

平成 23 年度 佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理工・農・文化教育学部 平成 23 年 2 月 25 日

- 理工学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部は, [1], [2], [5], [6] 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部は, [7] ~ [10] 数 I・II・A・B (100 分)

[1] 次の問いに答えよ.

- (1) 定数 a, b を用いて, $\sin \theta + \cos \theta$ を $a \sin(\theta + b)$ の形に表せ. ただし, $a > 0$, $0 \leq b < 2\pi$ とする.
- (2) $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で, $\sin \theta + \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ.
- (3) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくとき, $\sin \theta \cdot \cos \theta$ を t を用いて表し, $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $\sin \theta \cdot \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ.
- (4) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくとき, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ を t を用いて表し, $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の最大値と最小値を求めよ.

[2] 多項式 $f(x) = x^4 - x^3 + cx^2 - 11x + d$ について, $f(1 + \sqrt{2}) = 0$ が成り立つとする. ここで, c, d は有理数とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $S = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \text{ は有理数}\}$ とする. 集合 S の元 $z = a + \sqrt{2}b$ (ただし, a, b は有理数) に対して, $j(z) = a - \sqrt{2}b$ と定義する. S の任意の元 z, w に対して, $j(z + w) = j(z) + j(w)$ および $j(zw) = j(z)j(w)$ が成り立つことを示せ.
- (2) (1) を用いて, S の元 z が $f(z) = 0$ を満たせば, $f(j(z)) = 0$ が成り立つことを示せ. このことを用いて, $f(1 - \sqrt{2}) = 0$ を示せ.
- (3) 有理数 c, d を求め, $f(x)$ を有理数の範囲で因数分解せよ.

3 関数

$$f(t) = \int_1^t \frac{\log x}{x+t} dx \quad (t > 0)$$

を考える。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) この定積分を $x = ty$ によって置換することにより、

$$f(t) = \log t \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1} dy + \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1} dy$$

を示せ。

- (2) $\frac{d}{dt} \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1} dy = -\frac{\log t}{t(t+1)}$ を示せ。
 (3) 導関数 $f'(t)$ を求めよ。
 (4) 関数 $f(t)$ の極値を求めよ。

4 整数 a, b, c に対して、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+c-b \end{pmatrix}$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 行列 $Q = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix}$ に対して、

$$Q^3 - Q = \begin{pmatrix} s(s^2 - 1) & t(s^2 + u^2 + su - 1) \\ 0 & u(u^2 - 1) \end{pmatrix}$$

となることを示せ。

- (2) 整数 x, y, z に対して、行列 $R = \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix}$ をとる。このとき、

行列 $\frac{1}{6}R^2$ の各成分が整数であることを示せ。

- (3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき、 $B = PAP^{-1}$ を求めよ。さらに、

行列 $\frac{1}{6}(B^3 - B)^2$ の各成分が整数であることを示せ。

- (4) 行列 $\frac{1}{6}(A^3 - A)^2$ の各成分が整数であることを示せ。

5 xy 平面上の原点を O とし, 放物線 $y = k - x^2$ を C とする. ただし, k は $\frac{1}{2}$ より大きい定数とする. C の点 $P(t, k - t^2)$ が $t \geq 0$ の範囲で動くとき OP の長さが最小となる P を P_0 とおく.

- (1) P_0 の座標を求めよ.
- (2) O と P_0 を通る直線と, P_0 における C の接線が直交することを示せ.
- (3) O と P_0 を通る直線の傾きが 1 のとき, k の値を求めよ.
- (4) O と P_0 を通る直線の傾きが 1 のとき, xy 平面の第 1 象限にあって, x 軸, y 軸および放物線 C に接する円のうち小さい方の半径を求めよ.

6 c を実数とし, $a_1 = c$, $a_2 = c^2 - 2$ および

$$a_{n+2} = a_1 a_{n+1} - a_n \quad (n \geq 1)$$

で数列 $\{a_n\}$ を定義する.

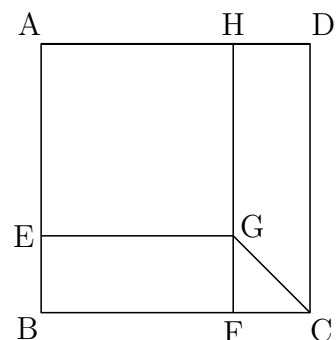
- (1) $n \geq 1$ のとき $a_{n+4} = a_2 a_{n+2} - a_n$ となることを示せ.
- (2) $c = \sqrt{2}$ のとき a_{100} を求めよ.

7 (1) 中心が点 $(1, 2)$, 半径が 3 の円がある. 点 P がこの円上を動くとき, 点 $A(-3, 6)$ と点 P を結ぶ線分 AP を $2:1$ に内分する点 Q の軌跡を求めよ.

(2) 5 個の数字 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個を取って 3 桁の自然数を作る. 3 の倍数にも 5 の倍数にもならないものはいくつあるか.

8 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を D とする. 点 B, C から対辺またはその延長線上に垂線 BE, CF を下ろす. $\triangle DEF$ が正三角形となるとき, $\angle A$ の大きさを求めよ.

- 9 (1) 正方形 ABCD が図のように 3 つの線分 EG, FH, CG によって 4 つの部分に分割されている。四角形 AEGH は面積が 400 の正方形になり、三角形 FCG は面積が 8 になる。このとき、正方形 ABCD の面積を求めよ。



- (2) 「2116 の正の平方根を求めよ」という問題に対して以下のような答案があった。この答案の意図を解説せよ。

(答案) まず $40^2 < 2116 < 50^2$ なので、 $2116 - 40^2 = 516$ を出す。次に 516 を 2 で和って 258 が出る。この 258 を 40 で割ると商が 6 で余りが 18 になる。さらに余りの 18 に 2 をかければ $36 = 6^2$ となり商の 2 乗が出る。最後に 40^2 と 6^2 とから $40 + 6 = 46$ が得られる。以上により、求める答えは 46 になる。

- 10 (1) 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $f(x) = 1$

- (2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$, および定数 a を求めよ。

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 - 1$$

- (3) 等式 $f(x) = x^2 - \int_{-1}^1 f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

正解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

(2) (1)の結果から $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$, $\theta = \pi$ のとき最小値 -1

(3) (2)の結果から $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$

$$t = \sin \theta + \cos \theta \text{ の両辺を平方すると } t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{ゆえに } \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2} \quad (-1 \leq t \leq \sqrt{2})$$

よって $t = \sqrt{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき 最大値 $\frac{1}{2}$

$t = 0$ すなわち $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき 最小値 $-\frac{1}{2}$

(4) (3)の結果から

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= t^3 - 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

$f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$ ($-1 \leq t \leq \sqrt{2}$) において, これを微分すると

$$f'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

したがって, $f(t)$ の増減表は, 次のようになる.

t	-1	\dots	1	\dots	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	\nearrow	1	\searrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって $t = 1$ すなわち $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 1

$t = -1$ すなわち $\theta = \pi$ のとき 最小値 -1

2 (1) $z = a + \sqrt{2}b$, $w = a' + \sqrt{2}b'$ とすると

$$\begin{aligned} z + w &= (a + a') + \sqrt{2}(b + b'), \\ zw &= (a + \sqrt{2}b)(a' + \sqrt{2}b') \\ &= (aa' + 2bb') + \sqrt{2}(ab' + a'b) \end{aligned}$$

このとき $j(z) = a - \sqrt{2}b$, $j(w) = a' - \sqrt{2}b'$,
 $j(z + w) = (a + a') - \sqrt{2}(b + b')$,
 $j(zw) = (aa' + 2bb') - \sqrt{2}(ab' + a'b)$

よって $j(z) + j(w) = (a - \sqrt{2}b) + (a' - \sqrt{2}b')$
 $= (a + a') - \sqrt{2}(b + b') = j(z + w)$,
 $j(z)j(w) = (a - \sqrt{2}b)(a' - \sqrt{2}b')$
 $= (aa' + 2bb') - (ab' + a'b)\sqrt{2} = j(zw)$

(2) (1) の結果から, n を自然数, $z_i \in S$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とすると

$$\begin{aligned} j(z_1) + j(z_2) + \dots + j(z_n) &= j(z_1 + z_2 + \dots + z_n) \\ j(z_1)j(z_2) \dots j(z_n) &= j(z_1z_2 \dots z_n) \end{aligned}$$

また上の第2式から $\{j(z)\}^n = j(z^n)$

a が有理数のとき $j(a) = a$ であるから, 上の諸式により

$$\begin{aligned} f(j(z)) &= \{j(z)\}^4 - \{j(z)\}^3 + c\{j(z)\}^2 - 11j(z) + d \\ &= j(z^4) + j(-1)j(z^3) + j(c)j(z^2) + j(-11)j(z) + j(d) \\ &= j(z^4) + j((-1)z^3) + j(cz^2) + j((-11)z) + j(d) \\ &= j(z^4 + (-1)z^3 + cz^2 + (-11)z + d) \\ &= j(z^4 - z^3 + cz^2 - 11z + d) \\ &= j(f(z)) \end{aligned}$$

$f(z) = 0$ のとき, $j(f(z)) = j(0) = 0$ ゆえに $f(j(z)) = 0$

$f(1 + \sqrt{2}) = 0$ であるから, 上の結果から

$$f(j(1 + \sqrt{2})) = j(f(1 + \sqrt{2}))$$

よって $f(1 - \sqrt{2}) = j(0) = 0$

(3) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$ とおくと, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ より, $f(x)$ は

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - 2x - 1$$

を因数にもつ. このとき, $f(x)$ の最高次の係数と定数項に注意して

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + ex - d) \quad (e \text{ は定数})$$

とおいて, 右辺を展開すると

$$f(x) = x^4 + (e - 2)x^3 + (-d - 2e - 1)x^2 + (2d - e)x + d$$

上式の両辺の3次, 2次, 1次の項の係数を比較して

$$e - 2 = -1, \quad -d - 2e - 1 = c, \quad 2d - e = -11$$

これを解いて $c = 2$, $d = -5$, $e = 1$

よって $f(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + x + 5)$

3 (1) $x = ty$ とおくと $dx = tdy$

x	1	\rightarrow	t
y	t^{-1}	\rightarrow	1

x と y の対応は右のようになる.

$$\begin{aligned} \text{よって } f(t) &= \int_1^t \frac{\log x}{x+t} dx = \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{ty+t} tdy = \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log ty}{y+1} dy \\ &= \log t \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1} dy + \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1} dy \end{aligned}$$

(2) $\frac{\log y}{y+1}$ の原始関数を $F(y)$ とすると

$$\int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1} dy = F(1) - F(t^{-1})$$

$F'(y) = \frac{\log y}{y+1}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1} dy &= \frac{d}{dt} \{F(1) - F(t^{-1})\} = -F'(t^{-1}) \cdot (t^{-1})' \\ &= -\frac{\log t^{-1}}{t^{-1}+1} \cdot (-t^{-2}) = -\frac{\log t}{t(t+1)} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1} dy = \left[\log(y+1) \right]_{t^{-1}}^1 = \log \frac{2}{t^{-1}+1} = \log \frac{2t}{t+1}$$

$$\begin{aligned}
\text{また } \frac{d}{dt} \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1} dy &= \frac{d}{dt} \left[\log(y+1) \right]_{t^{-1}}^1 \\
&= \frac{d}{dt} \log \frac{2}{t^{-1}+1} = \frac{d}{dt} \{ \log 2 - \log(t^{-1}+1) \} \\
&= -\frac{1}{t^{-1}+1} (t^{-1})' = -\frac{1}{t^{-1}+1} \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{t(t+1)}
\end{aligned}$$

(2) および上の結果を利用して微分すると

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{1}{t} \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1} dy + \log t \left\{ \frac{d}{dt} \int_{t^{-1}}^1 \frac{1}{y+1} dy \right\} + \frac{d}{dt} \int_{t^{-1}}^1 \frac{\log y}{y+1} dy \\
&= \frac{1}{t} \log \frac{2t}{t+1} + \log t \times \frac{1}{t(t+1)} - \frac{\log t}{t(t+1)} \\
&= \frac{1}{t} \log \frac{2t}{t+1}
\end{aligned}$$

(4) $t > 0$ より (3) の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{t+1} < 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < t < 1 \text{ のとき} \quad f'(t) < 0 \\
\frac{2t}{t+1} > 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 < t \text{ のとき} \quad f'(t) > 0
\end{aligned}$$

したがって、 $f(t)$ の増減表は、次のようになる。

t	(0)	...	1	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		↘	0	↗

よって $t = 1$ のとき極小値 0

$$\boxed{4} \quad (1) \quad Q = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & t(s+u) \\ 0 & u^2 \end{pmatrix},$$

$$Q^3 = Q^2Q = \begin{pmatrix} s^2 & t(s+u) \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 & t(s^2+u^2+su) \\ 0 & u^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad Q^3 - Q = \begin{pmatrix} s(s^2-1) & t(s^2+u^2+su-1) \\ 0 & u(u^2-1) \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad R = \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}R^2 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 36x^2 & 6y(x+z) \\ 0 & 36z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 & y(x+z) \\ 0 & 6z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

x, y, z は整数であるから, $\frac{1}{6}R^2$ の各成分は整数である.

$$(3) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$B = PAP^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+c-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & b \\ -a+b & a+c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ 0 & a+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$s = a - b, t = b, u = a + c$ とおくと, s, t, u は整数であり, これを (1) の結果に適用すると

$$B^3 - B = \begin{pmatrix} s(s^2-1) & t(s^2+u^2+su-1) \\ 0 & u(u^2-1) \end{pmatrix}$$

このとき, この行列の (1,1) 成分および (2,2) 成分は

$$s(s^2-1) = (s-1)s(s+1), \quad u(u^2-1) = (u-1)u(u+1)$$

これらは連続する 3 整数の積であるから, 6 の倍数である.

したがって, (2) の結果により, $\frac{1}{6}(B^3 - B)^2$ の各成分は整数である.

(4) $B = PAP^{-1}$ より, $A = P^{-1}BP$ であるから

$$A^3 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^3P$$

ゆえに $A^3 - A = P^{-1}(B^3 - B)P$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \frac{1}{6}(A^3 - A)^2 &= \frac{1}{6}\{P^{-1}(B^3 - B)P\}\{P^{-1}(B^3 - B)P\} \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}(B^3 - B)^2P \\ &= P^{-1}\left\{\frac{1}{6}(B^3 - B)\right\}P \end{aligned}$$

(3) の結果により, $\frac{1}{6}(B^3 - B)$ の各成分は整数であり, P, P^{-1} の各成分も整数であるから, $\frac{1}{6}(A^3 - A)^2$ の各成分も整数である.

5 (1)
$$\begin{aligned} OP^2 &= t^2 + (k - t^2)^2 = t^4 - 2\left(k - \frac{1}{2}\right)t^2 + k^2 \\ &= \left\{t^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + k - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$k > \frac{1}{2}$ より $k - \frac{1}{2} > 0$ であるから, $t^2 = k - \frac{1}{2}$ のとき, OP^2 は最小となる.

$$\text{したがって } t \geq 0 \text{ より } t = \sqrt{k - \frac{1}{2}}, \quad k - t^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } P_0 \left(\sqrt{k - \frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

(2) 直線 OP_0 の傾きを m_1 とすると

$$m_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{k - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{k - \frac{1}{2}}}$$

$$y = k - x^2 \text{ を微分すると } y' = -2x$$

ゆえに, P_0 における接線の傾きを m_2 とすると

$$m_2 = -2\sqrt{k - \frac{1}{2}}$$

したがって $m_1 m_2 = -1$ よって, これらの2直線は直交する.

(3) (2)の結果から $m_1 = 1$ であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{k - \frac{1}{2}}} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{3}{4}$$

(4) このとき, $k = \frac{3}{4}$ であるから, (1)の結果により $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

第1象限にあって, x 軸, y 軸に接する円の中心は, 直線 $y = x \cdots \textcircled{1}$ 上の点である. また, C 上の点 $P\left(t, \frac{3}{4} - t^2\right)$ ($t \geq 0$) がその接点であるとき, 円の中心は, P における法線

$$y - \left(\frac{3}{4} - t^2\right) = \frac{1}{2t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2t}x - t^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

上の点でもある.

(i) P が P_0 と異なるとき $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解いて $\left(-t^2 - \frac{t}{2}, -t^2 - \frac{t}{2}\right)$
これは, 第1象限の点ではないので, 不適.

(ii) P が P_0 と一致するとき $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ には一致する.

円の中心は第1象限にあるから, この円の半径を r , 円の中心を (r, r) とおくと ($r > 0$), その方程式は

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \cdots (*)$$

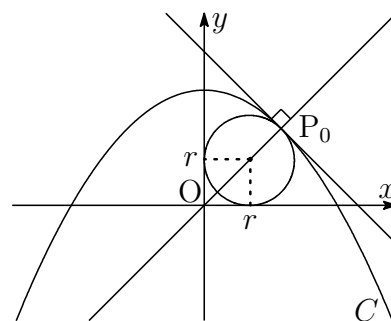
である.

このとき, P_0 は円 $(*)$ の点であるから

$$\left(\frac{1}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2 - 2r + \frac{1}{2} = 0$$

求める小さい方の円の半径は, P_0 と円の中心の座標から, $0 < r < \frac{1}{2}$ に注意して, これを解くと

$$r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



6 (1) 漸化式から

$$a_{n+4} = ca_{n+3} - a_{n+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+3} = ca_{n+2} - a_{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n \quad \dots \textcircled{3}$$

上の3式から (a_{n+3} , a_{n+1} を消去する)

$$a_{n+4} = ca_{n+3} - a_{n+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$ca_{n+3} = c^2 a_{n+2} - ca_{n+1} \quad \dots \textcircled{2} \times c$$

$$a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n \quad \dots \textcircled{3}$$

これらの3式の辺々を加えて整理すると

$$a_{n+4} = (c^2 - 2)a_{n+2} - a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+4} = a_2 a_{n+2} - a_n$$

(2) $c = \sqrt{2}$ のとき, $a_2 = 0$ であるから, (1) の結果から

$$a_{n+4} = -a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{4(n+1)} = -a_{4n} \quad \dots (*)$$

また, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 0$, $a_{n+2} = \sqrt{2}a_{n+1} - a_n$ より

$$a_3 = \sqrt{2}a_2 - a_1 = -\sqrt{2}$$

$$a_4 = \sqrt{2}a_3 - a_2 = -2$$

$100 - 4 = 4 \times 24$ であるから, (*) より

$$a_{100} = (-1)^{24} a_4 = -2$$

- 7 (1) 点Pの座標を (s, t) とすると、Pは中心 $(1, 2)$ 、半径3の円周上にあるから

$$(s-1)^2 + (t-2)^2 = 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、点Qの座標を (x, y) とすると、条件から

$$x = \frac{1 \cdot (-3) + 2s}{2+1}, \quad y = \frac{1 \cdot 6 + 2t}{2+1}$$

すなわち $s = \frac{3x+3}{2}, \quad t = \frac{3y-6}{2}$

これらを $\textcircled{1}$ に代入して $\left(\frac{3x+3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3y-6}{2} - 2\right)^2 = 9$

整理すると $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = 4$

よって、点Qは円 $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = 4$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点 $Q(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$ を中心とする半径2の円。

- (2) 5個の数字1, 2, 3, 4, 5から3個取ってできる3桁の自然数の総数は

$${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \quad (\text{個})$$

3の倍数になる数の組合せは、

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}$$

の4通りで、それぞれの並べ方が3!通りあるから

$$4 \times 3! = 4 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad (\text{通り})$$

5の倍数になるのは、一位の数が5である数のであるから

$${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12 \quad (\text{通り})$$

3倍数かつ5の倍数であるのは、次の4通り。

$$135, 315, 345, 435$$

よって、求める個数は

$$60 - (24 + 12 - 4) = 28 \quad (\text{個})$$

8 E, F は BC を直径とする円周上にある. $\triangle ABC$ が鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形の場合についてそれぞれ考える.

- (i) $\triangle ABC$ が鋭角三角形である (図 1).
- (ii) $\triangle ABC$ が $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形であるとき, E, F は A と一致し, 不適.
- (iii) $\triangle ABC$ が $\angle A > 90^\circ$ の鈍角三角形である (図 2).
- (iv) $\triangle ABC$ が $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である (図 3).
- (v) $\triangle ABC$ が $\angle B > 90^\circ$ の鈍角三角形である (図 4).
- (vi) $\triangle ABC$ が $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形であるとき, (iv) と対等.
- (vii) $\triangle ABC$ が $\angle C > 90^\circ$ の鈍角三角形であるとき, (v) と対等.

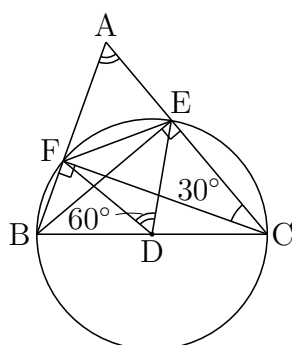


図 1

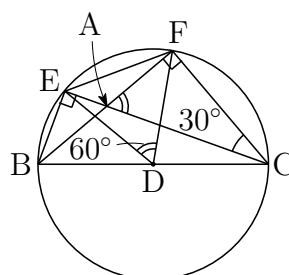


図 2

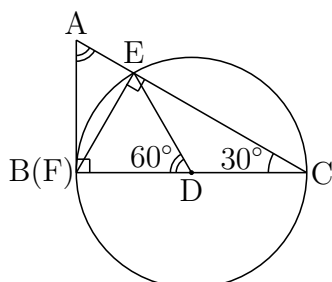


図 3

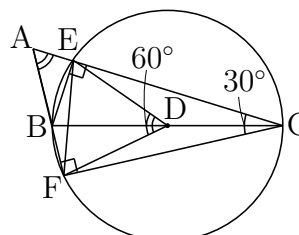


図 4

図 1~図 4 について, $\triangle DEF$ は正三角形であるから $\angle EDF = 60^\circ$
 このとき, 円周角と中心角の定理により $\angle ECF = \frac{1}{2}\angle EDF = 30^\circ$
 また, 直角三角形 CAF により $\angle CAF = 60^\circ$ よって $A = 60^\circ$ または 120°

- 9 (1) 正方形 AEGH の面積が 400 であるから $400 = 20^2$ より

$$EG = BF = 20$$

$$x = FC \text{ とおくと } \triangle FCG = \frac{1}{2}x^2 = 8 \quad \text{ゆえに } x = 4$$

$$\text{したがって } BC = BF + FC = 20 + 4 = 24$$

$$\text{よって, 正方形 ABCD の面積は } 24^2 = \mathbf{576}$$

- (2) (1) の図形を用いる.

2116 を正方形 ABCD の面積とする.

$2116 - 40^2 = 516$ は, 正方形 ABCD から正方形 AEGH から引いた面積で,
516 を 2 で割った 256 は, 台形 EBCG である.

さらに 258 を 40 で割った商 6 が, EB(GF) であり, 余りの 18 が, 直角二等辺三角形 FCG の面積を表す. この 18 に 2 をかけた 36 は FC を一辺とする正方形の面積であるから, $FC = 6$

$$\text{したがって, 正方形 ABCD の一辺の長さは } 40 + 6 = 46$$

$$\text{よって, 2116 の正の平方根は } \mathbf{46}$$

別解 問題の計算から

$$2116 = 40^2 + 516 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$516 = 2 \times 256 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$258 = 40 \times 6 + 18 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$18 \times 2 = 6^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

① + ② + ③ \times 2 + ④ により

$$\begin{aligned} 2116 &= 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 6 + 6^2 \\ &= (40 + 6)^2 \\ &= 46^2 \end{aligned}$$

- 10 (1) (i) $f(x) = x^2$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = \mathbf{2x} \end{aligned}$$

(ii) $f(x) = 1$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_a^x f(t) dt = x^2 - 1 \quad \dots (*)$$

(*) の両辺を x で微分すると $f(x) = 2x$

(*) に $x = a$ を代入すると

$$\int_a^a f(t) dt = a^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 = a^2 - 1 \quad \text{よって} \quad a = \pm 1$$

(3) $k = \int_{-1}^1 f(t) dt$ とおくと, $f(x) = x^2 - k$ であるから

$$\begin{aligned} k &= \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 (t^2 - k) dt \\ &= 2 \int_0^1 (t^2 - k) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - kt \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - 2k \end{aligned}$$

したがって $k = \frac{2}{9}$ よって $f(x) = x^2 - \frac{2}{9}$