平成24年度　佐賀大学2次試験前期日程 (数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成24年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ 数I・II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標空間内で，原点O，A(1, 0, 0)，B(b_1, b_2, 0)，C(c_1, c_2, c_3) を頂点とする正四面体を考える．ただし，b_2 と c_3 は正とする．次の問いに答えよ．

(1) b_1，b_2 および c_1，c_2，c_3 を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

(3) P は直線 BC 上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 0以上の整数 n に対して，$f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ とおく．ただし，$0! = 1$ とし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 1$ のとき，$f_n(x)$ の導関数を $f_n(x)$，$f_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ の導関数を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．

(4) $e > \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = 2\sin x \cos x - \tan x + 2x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 区間 $-\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = -\dfrac{\pi}{6}$，$x = \dfrac{\pi}{3}$ とで囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ．

4 サイコロを4回投げて，1，2，3，4回目に出た目をそれぞれ a，b，c，d とするとき，行列 A を $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ で定める．次の問いに答えよ．

(1) $A^2-(a-d)A-(ad-bc)E=O$ を示せ．ただし，E，O はそれぞれ2次の単位行列，零行列とする．

(2) n を2以上の自然数とするとき，$A^n=O$ が成り立つための必要十分条件は，$ad=bc$ および $a=d$ が成り立つことである．これを示せ．

(3) n を2以上の自然数とする．$A^n=O$ となる確率を求めよ．

5 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対し，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とする．すべての自然数 n に対して，$\dfrac{a_n+3}{2}=\sqrt{3S_n}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を S_n を用いて表せ．

(3) n が自然数であるとき，数学的帰納法を用いて，$S_n=3n^2$ が成り立つことを証明せよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\log_{x(1-x)}\{x(y-1)\}\leqq 0$ の表す領域を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が上の不等式の表す領域を動くとき，$2x+y$ の最小値を求めよ．

7 2次関数 $f(x)$，$g(x)$ は，それぞれ

$$f(x)=\frac{3x^2}{16}\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{3x}{7}\int_{-1}^0 f(t)\,dt+7,$$
$$(x-1)g(x)=\int_0^x g(t)\,dt-\frac{2x^3}{3}+2x^2-2x+1$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) 放物線 $y=f(x)$ の点 $(4,\ f(4))$ における接線を l とする．直線 l と放物線 $y=g(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\triangle$OAB において，OA $= a$，OB $= b$，$\angle$AOB $= \theta$ とおく．ただし，$a \geqq b$ および $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を A_1 とする．また点 A_1 を通って辺 AB に平行な直線と，辺 OB との交点を B_1 とする．次に点 B_1 から辺 OA_1 に下ろした垂線の足を A_2 とし，点 A_2 を通って辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ に平行な直線と，辺 OB_1 との交点を B_2 とする．以下，この操作を続け，三角形の列

$$\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1,\ \triangle \mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2,\ \cdots,\ \triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$$

をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ は，$\triangle$OAB に相似であることを示せ．

(2) $\dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}}$ を a，b，θ の式で表せ．

(3) $\triangle \mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ の面積を S_k とする．$a = 2$，$b = 1$，$\theta = 30^\circ$ のとき，

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

を n の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ $a > 0$ のとき，放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線を l_1 とし，P を通り l_1 と垂直な直線を l_2 とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 l_2 と放物線 C との交点のうち，点 P と異なる方を Q とする．点 Q の座標を a の式で表せ．

(2) 放物線 C と直線 l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする．S を a の式で表せ．

(3) (2) の S の最小値を求めよ．またそのときの a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2,\ 0)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より

$$b_1{}^2+b_2{}^2=1 \quad \cdots①$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ$ より

$$b_1=1\times1\times\frac{1}{2} \qquad \text{ゆえに} \qquad \boldsymbol{b_1=\frac{1}{2}}$$

これを ① に代入すると　$b_2{}^2=\dfrac{3}{4}$　　$b_2>0$ より　　$\boldsymbol{b_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ より

$$c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2=1 \quad \cdots②$$

$\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ$ より

$$c_1=1\times1\times\frac{1}{2} \qquad \text{ゆえに} \qquad \boldsymbol{c_1=\frac{1}{2}} \quad \cdots③$$

$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 60^\circ$ より

$$\frac{1}{2}c_1+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2=1\times1\times\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad c_1+\sqrt{3}c_2=1$$

③ を上式に代入して　　$\boldsymbol{c_2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$　$\cdots④$

③，④ を ② に代入すると　$c_3{}^2=\dfrac{2}{3}$　　$c_3>0$ より　　$\boldsymbol{c_3=\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)=\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\cdot0+0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

(3) 直線 BC 上の点 P は，実数 t を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから

$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 0 \quad \cdots ⑤$$

ここで，$\triangle$OBC は一辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{BO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -|\overrightarrow{\mathrm{BO}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = 1$$

これらを ⑤ に代入して　$t = \dfrac{1}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right) + \frac{1}{2}\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) - (1,\ 0,\ 0) = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$　より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})}{n!}$

$$= \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \boldsymbol{f_{n-1}(x) - f_n(x)}$$

(2) $f_0(x) = e^{-x}$ より　$f_0'(x) = -e^{-x} = -f_0(x)$

上式と (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) &= f_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \\
&= -f_0(x) + \sum_{k=1}^{n}\{f_{k-1}(x) - f_k(x)\} \\
&= -f_0(x) + \{f_0(x) - f_n(x)\} \\
&= -f_n(x) = \boldsymbol{-\frac{x^n e^{-x}}{n!}}
\end{aligned}$$

(3) (2) の結果より $f_n(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k'(x)$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 f_k'(x)\,dx \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\Big[\ f_k(x)\ \Big]_0^1 \\
&= -\sum_{k=0}^{n} f_k(1) + \sum_{k=0}^{n} f_k(0)
\end{aligned}$$

$f_n(1) = \dfrac{e^{-1}}{n!}$，$f_n(0) = 0\ (n \geqq 1)$，$f_0(0) = 1$ であるから

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = -\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-1}}{k!} + 1 = \boldsymbol{-\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + 1}$$

(4) $0 < x \leqq 1$ において $f_n(x) > 0$ であるから　$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx > 0$

上式および (3) の結果から　$-\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + 1 > 0$　ゆえに　$e > \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \\ &= 4\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4\cos^4 x - 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(2\cos^2 x + 1)(2\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	極大 $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$

よって　$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

$x = -\dfrac{\pi}{6}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{\pi}{3}}$

(2) $f(0) = 0$ および $f(x)$ の増減から

$$-\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq 0 \text{ のとき } f(x) \leqq 0, \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} \text{ のとき } f(x) \geqq 0$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \sin^2 x + \log|\cos x| + x^2$$

とし，求める面積の和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \\ &= -\Big[\, F(x) \,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \Big[\, F(x) \,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= F\left(-\frac{\pi}{6}\right) + F\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2F(0) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \log\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{36}\right) + \left(\frac{3}{4} + \log\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{9}\right) - 2 \times 0 \\ &= \boldsymbol{1 + \frac{5}{36}\pi^2 + \log\frac{\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ より

$$A-(a-d)E=\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}-(a-d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} A^2-(a-d)A &= A\{A-(a-d)E\} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)E \end{aligned}$$

よって　$A^2-(a-d)A-(ad-bc)E=O$

(2) $A^n=O$ より，$\det(A^n)=\det O$　ゆえに　$(\det A)^n=0$

したがって　$\det A=-ad+bc=0$　すなわち　$ad=bc$

これを (1) の結果に代入して　$A^2=(a-d)A$

したがって，$n \geqq 2$ のとき　$A^n=(a-d)^{n-1}A$

$A \neq O$ であるから，$a-d=0$　すなわち　$a=d$

逆に，$ad=bc$ および $a=d$ を (1) の結果に代入して　$A^2=O$

よって，$n \geqq 2$ のとき　$A^n=O$

(3) (2) の結果より

$$a=d,\ ad=bc \quad \text{すなわち} \quad a=d=\sqrt{bc}$$

となる確率を求めればよいので

$a=d=1$ のとき，$(b,\ c)=(1,\ 1)$
$a=d=2$ のとき，$(b,\ c)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$
$a=d=3$ のとき，$(b,\ c)=(3,\ 3)$
$a=d=4$ のとき，$(b,\ c)=(4,\ 4)$
$a=d=5$ のとき，$(b,\ c)=(5,\ 5)$
$a=d=6$ のとき，$(b,\ c)=(6,\ 6)$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{6^4}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{162}}$

$\boxed{5}$ (1) $$\frac{a_n+3}{2}=\sqrt{3S_n} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると $\dfrac{a_1+3}{2}=\sqrt{3S_1}$

$S_1=a_1$ であるから $\dfrac{a_1+3}{2}=\sqrt{3a_1}$

$a_1+3=2\sqrt{3a_1}$ の両辺を平方すると $a_1{}^2+6a_1+9=12a_1$

ゆえに $(a_1-3)^2=0$ よって $\boldsymbol{a_1=3}$

(2) $(*)$ より $\dfrac{a_{n+1}+3}{2}=\sqrt{3S_{n+1}}$

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ であるから $a_{n+1}+3=2\sqrt{3(S_n+a_{n+1})}$

両辺を平方すると $a_{n+1}{}^2+6a_{n+1}+9=12(S_n+a_{n+1})$

したがって $(a_{n+1}-3)^2=12S_n \quad \cdots ①$

$\{a_n\}$ は正の数からなる数列であるから $S_n \geqq S_1=3$

$(*)$ より $\dfrac{a_n+3}{2}=\sqrt{3S_n} \geqq \sqrt{3S_1}=3$ ゆえに $a_n \geqq 3$

上式および ① から $a_{n+1}-3=2\sqrt{3S_n}$ よって $\boldsymbol{a_{n+1}=3+2\sqrt{3S_n}}$

(3) $$S_n=3n^2 \quad \cdots(\mathrm{A})$$

(i) $n=1$ のとき $S_1=3\cdot1^2=3$
よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+a_{k+1}=S_k+(3+2\sqrt{3S_k})\\&=3k^2+3+2\sqrt{3\cdot3k^2}\\&=3k^2+3+6k=3(k+1)^2\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，(A) が成り立つ．

(i)，(ii) により，すべての自然数について，(A) が成り立つ．

補足 $(*)$ により，$(a_{n+1}+3)^2=12S_{n+1}$， $(a_n+3)^2=12S_n$ の辺々を引くと

$$a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+6a_{n+1}-6a_n=12(S_{n+1}-S_n)=12a_{n+1}$$

ゆえに $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-6)=0$ $a_n>0$ より $a_{n+1}=a_n+6$

$\{a_n\}$ は初項 3，公差 6 の等差数列であるから，$a_n=6n-3$，$S_n=3n^2$

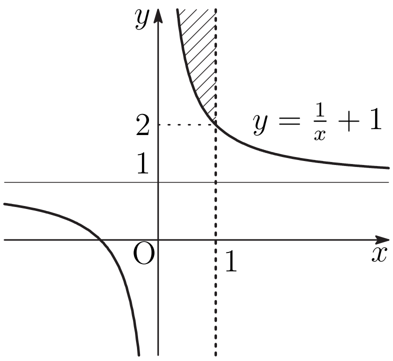
$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 底は正であるから

$$x(1-x)>0 \quad ゆえに \quad 0<x<1$$

また　$x(1-x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}<1$

したがって，真数は　　$x(y-1)\geqq 1$

$0<x<1$ であるから　　$y\geqq \dfrac{1}{x}+1$



求める領域は，図の斜線部分で，$y=\dfrac{1}{x}+1$ の境界を含むが，$x=1$ は含まない．

(2) (1) の領域において，$2x+y$ が最小となるのは，$y=\dfrac{1}{x}+1$ $(0<x<1)$ 上の点であるから

$$\begin{aligned}2x+y&=2x+\frac{1}{x}+1\\&=\frac{2x^2-2\sqrt{2}x+1}{x}+2\sqrt{2}+1\\&=\frac{(\sqrt{2}x-1)^2}{x}+2\sqrt{2}+1\end{aligned}$$

よって，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{2}+1$ のとき，最小値 $\mathbf{2\sqrt{2}+1}$ をとる．

補足 $2x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}$$

上式において，等号が成り立つのは

$$2x=\frac{1}{x} \quad すなわち \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

のときである．よって，$2x+\dfrac{1}{x}+1$ の最小値は　$2\sqrt{2}+1$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $a=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$，$b=\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt$ とおくと　$f(x)=\dfrac{3a}{16}x^2-\dfrac{3b}{7}x+7$

したがって

$$a=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(\frac{3a}{16}t^2-\frac{3b}{7}t+7\right)dt$$
$$=\left[\,\frac{a}{16}t^3-\frac{3b}{14}t^2+7t\,\right]_0^1=\frac{a}{16}-\frac{3b}{14}+7 \qquad \cdots ①$$
$$b=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_{-1}^0\left(\frac{3a}{16}t^2-\frac{3b}{7}t+7\right)dt$$
$$=\left[\,\frac{a}{16}t^3-\frac{3b}{14}t^2+7t\,\right]_{-1}^0=\frac{a}{16}+\frac{3b}{14}+7 \qquad \cdots ②$$

①，② を解いて　$a=\dfrac{16}{3}$，$b=\dfrac{28}{3}$　よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+7}$

(2) $(x-1)g(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt-\frac{2x^3}{3}+2x^2-2x+1$ より

$$\int_0^x g(t)\,dt=(x-1)g(x)+\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x-1$$

$g(x)$ は 2 次関数であるから，$g(x)=px^2+qx+r$ とおくと

$$\int_0^x g(t)\,dt=(x-1)(px^2+qx+r)+\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x-1$$
$$=\left(p+\frac{2}{3}\right)x^3+(-p+q-2)x^2+(-q+r+2)x-r-1 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$0=-r-1$　ゆえに　$r=-1$

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$px^2+qx+r=(3p+2)x^2+2(-p+q-2)x+(-q+r+2)$$

上式の両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$p=3p+2,\quad q=2(-p+q-2),\quad r=-q+r+2$$

これを解いて　$p=-1$，$q=2$　よって　$\boldsymbol{g(x)=-x^2+2x-1}$

別解　$$(x-1)g(x)=\int_0^x g(t)\,dt-\frac{2x^3}{3}+2x^2-2x+1 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$-g(0)=1$　ゆえに　$g(0)=-1$　$\cdots$ ①

$(*)$ の両辺を x で微分すると

$$g(x)+(x-1)g'(x)=g(x)-2x^2+4x-2$$

したがって　　$(x-1)g'(x)=-2(x-1)^2$

$g(x)$ は整式であるから，$x=1$ においても微分可能である．

したがって　　$g'(x)=-2(x-1)$

関数 $g(x)$ は整式であるから $g'(x)$ も整式で，連続関数である．ゆえに，任意の実数 a に対して

$$g'(a)=\lim_{x\to a}g'(x)=\lim_{x\to a}(-2x+2)=-2a+2$$

上式は，$a=1$ に対しても成り立つので　$g'(x)=-2x+2$

よって，① に注意して積分すると　$g(x)=-x^2+2x-1$

(3) (1) の結果から　$f(4)=4^2-4\cdot 4+7=7$，$f'(x)=2x-4$ より　$f'(4)=4$
よって，直線 l の方程式は

$$y-7=4(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y=4x-9$$

$h(x)=4x-9$ とおくと

$$g(x)-h(x)=(-x^2+2x-1)-(4x-9)=-(x^2+2x-8)=-(x+4)(x-2)$$

したがって，$y=g(x)$ と $y=h(x)$ の交点の x 座標は　$x=-4,\ 2$

また，$-4\leqq x\leqq 2$ において　　$g(x)-h(x)\geqq 0$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-4}^{2}\{g(x)-h(x)\}\,dx\\&=-\int_{-4}^{2}(x+4)(x-2)\,dx=\frac{1}{6}\{2-(-4)\}^3=\mathbf{36}\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ (1) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ と $\triangle \mathrm{OAB}$ について

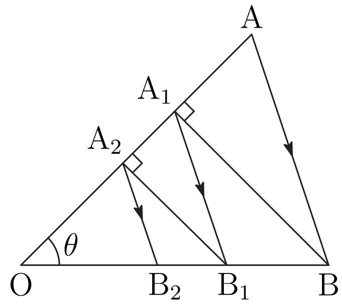
$\angle \mathrm{O}$ は共通

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n /\!/ \mathrm{AB}$ であるから

$\angle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \angle \mathrm{OAB}$

ゆえに，2 角が等しいので

$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n \backsim \triangle \mathrm{OAB}$



(2) $\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1} \backsim \triangle \mathrm{OAB}$ であるから

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OA}_n}{\mathrm{OA}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OB}_{n-1}\cos\theta}{\mathrm{OA}_{n-1}} = \frac{\mathrm{OB}\cos\theta}{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\frac{b\cos\theta}{a}}$$

(3) (2) の結果に $a=2$，$b=1$，$\theta=30^\circ$ を代入すると

$$\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}} = \frac{1\cdot\cos 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = \left(\frac{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

また $\quad S_1 = \dfrac{3}{16}\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{3}{16} \times \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\sin 30^\circ = \dfrac{3}{32}$

$S_1+S_2+\cdots+S_n$ は，初項が $\dfrac{3}{32}$，公比が $\dfrac{3}{16}$ の等比数列の和であるから

$$S_1+S_2+\cdots+S_n = \frac{\dfrac{3}{32}\left\{1-\left(\dfrac{3}{16}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{3}{16}} = \boldsymbol{\frac{3}{26}\left\{1-\left(\frac{3}{16}\right)^n\right\}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l_1 の傾きは　$2a$

l_1 に垂直な直線 l_2 の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ であるから，l_2 の方程式は

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$$

l_2 と C の方程式から y を消去すると

$$x^2-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)\quad \text{ゆえに}\quad (x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

P と異なる Q の x 座標は　$x=-a-\dfrac{1}{2a}$　また y 座標は　$y=\left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2$

よって，Q の座標は　$\boldsymbol{\left(-a-\dfrac{1}{2a},\ \left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2\right)}$

(2) $-a-\dfrac{1}{2a}\leqq x\leqq a$ において，直線 $l_2:y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$ は，放物線 $C:y=x^2$ の上側にある．したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}\left\{-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2-x^2\right\}dx\\&=-\int_{-a-\frac{1}{2a}}^{a}(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)dx\\&=\frac{1}{6}\left\{a-\left(-a-\frac{1}{2a}\right)\right\}^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3}\end{aligned}$$

(3) $2a>0,\ \dfrac{1}{2a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

上式において，等号が成り立つのは

$$2a=\frac{1}{2a}\quad \text{すなわち}\quad a=\frac{1}{2}$$

のときである．

よって，S の最小値は　$\dfrac{1}{6}\cdot 2^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$　そのときの a の値は　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$