平成23年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成23年2月25日

- 理工学部　1 2 3 4 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農学部　1 2 5 6 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部　7 8 9 10 数I・II・A・B (100分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 定数 a，b を用いて，$\sin\theta+\cos\theta$ を $a\sin(\theta+b)$ の形に表せ．ただし，$a>0$，$0 \leqq b < 2\pi$ とする．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\sin\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cdot\cos\theta$ を t を用いて表し，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\sin\theta\cdot\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ を t を用いて表し，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

2 多項式 $f(x)=x^4-x^3+cx^2-11x+d$ について，$f(1+\sqrt{2})=0$ が成り立つとする．ここで，c，d は有理数とする．次の問いに答えよ．

(1) $S=\{a+\sqrt{2}b \,|\, a,\ b \text{ は有理数}\}$ とする．集合 S の元 $z=a+\sqrt{2}b$ (ただし，a，b は有理数) に対して，$j(z)=a-\sqrt{2}b$ と定義する．S の任意の元 z，w に対して，$j(z+w)=j(z)+j(w)$ および $j(zw)=j(z)j(w)$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) を用いて，S の元 z が $f(z)=0$ を満たせは，$f(j(z))=0$ が成り立つことを示せ．このことを用いて，$f(1-\sqrt{2})=0$ を示せ．

(3) 有理数 c，d を求め，$f(x)$ を有理数の範囲で因数分解せよ．

3 関数

$$f(t)=\int_1^t \frac{\log x}{x+t}\,dx \quad (t>0)$$

を考える．ただし，対数は自然対数とする．

(1) この定積分を $x=ty$ によって置換することにより，

$$f(t)=\log t\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}\,dy+\int_{t^{-1}}^{1}\frac{\log y}{y+1}\,dy$$

を示せ．

(2) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^{-1}}^{1}\frac{\log y}{y+1}\,dy=-\frac{\log t}{t(t+1)}$ を示せ．

(3) 導関数 $f'(t)$ を求めよ．

(4) 関数 $f(t)$ の極値を求めよ．

4 整数 a，b，c に対して，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+c-b \end{pmatrix}$ をとる．次の問いに答えよ．

(1) 行列 $Q=\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix}$ に対して，

$$Q^3-Q=\begin{pmatrix} s(s^2-1) & t(s^2+u^2+su-1) \\ 0 & u(u^2-1) \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

(2) 整数 x，y，z に対して，行列 $R=\begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix}$ をとる．このとき，行列 $\dfrac{1}{6}R^2$ の各成分が整数であることを示せ．

(3) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，$B=PAP^{-1}$ を求めよ．さらに，行列 $\dfrac{1}{6}(B^3-B)^2$ の各成分が整数であることを示せ．

(4) 行列 $\dfrac{1}{6}(A^3-A)^2$ の各成分が整数であることを示せ．

$\boxed{5}$ xy 平面上の原点を O とし，放物線 $y = k - x^2$ を C とする．ただし，k は $\dfrac{1}{2}$ より大きい定数とする．C の点 $\mathrm{P}(t,\ k - t^2)$ が $t \geqq 0$ の範囲で動くとき OP の長さが最小となる P を P_0 とおく．

(1) P_0 の座標を求めよ．

(2) O と P_0 を通る直線と，P_0 における C の接線が直交することを示せ．

(3) O と P_0 を通る直線の傾きが 1 のとき，k の値を求めよ．

(4) O と P_0 を通る直線の傾きが 1 のとき，xy 平面の第 1 象限にあって，x 軸，y 軸および放物線 C に接する円のうち小さい方の半径を求めよ．

$\boxed{6}$ c を実数とし，$a_1 = c$，$a_2 = c^2 - 2$ および

$$a_{n+2} = a_1 a_{n+1} - a_n \quad (n \geqq 1)$$

で数列 $\{a_n\}$ を定義する．

(1) $n \geqq 1$ のとき $a_{n+4} = a_2 a_{n+2} - a_n$ となることを示せ．

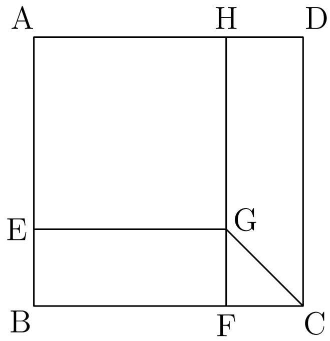
(2) $c = \sqrt{2}$ のとき a_{100} を求めよ．

$\boxed{7}$ (1) 中心が点 $(1,\ 2)$，半径が 3 の円がある．点 P がこの円上を動くとき，点 $\mathrm{A}(-3,\ 6)$ と点 P を結ぶ線分 AP を $2:1$ に内分する点 Q の軌跡を求めよ．

(2) 5 個の数字 1，2，3，4，5 から異なる 3 個を取って 3 桁の自然数を作る．3 の倍数にも 5 の倍数にもならないものはいくつあるか．

$\boxed{8}$ △ABC の辺 BC の中点を D とする．点 B，C から対辺またはその延長線上に垂線 BE，CF を下ろす．△DEF が正三角形となるとき，∠A の大きさを求めよ．

9 (1) 正方形 ABCD が図のように 3 つの線分 EG，FH，CG によって 4 つの部分に分割されている．四角形 AEGH は面積が 400 の正方形になり，三角形 FCG は面積が 8 になる．このとき，正方形 ABCD の面積を求めよ．



(2) 「2116 の正の平方根を求めよ」という問題に対して以下のような答案があった．この答案の意図を解説せよ．

(答案) まず $40^2 < 2116 < 50^2$ なので，$2116 - 40^2 = 516$ を出す．次に 516 を 2 で和って 258 が出る．この 258 を 40 で割ると商が 6 で余りが 18 になる．さらに余りの 18 に 2 をかければ $36 = 6^2$ となり商の 2 乗が出る．最後に 40^2 と 6^2 とから $40 + 6 = 46$ が得られる．以上により，求める答えは 46 になる．

10 (1) 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ．

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $f(x) = 1$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a を求めよ．

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 1$$

(3) 等式 $f(x) = x^2 - \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

解答例

1 (1) $\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

(2) (1) の結果から　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき**最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$**，$\theta=\pi$ のとき**最小値 $\boldsymbol{-1}$**

(3) (2) の結果から　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると　$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

ゆえに　$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}}$　$(-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$

よって　$t=\sqrt{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**

$t=0$　すなわち　$\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき　**最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$**

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=t^3-3\cdot\frac{t^2-2}{2}\cdot t=\boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t}\end{aligned}$$

$f(t)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$ $\left(-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\right)$ とおいて，これを微分すると

$$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって　$t=1$　すなわち　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{1}$**

$t=-1$　すなわち　$\theta=\pi$ のとき　**最小値 $\boldsymbol{-1}$**

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $z=a+\sqrt{2}b$，$w=a'+\sqrt{2}b'$ とすると

$$\begin{aligned} z+w &= (a+a')+\sqrt{2}(b+b'), \\ zw &= (a+\sqrt{2}b)(a'+\sqrt{2}b') \\ &= (aa'+2bb')+\sqrt{2}(ab'+a'b) \end{aligned}$$

このとき
$$\begin{aligned} &j(z)=a-\sqrt{2}b, \quad j(w)=a'-\sqrt{2}b', \\ &j(z+w)=(a+a')-\sqrt{2}(b+b'), \\ &j(zw)=(aa'+2bb')-\sqrt{2}(ab'+a'b) \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} j(z)+j(w) &= (a-\sqrt{2}b)+(a'-\sqrt{2}b') \\ &= (a+a')-\sqrt{2}(b+b')=j(z+w), \\ j(z)j(w) &= (a-\sqrt{2}b)(a'-\sqrt{2}b') \\ &= (aa'+2bb')-(ab'+a'b)\sqrt{2}=j(zw) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，n を自然数，$z_i \in S$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とすると

$$\begin{aligned} j(z_1)+j(z_2)+\cdots+j(z_n) &= j(z_1+z_2+\cdots+z_n) \\ j(z_1)j(z_2)\cdots j(z_n) &= j(z_1z_2\cdots z_n) \end{aligned}$$

また上の第 2 式から　$\{j(z)\}^n=j(z^n)$

a が有理数のとき $j(a)=a$ であるから，上の諸式により

$$\begin{aligned} f(j(z)) &= \{j(z)\}^4-\{j(z)\}^3+c\{j(z)\}^2-11j(z)+d \\ &= j(z^4)+j(-1)j(z^3)+j(c)j(z^2)+j(-11)j(z)+j(d) \\ &= j(z^4)+j((-1)z^3)+j(cz^2)+j((-11)z)+j(d) \\ &= j(z^4+(-1)z^3+cz^2+(-11)z+d) \\ &= j(z^4-z^3+cz^2-11z+d) \\ &= j(f(z)) \end{aligned}$$

$f(z)=0$ のとき，$j(f(z))=j(0)=0$　ゆえに　$f(j(z))=0$

$f(1+\sqrt{2})=0$ であるから，上の結果から

$$f(j(1+\sqrt{2}))=j(f(1+\sqrt{2}))$$

よって　$f(1-\sqrt{2})=j(0)=0$

(3) $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ とおくと，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ より，$f(x)$ は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-2x-1$$

を因数にもつ．このとき，$f(x)$ の最高次の係数と定数項に注意して

$$f(x)=(x^2-2x-1)(x^2+ex-d)\quad (e \text{ は定数})$$

とおいて，右辺を展開すると

$$f(x)=x^4+(e-2)x^3+(-d-2e-1)x^2+(2d-e)x+d$$

上式の両辺の 3 次，2 次，1 次の項の係数を比較して

$$e-2=-1,\quad -d-2e-1=c,\quad 2d-e=-11$$

これを解いて　$\boldsymbol{c=2}$，$\boldsymbol{d=-5}$，$e=1$

よって　$\boldsymbol{f(x)=(x^2-2x-1)(x^2+x+5)}$ ■

3 (1) $x=ty$ とおくと　$dx=tdy$

x と y の対応は右のようになる．

x	$1 \longrightarrow t$
y	$t^{-1} \longrightarrow 1$

よって　$f(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x+t}dx=\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{ty+t}tdy=\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{y+1}dy$

$$=\log t\int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1}dy+\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy$$

(2) $\dfrac{\log y}{y+1}$ の原始関数を $F(y)$ とすると

$$\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy=F(1)-F(t^{-1})$$

$F'(y)=\dfrac{\log y}{y+1}$ であるから

$$\frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1}dy=\frac{d}{dt}\{F(1)-F(t^{-1})\}=-F'(t^{-1})\cdot(t^{-1})'$$

$$=-\frac{\log t^{-1}}{t^{-1}+1}\cdot(-t^{-2})=-\frac{\log t}{t(t+1)}$$

(3) $$\int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1}dy=\Big[\log(y+1)\Big]_{t^{-1}}^1=\log\frac{2}{t^{-1}+1}=\log\frac{2t}{t+1}$$

また $\quad \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t^{-1}}^{1} \dfrac{1}{y+1}dy = \dfrac{d}{dt}\Big[\ \log(y+1)\ \Big]_{t^{-1}}^{1}$

$$= \frac{d}{dt}\log\frac{2}{t^{-1}+1} = \frac{d}{dt}\{\log 2 - \log(t^{-1}+1)\}$$

$$= -\frac{1}{t^{-1}+1}(t^{-1})' = -\frac{1}{t^{-1}+1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t(t+1)}$$

(2) および上の結果を利用して微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy + \log t\left\{\frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{1}{y+1}dy\right\} + \frac{d}{dt}\int_{t^{-1}}^{1}\frac{\log y}{y+1}dy \\ &= \frac{1}{t}\log\frac{2t}{t+1} + \log t\times\frac{1}{t(t+1)} - \frac{\log t}{t(t+1)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{t}\log\frac{2t}{t+1}} \end{aligned}$$

(4) $t>0$ より (3) の結果から

$$\frac{2t}{t+1} < 1 \quad すなわち \quad 0<t<1 のとき \quad f'(t)<0$$

$$\frac{2t}{t+1} > 1 \quad すなわち \quad 1<t のとき \quad f'(t)>0$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって $\quad t=1$ のとき**極小値 0** ■

$\boxed{4}$ (1) $Q = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix}$ より

$$Q^2 = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & t(s+u) \\ 0 & u^2 \end{pmatrix},$$

$$Q^3 = Q^2Q = \begin{pmatrix} s^2 & t(s+u) \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 & t(s^2+u^2+su) \\ 0 & u^3 \end{pmatrix}$$

よって $\qquad Q^3 - Q = \begin{pmatrix} s(s^2-1) & t(s^2+u^2+su-1) \\ 0 & u(u^2-1) \end{pmatrix}$

(2) $R = \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}R^2 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 36x^2 & 6y(x+z) \\ 0 & 36z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 & y(x+z) \\ 0 & 6z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

x，y，z は整数であるから，$\dfrac{1}{6}R^2$ の各成分は整数である．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} B &= PAP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+c-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b & b \\ -a+b & a+c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a-b} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a+c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$s = a-b$，$t = b$，$u = a+c$ とおくと，s，t，u は整数であり，これを (1) の結果に適用すると

$$B^3 - B = \begin{pmatrix} s(s^2-1) & t(s^2+u^2+su-1) \\ 0 & u(u^2-1) \end{pmatrix}$$

このとき，この行列の (1,1) 成分および (2,2) 成分は

$$s(s^2-1) = (s-1)s(s+1), \quad u(u^2-1) = (u-1)u(u+1)$$

これらは連続する 3 整数の積であるから，6 の倍数である．
したがって，(2) の結果により，$\dfrac{1}{6}(B^3-B)^2$ の各成分は整数である．

(4) $B = PAP^{-1}$ より，$A = P^{-1}BP$ であるから

$$A^3 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^3P$$

ゆえに　$A^3 - A = P^{-1}(B^3 - B)P$

したがって
$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(A^3 - A)^2 &= \frac{1}{6}\{P^{-1}(B^3 - B)P\}\{P^{-1}(B^3 - B)P\}\\ &= \frac{1}{6}P^{-1}(B^3 - B)^2P\\ &= P^{-1}\left\{\frac{1}{6}(B^3 - B)\right\}P\end{aligned}$$

(3) の結果により，$\dfrac{1}{6}(B^3 - B)$ の各成分は整数であり，P，P^{-1} の各成分も整数であるから，$\dfrac{1}{6}(A^3 - A)^2$ の各成分も整数である． ■

$\boxed{5}$ (1)
$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= t^2 + (k - t^2)^2 = t^4 - 2\left(k - \frac{1}{2}\right)t^2 + k^2\\ &= \left\{t^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + k - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$k > \dfrac{1}{2}$ より $k - \dfrac{1}{2} > 0$ であるから，$t^2 = k - \dfrac{1}{2}$ のとき，OP^2 は最小となる．

したがって　$t \geqq 0$ より　$t = \sqrt{k - \dfrac{1}{2}}$，$k - t^2 = \dfrac{1}{2}$

よって　$\mathbf{P_0}\left(\boldsymbol{\sqrt{k - \frac{1}{2}},\ \frac{1}{2}}\right)$

(2) 直線 $\mathrm{OP_0}$ の傾きを m_1 とすると

$$m_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{k - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{k - \frac{1}{2}}}$$

$y = k - x^2$ を微分すると　$y' = -2x$

ゆえに，$\mathrm{P_0}$ における接線の傾きを m_2 とすると

$$m_2 = -2\sqrt{k - \frac{1}{2}}$$

したがって　$m_1m_2 = -1$　よって，これらの 2 直線は直交する．

(3) (2) の結果から $m_1=1$ であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{k-\frac{1}{2}}}=1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=\frac{3}{4}}$$

(4) このとき，$k=\dfrac{3}{4}$ であるから，(1) の結果により　$\mathrm{P}_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

第 1 象限にあって，x 軸，y 軸に接する円の中心は，直線 $y=x\cdots$ ① 上の点である．また，C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{3}{4}-t^2\right)$ $(t \geqq 0)$ がその接点であるとき，円の中心は，P における法線

$$y-\left(\frac{3}{4}-t^2\right)=\frac{1}{2t}(x-t) \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{2t}x-t^2+\frac{1}{4} \quad \cdots ②$$

上の点でもある．

(i) P が P_0 と異なるとき　①，② を解いて　$\left(-t^2-\dfrac{t}{2},\ -t^2-\dfrac{t}{2}\right)$

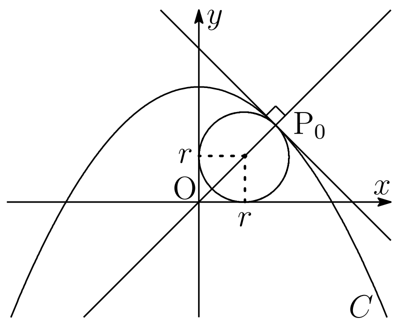
これは，第 1 象限の点ではないので，不適．

(ii) P が P_0 と一致するとき　① と ② は一致する．

円の中心は第 1 象限にあるから，この円の半径を r，円の中心を $(r,\ r)$ とおくと $(r>0)$，その方程式は

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \quad \cdots (*)$$

である．



このとき，P_0 は円 $(*)$ の点であるから

$$\left(\frac{1}{2}-r\right)^2+\left(\frac{1}{2}-r\right)^2=r^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2-2r+\frac{1}{2}=0$$

求める小さい方の円の半径は，P_0 と円の中心の座標から，$0<r<\dfrac{1}{2}$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{r=1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

■

$\boxed{6}$ (1) 漸化式から

$$a_{n+4} = ca_{n+3} - a_{n+2} \qquad \cdots ①$$
$$a_{n+3} = ca_{n+2} - a_{n+1} \qquad \cdots ②$$
$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n \qquad \cdots ③$$

上の 3 式から (a_{n+3}，a_{n+1} を消去する)

$$a_{n+4} = ca_{n+3} - a_{n+2} \qquad \cdots ①$$
$$ca_{n+3} = c^2a_{n+2} - ca_{n+1} \qquad \cdots ② \times c$$
$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n \qquad \cdots ③$$

これらの 3 式の辺々を加えて整理すると

$$a_{n+4} = (c^2 - 2)a_{n+2} - a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+4} = a_2a_{n+2} - a_n$$

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき，$a_2 = 0$ であるから，(1) の結果から

$$a_{n+4} = -a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{4(n+1)} = -a_{4n} \quad \cdots (*)$$

また，$a_1 = \sqrt{2}$，$a_2 = 0$，$a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n$ より

$$a_3 = \sqrt{2}a_2 - a_1 = -\sqrt{2}$$
$$a_4 = \sqrt{2}a_3 - a_2 = -2$$

$100 - 4 = 4 \times 24$ であるから，$(*)$ より

$$a_{100} = (-1)^{24}a_4 = \boldsymbol{-2}$$

■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 点 P の座標を $(s,\ t)$ とすると，P は中心 $(1,\ 2)$，半径 3 の円周上にあるから

$$(s-1)^2+(t-2)^2=9 \quad \cdots ①$$

また，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，条件から

$$x=\frac{1\cdot(-3)+2s}{2+1},\quad y=\frac{1\cdot 6+2t}{2+1}$$

すなわち　　$s=\dfrac{3x+3}{2}$，$t=\dfrac{3y-6}{2}$

これらを ① に代入して　$\left(\dfrac{3x+3}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{3y-6}{2}-2\right)^2=9$

整理すると　　$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=4$

よって，点 Q は円 $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{10}{3}\right)^2=4$ 上にある．

逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ は，条件を満たす．

したがって，求める軌跡は，**点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$ を中心とする半径 2 の円．**

(2) 5 個の数字 1，2，3，4，5 から 3 個取ってできる 3 桁の自然数の総数は

$${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60 \ \text{(個)}$$

3 の倍数になる数の組合せは，

$$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{3,\ 4,\ 5\}$$

の 4 通りで，それぞれの並べ方が 3! 通りあるから

$$4\times3!=4\times3\cdot2\cdot1=24 \ \text{(通り)}$$

5 の倍数になるのは，一位の数が 5 であるから

$${}_4\mathrm{P}_2=4\cdot3=12 \ \text{(通り)}$$

3 倍数かつ 5 の倍数であるのは，次の 4 通り．

$$135,\quad 315,\quad 345,\quad 435$$

よって，求める個数は

$$60-(24+12-4)=\mathbf{28} \ \text{(個)}$$

■

$\boxed{8}$ E，F は BC を直径とする円周上にある．△ABC が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の場合についてそれぞれ考える．

(i) △ABC が鋭角三角形である (図 1).

(ii) △ABC が $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形であるとき，E，F は A と一致し，不適.

(iii) △ABC が $\angle A > 90^\circ$ の鈍角三角形である (図 2).

(iv) △ABC が $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である (図 3).

(v) △ABC が $\angle B > 90^\circ$ の鈍角三角形である (図 4).

(vi) △ABC が $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形であるとき，(iv) と対等.

(vii) △ABC が $\angle C > 90^\circ$ の鈍角三角形であるとき，(v) と対等.

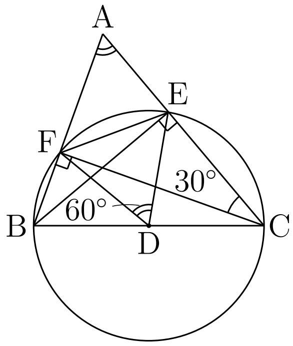


図 1

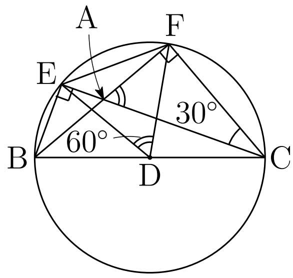


図 2

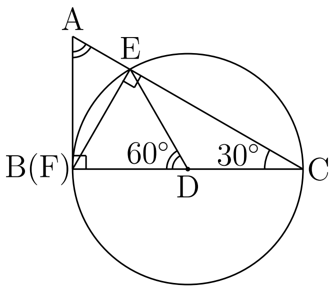


図 3

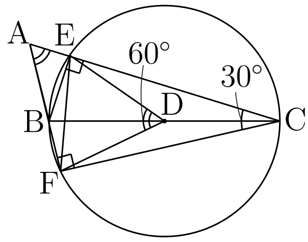


図 4

図 1〜図 4 について，△DEF は正三角形であるから　$\angle \mathrm{EDF} = 60^\circ$

このとき，円周角と中心角の定理により　$\angle \mathrm{ECF} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{EDF} = 30^\circ$

また，直角三角形 CAF により　$\angle \mathrm{CAF} = 60^\circ$　　よって　$\boldsymbol{A = 60^\circ}$ **または** $\boldsymbol{120^\circ}$

■

9 (1) 正方形 AEGH の面積が 400 であるから $400 = 20^2$ より

$$\mathrm{EG} = \mathrm{BF} = 20$$

$x = \mathrm{FC}$ とおくと　$\triangle\mathrm{FCG} = \dfrac{1}{2}x^2 = 8$　ゆえに　$x = 4$

したがって　$\mathrm{BC} = \mathrm{BF} + \mathrm{FC} = 20 + 4 = 24$

よって，正方形 ABCD の面積は　　$24^2 = \mathbf{576}$

(2) (1) の図形を用いる．

2116 を正方形 ABCD の面積とする．

$2116 - 40^2 = 516$ は，正方形 ABCD から正方形 AEGH から引いた面積で，516 を 2 で割った 256 は，台形 EBCG である．

さらに 258 を 40 で割った商 6 が，EB(GF) であり，余りの 18 が，直角二等辺三角形 FCG の面積を表す．この 18 に 2 をかけた 36 は FC を一辺とする正方形の面積であるから，$\mathrm{FC} = 6$

したがって，正方形 ABCD の一辺の長さは　$40 + 6 = 46$

よって，2116 の正の平方根は　**46**

別解　問題の計算から

$$2116 = 40^2 + 516 \quad \cdots ①$$
$$516 = 2 \times 256 \quad \cdots ②$$
$$258 = 40 \times 6 + 18 \quad \cdots ③$$
$$18 \times 2 = 6^2 \quad \cdots ④$$

① + ② + ③ × 2 + ④ により

$$\begin{aligned} 2116 &= 40^2 + 2{\cdot}40{\cdot}6 + 6^2 \\ &= (40 + 6)^2 \\ &= 46^2 \end{aligned}$$

■

10 (1) (i) $f(x)=x^2$ より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=\boldsymbol{2x}$$

(ii) $f(x)=1$ より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\mathbf{0}$$

(2) $$\int_a^x f(t)\,dt=x^2-1 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ の両辺を x で微分すると $\boldsymbol{f(x)=2x}$

$(*)$ に $x=a$ を代入すると

$$\int_a^a f(t)\,dt=a^2-1 \quad ゆえに \quad 0=a^2-1 \quad よって \quad \boldsymbol{a=\pm 1}$$

(3) $k=\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=x^2-k$ であるから

$$k=\int_{-1}^1 f(t)\,dt=\int_{-1}^1 (t^2-k)dt$$
$$=2\int_0^1 (t^2-k)dt=2\Big[\frac{t^3}{3}-kt\Big]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}-2k$$

したがって $k=\dfrac{2}{9}$ よって $\boldsymbol{f(x)=x^2-\dfrac{2}{9}}$ ■