$3^2<11<4^2$

これから $n=3$ であると答えた．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf