

平成 25 年度 佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理工・医・農・文化教育学部 平成 25 年 2 月 25 日

- 理工学部 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 医学部 [2] [4] [5] [6] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部 [1] [7] [8] [9] 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部 [7] [9] [10] [11] 数 I・II・A・B (100 分)

[1] 一辺の長さが 2 の正三角形 OAB において、線分 OA を 1 : 3 に内分する点を P、線分 OB を 3 : 1 に内分する点を Q とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の間に答えよ。

- (1) \vec{a} 、 \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) \vec{PQ} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 線分 PQ の長さを求めよ。
- (4) 線分 OB の中点を C とし、線分 AC と線分 PQ の交点を R とする。 \vec{OR} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

[2] $a_n = \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき、等式 $\frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{\tan 2\theta}$ を示せ。

(2) (1) を用いて、和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の和を求めよ。

[3] 定数 a 、 b と自然対数の底 e に対して、 $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ とおく。曲線 $y = f(x)$ は点 $(0, 2)$ を通り、その点における接線の傾きは 2 であるとする。このとき、次の間に答えよ。

(1) a 、 b の値を求めよ。

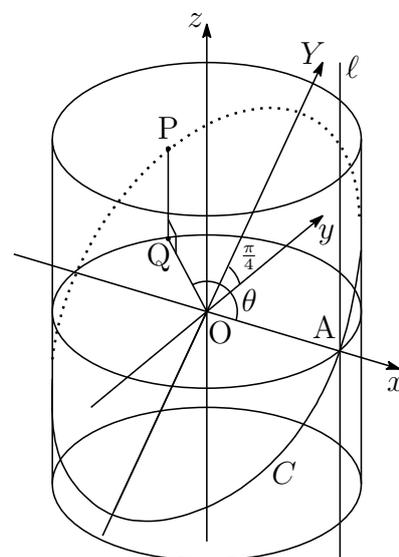
(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

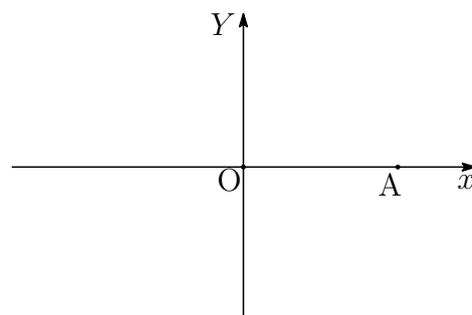
- 4 $\alpha > 1$ とする. 曲線 $C: y = x^\alpha$ ($x > 0$) 上の点 $P(p, p^\alpha)$ における C の接線と y 軸の交点を Q とし, x 軸上に点 R を $PR = PQ$ をみたすようにとる. ただし, 点 R の x 座標は点 P の x 座標より小さいものとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) 点 Q の y 座標を求めよ.
- (2) 点 R の x 座標を求めよ.
- (3) x 軸と直線 RP のなす鋭角を θ とするとき, $\lim_{p \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ をみたす α の値を求めよ.

- 5 x 軸, y 軸, z 軸を座標軸, 原点を O とする座標空間において, z 軸を中心軸とする半径 1 の円柱を考える. 次に, x 軸を含み xy 平面とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ となる平面を α とし, 平面 α による円柱の切り口の曲線を C とする. また, 点 $(1, 0, 0)$ とする. さらに, 曲線 C 上の点 P から xy 平面に下ろした垂線を PQ とし, $\angle AOQ = \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とする. このとき, 次の問に答えよ.



- (1) 点 P の座標を θ を用いて表せ.
- (2) 点 A を通り z 軸に平行な直線を ℓ とする. ℓ によって円柱の側面を切り開いた展開図の上に, 曲線 C の概形をかけ.
- (3) 図のように, 平面 α と yz 平面の交線を Y 軸とする. xY 平面における曲線 C の方程式を求め, その概形をかけ.



6 関数 $f(x) = xe^{-2x}$ に関して次の問に答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。必要ならば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-2x} = 0$ を使ってよい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となるものを l とする。その接線 l の方程式と接点 $(a, f(a))$ を求めよ。
- (3) $x < a$ において、接線 l は曲線 $y = f(x)$ より上側にあることを証明せよ。ただし、 a は (2) で求めたものとする。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ 、接線 l 、および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

7 次の問に答えよ。

- (1) $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$ が成り立つとき、 a を b を用いて表せ。
- (2) $x + \frac{1}{x} = \frac{y}{8} + \frac{8}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ をみたす実数 x, y の組をすべて求めよ。

8 $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ について、 $\sin \alpha = 2 \sin^2 \beta$ が成り立つものとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) $\cos 2\beta$ を $\sin \beta$ を用いて表せ。また、 $\cos 4\beta$ を $\sin \beta$ を用いて表せ。
- (2) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ のとき、 $\sin \alpha$ の値を求めよ。
- (3) $\alpha + 4\beta = 90^\circ$ のとき、 $\sin \alpha$ の値を求めよ。

9 点 $(0, a)$ を中心とする半径 r の円 C と放物線 $F : y = x^2$ を考える。ただし、 $a > 0$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 円 C と放物線 F が点 (b, b^2) で同じ接線を持つとする。ただし、 $b > 0$ とする。このとき、 C の中心と点 (b, b^2) を結ぶ直線の傾きを b を用いて表せ。また、 r を b を用いて表せ。
- (2) (1) において $r = 1$ とする。このとき、 C と F で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
- (3) C と F の共有点が原点のみであるための r の条件を求めよ。

10 さいころを4回振って出た目を順に a, b, c, d とし,

$$N = 1000a + 100b + 10c + d, \quad M = 1000d + 100c + 10b + a$$

と定める. このとき, 次に問に答えよ. ただし, n の倍数は, $0, \pm n, \pm 2n, \dots$ であるとする.

- (1) $N - M$ は9の倍数であることを示せ.
- (2) $N - M$ が18の倍数となる確率を求めよ.
- (3) $N - M$ が37の倍数となる確率を求めよ.

11 「 $n \leq \sqrt{11} < n+1$ が成り立つような整数 n を見つけよ。」という問題に対して以下の答案があった. この答案の趣旨を詳しく説明せよ.

[答案]

まず, $\sqrt{11}^2 = 11$ から奇数を小さい順に引いていく. つまり,

$$11 - 1 = 10, \quad 10 - 3 = 7, \quad 7 - 5 = 2$$

となり, これ以上引くと負の数になるからここで計算を止める. 結局, 奇数を3回引いたので, $n = 3$ となる.

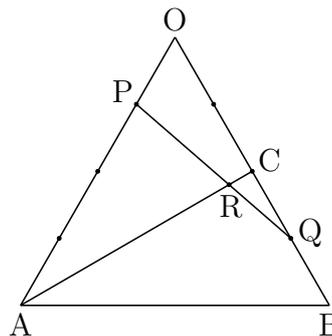
解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$(2) \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$(3) \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b}) \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{4} |-\vec{a} + 3\vec{b}| \\ = \frac{1}{4} \sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2} \\ = \frac{1}{4} \sqrt{2^2 - 6 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2} \\ = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$



(4) RはAC上の点であるから、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\vec{a} = 4\overrightarrow{OP}$, $\vec{b} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OQ}$ であるから

$$\overrightarrow{OR} = 4(1-t)\overrightarrow{OP} + \frac{2t}{3}\overrightarrow{OQ}$$

また、RはPQ上の点であるから

$$4(1-t) + \frac{2t}{3} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{9}{10}$$

これを①に代入して $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{9}{20}\vec{b}$ ■

$\boxed{2} \quad (1) 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より, $\tan \theta \neq 0$, $\tan 2\theta \neq 0$. 2倍角の公式により

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{2} \tan \theta$$

よって $\frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{\tan 2\theta}$

(2) (1)の結果から, k を自然数とすると

$$\frac{1}{2^k} \tan \theta = \frac{1}{2^k \tan \theta} - \frac{1}{2^{k-1} \tan 2\theta}$$

$0 < \frac{1}{2^k} < \frac{\pi}{4}$ であるから, $\theta = \frac{1}{2^k}$ とおくと

$$a_k = \frac{1}{2^k} \tan \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k \tan \frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{1}{2^{k-1}}}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k \tan \frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{1}{2^{k-1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2^n \tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tan \frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1} \right) = 1 - \frac{1}{\tan 1}$$

- 3** (1) $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ より $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$
点 $(0, 2)$ を通るから, $f(0) = 2$ より

$$b = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

点 $(0, 2)$ における接線の傾きが 2 であるから, $f'(0) = 2$ より

$$a - b = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より $a = 4, b = 2$

(2) (1)の結果から

x	\dots	$\frac{1}{2}$	\dots
$f(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	\nearrow	$4e^{-\frac{1}{2}}$	\searrow

したがって, $f(x)$ の増減は右のようになる.

よって, $x = \frac{1}{2}$ のとき極大値 $4e^{-\frac{1}{2}}$ をとる.

(3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲において, $f(x) > 0$ であるから, 求める面積 S は

$$S = \int_0^1 (4x + 2)e^{-x} dx = \left[-(4x + 6)e^{-x} \right]_0^1 = -10e^{-1} + 6$$

- 4 (1) $y = x^\alpha$ より $y' = \alpha x^{\alpha-1}$
 点 $P(p, p^\alpha)$ における接線の方程式は

$$y - p^\alpha = \alpha p^{\alpha-1}(x - p)$$

ゆえに $y = \alpha p^{\alpha-1}x + (1 - \alpha)p^\alpha$

よって、点 Q の y 座標は $(1 - \alpha)p^\alpha$

- (2) 点 R の座標を $(r, 0)$ とすると、

$PR^2 = PQ^2$ であるから

$$(p - r)^2 + (p^\alpha)^2 = p^2 + \{p^\alpha - (1 - \alpha)p^\alpha\}^2$$

$$(p - r)^2 + p^{2\alpha} = p^2 + \alpha^2 p^{2\alpha}$$

$$(p - r)^2 = p^2 + (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}$$

$p > r$ より $p - r = \sqrt{p^2 + (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}} \dots \textcircled{1}$

よって $r = p - \sqrt{p^2 + (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}}$

- (3) $\textcircled{1}$ および P の y 座標から

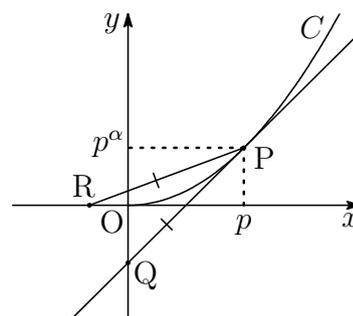
$$\tan \theta = \frac{p^\alpha}{\sqrt{p^2 + (\alpha^2 - 1)p^{2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{p^{2(1-\alpha)} + (\alpha^2 - 1)}}$$

$\alpha > 1$ より、 $\lim_{p \rightarrow \infty} p^{2(1-\alpha)} = 0$ であるから

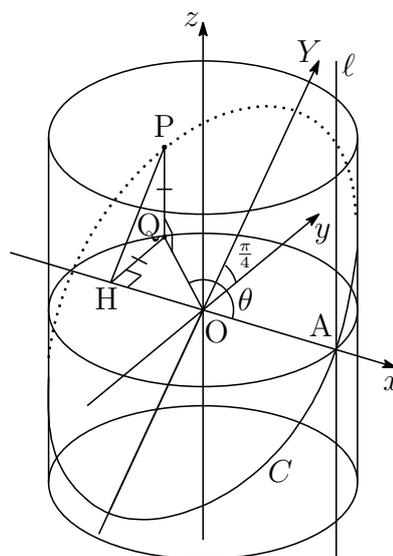
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

$\lim_{p \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{4}$ より $\lim_{p \rightarrow \infty} \tan \theta = 1$

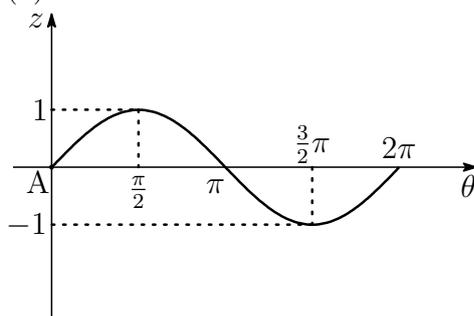
したがって $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} = 1$ これを解いて $\alpha = \sqrt{2}$ ■



- 5 (1) $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ である. Q から x 軸に垂線 QH を下すと, $\angle PHQ = \frac{\pi}{4}$ であるから, $PQ = QH$ であり, P の z 座標と Q の y 座標が等しい.
よって $P(\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta)$

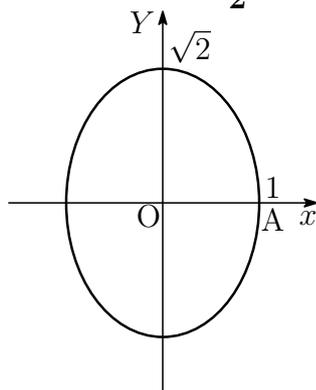


- (2) (1) の結果から, P の z 座標が $\sin \theta$ であるから



- (3) $PH = \sqrt{2}QH$ であるから, $x = \cos \theta$, $Y = \sqrt{2} \sin \theta$.

$$\text{よって } x^2 + \frac{Y^2}{2} = 1$$



6 (1) $f(x) = xe^{-2x}$ より

$$f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$$

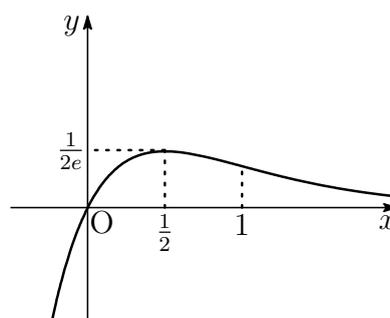
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f''(x) = 4(x - 1)e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

よって、 $f(x)$ の増減、凹凸は下の表のようになる。したがって、グラフの概形は右の図のようになる。

x	...	$\frac{1}{2}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘



(2) $f'(x)$ は (1) の表から、 $x = 1$ で最小となり、最小値 $f'(1) = -\frac{1}{e^2}$ をとる。したがって、曲線 $y = f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となる直線 l は、点 $(a, f(a)) = \left(1, \frac{1}{e^2}\right)$ を通り、傾き $-\frac{1}{e^2}$ の直線である。

$$y - \frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}$$

(3) $g(x) = \left(-\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}\right) - f(x)$ とおくと

$$g'(x) = -f'(x) - \frac{1}{e^2}$$

(2) で述べたように $x < 1$ において

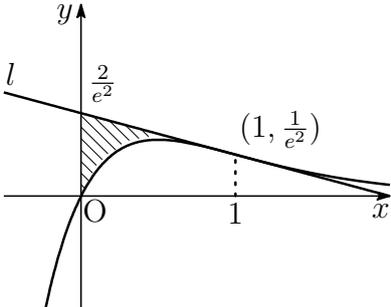
$$f'(x) > -\frac{1}{e^2} \quad \text{ゆえに} \quad g'(x) = -f'(x) - \frac{1}{e^2} < 0$$

したがって、 $g(x)$ は $x < 1$ において単調減少である。また

$$g(1) = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} - f(1) = -\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} = 0$$

よって、 $x < 1$ において $g(x) > 0$ となり、題意は示された。

(4) 求める面積 S は、右の図の斜線部分である。

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \{(-e^{-2}x + 2e^{-2}) - xe^{-2x}\} dx \\
 &= \left[-\frac{e^{-2}}{2}x^2 + 2e^{-2}x + \frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{9}{4e^2} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$


別解 直線 l と x 軸, y 軸, 直線 $x = 1$ で囲まれた台形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \left(\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} \right) = \frac{3}{2e^2}$$

$$\text{よって } S = \frac{3}{2e^2} - \int_0^1 xe^{-2x} dx = \frac{9}{4e^2} - \frac{1}{4}$$

7 (1) $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$ の両辺に ab を掛けると

$$\begin{aligned}
 a^2b + b &= ab^2 + a \\
 ab(a - b) - (a - b) &= 0 \\
 (a - b)(ab - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \mathbf{a = b} \text{ または } \mathbf{a = \frac{1}{b}}$$

(2) 与式から

$$x + \frac{1}{x} = \frac{y}{8} + \frac{8}{y} \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } x = \frac{y}{8} \text{ または } x = \frac{8}{y}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } x = \frac{x}{y} \text{ または } x = \frac{y}{x}$$

したがって, 4つの連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{8} \\ x = \frac{x}{y} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y}{8} \\ x = \frac{y}{x} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8}{y} \\ x = \frac{x}{y} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8}{y} \\ x = \frac{y}{x} \end{array} \right\}$$

を解くと, それぞれ次の解を得る.

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1 \right), (8, 64), (8, 1), (2, 4)$$

8 (1) 2倍角の公式により

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= 1 - 2\sin^2 \beta \\ \cos 4\beta &= 2\cos^2 2\beta - 1 \\ &= 2(1 - 2\sin^2 \beta)^2 - 1 \\ &= 8\sin^4 \beta - 8\sin^2 \beta + 1\end{aligned}$$

(2) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ より

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin(90^\circ - 2\beta) \\ &= \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta\end{aligned}$$

$\sin \alpha = 2\sin^2 \beta \cdots \textcircled{1}$ により

$$1 - 2\sin^2 \beta = 2\sin^2 \beta \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2 \beta = \frac{1}{4}$$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $\sin \alpha = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(3) (1) の結果, $\textcircled{1}$, $\alpha + 4\beta = 90^\circ$ より

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin(90^\circ - 4\beta) = \cos 4\beta \\ &= 8\sin^4 \beta - 8\sin^2 \beta + 1 \\ &= 2(2\sin^2 \beta)^2 - 4 \cdot 2\sin^2 \beta + 1 \\ &= 2\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha + 1\end{aligned}$$

$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ より $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ に注意して

$$\sin \alpha = 2\sin^2 \alpha - 4\sin \alpha + 1$$

を解くと $\sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$



- 9 (1) $f(x) = x^2$ より $f'(x) = 2x$
 求める直線の傾きは F の点 (b, b^2) における
 法線の傾きであるから

$$-\frac{1}{f'(b)} = -\frac{1}{2b}$$

また, この法線の方程式は

$$y - b^2 = -\frac{1}{2b}(x - b)$$

$$y = -\frac{1}{2b}x + b^2 + \frac{1}{2}$$

この直線が円の中心 $(0, a)$ を通るから $a = b^2 + \frac{1}{2}$ … ①

C の半径は, 中心 $(0, b^2 + \frac{1}{2})$ と接点 (b, b^2) の2点間の距離であるから

$$r = \sqrt{(b-0)^2 + \left\{ b^2 - \left(b^2 + \frac{1}{2} \right) \right\}^2} = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}$$

- (2) $r = 1$ を (1) の結果に代入して ($b > 0$)

$$1 = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを ① に代入して $a = \frac{5}{4}$

右の図のように点 $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$,

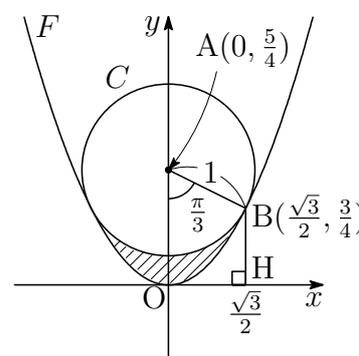
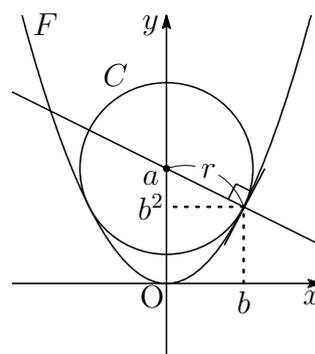
$H\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ とすると, $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$

台形 $OABH$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

半径 1, 中心角 $\frac{\pi}{3}$ の扇形の面積は $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

したがって $S = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

よって $S = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$



- (3) (1)の結果から, 円 C は, 2点 (b, b^2) , $(-b, b^2)$ で接し, 中心 $\left(0, b^2 + \frac{1}{2}\right)$, 半径 $\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}}$ である. $b \rightarrow 0$ の極限の位置にある円の半径が $\frac{1}{2}$ である. したがって, C と F の共有点が原点のみであるための r の条件は

$$0 < r \leq \frac{1}{2}$$

補足 $b \rightarrow 0$ の極限の位置にある円 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ は F の原点における曲率円(接触円)である. 九大2009年一般前期理系数学[3]の解説を参照¹ ■

[10] (1)
$$\begin{aligned} N - M &= 999a + 90b - 90c - 999d \\ &= 9(111a + 10b - 10c - 111d) \end{aligned}$$

a, b, c, d は整数であるから, $N - M$ は9の倍数である.

(2)
$$N - M = 18(5b - 5c) + 9 \cdot 111(a - d)$$

$a - d$ が偶数, すなわち, a と d が共に偶数または共に奇数の場合であるから, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6^2} = \frac{1}{2}$$

(3)
$$N - M = 37 \cdot 27(a - d) + 90(b - c)$$

$b - c$ が37の倍数, すなわち, $b = c$ の場合であるから, 求める確率は

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

[11] 連続する k 個の奇数 $1, 3, \dots, 2k - 1$ は k^2 であることを利用する.

答案の計算

$$11 - 1 = 10, \quad 10 - 3 = 7, \quad 7 - 5 = 2$$

の辺々を加えると $11 - (1 + 3 + 5) = 2$ すなわち $11 - 3^2 > 0 \dots \textcircled{1}$

また $11 - (1 + 3 + 5 + 7) = -5$ すなわち $11 - 4^2 < 0 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から $3^2 < 11 < 4^2$

これから $n = 3$ であると答えた. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf