平成22年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成22年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{8}$ 〜 $\boxed{11}$ 数I・II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 空間に定点 $\mathrm{A}(-4,\ 0,\ 4\sqrt{3})$ と動点 $\mathrm{P}(-t,\ t-2,\ 2\sqrt{3})$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2+t-3,\ 0)$ がある．原点を O とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $t=0$ のとき，$\angle\mathrm{POQ}$ の大きさを求めよ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

(3) 4点 O，A，P，Q が同一平面上にあるときの t の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で，直線 $l : y = mx$ に関する対称移動によって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ に移ったとする．ただし，m は 0 でない定数とし，点 P は l 上にないとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 PQ の中点が l 上にあることと，線分 PQ が l と垂直に交わっていることを利用して

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$，$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動を表す1次変換をそれぞれ f，g とする．このとき，合成変換 $g\circ f$ および $f\circ g$ を表す行列を求めよ．

(3) (2) で求めた2つの行列は，原点 O を中心とし，角 θ だけ回転する1次変換を表す行列である．それぞれの θ を求めよ．

3 曲線 C を $y = e^x$ とする．C 上の点 $\mathrm{A}_0(0,\ 1)$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_1(b_1,\ 0)$ とし，C 上の点 $\mathrm{A}_1(b_1,\ e^{b_1})$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_2(b_2,\ 0)$ とする．これをくりかえし，C 上の点 $\mathrm{A}_n(b_n,\ e^{b_n})$ における接線と x 軸の交点を $\mathrm{B}_{n+1}(b_{n+1},\ 0)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) b_1 を求めよ．

(2) b_{n+1} と b_n の関係式を求め，一般項 b_n を求めよ．

(3) $\triangle \mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を求めよ．ただし，B_0 は原点とする．

4 e は自然対数の底，a，b，c は実数である．放物線 $y = ax^2 + b$ を C_1 とし，曲線 $y = c\log x$ を C_2 とする．C_1 と C_2 が点 $\mathrm{P}(e,\ e)$ で接しているとき，次の問いに答えよ．ここで，2 つの曲線が点 P で接しているとは，ともに点 P を通り，かつ，その点における接線が一致していることである．

(1) a，b，c の値を求めよ．

(2) C_1，C_2 および x 軸，y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

5 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + b = 2(a_n + b)$ が成り立つような定数 b を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $\dfrac{a_{2n}}{a_n} \geqq 10^{25} + 1$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

6 θ の関数 $f(\theta) = A\sin(\theta + \alpha)$ は $f(0^\circ) = 1$，$f(90^\circ) = 1$ をみたしている．ただし，$A > 0$，$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A と α を求めよ．

(2) $f(\alpha + 30^\circ)$ と $\sin(\alpha + 30^\circ)\cos(\alpha + 30^\circ)$ を求めよ．

(3) θ の関数 $g(\theta)$ は

$$\{f(\theta)\}^2 g(\theta) - k\{f(\theta)\}^2 = 2\{g(\theta)\}^2 - 2kg(\theta) + g(\theta) - \frac{1}{4}$$

$$g(\alpha + 30^\circ) = \sin(\alpha + 30^\circ)\cos(\alpha + 30^\circ)$$

をみたしている．実数 k と $g(\theta)$ を求めよ．

7 放物線 $y=-x^2+6x-7$ を C_1 とし，C_1 の頂点を A，C_1 上の点 $(1,-2)$ を B とする．点 A，B を通る直線を l とし，点 A，B を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_2 とする．ただし，a，b，c は実数，$a>0$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 A の座標を求めよ．

(2) 直線 l の方程式を求めよ．

(3) b と c を a を用いて表せ．

(4) C_2 と l で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

8 以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $2\sin k\theta\sin\dfrac{\theta}{2}=\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta$ を示せ．

(2) n が自然数のとき，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ を求めよ．

9 以下の問いに答えよ．

(1) n と r を自然数とする．

(i) $n\geqq 2$，$r\leqq n-1$ のとき ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ を示せ．

(ii) $n\geqq 3$，$r\leqq n-2$ のとき ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{C}_r$ を示せ．

(iii) $n\geqq 2$，$r\leqq n-1$ のとき ${}_n\mathrm{C}_r=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-r}{}_{n-k}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ を示せ．

(2) 「あるアイスクリーム店で，6 種類のアイスクリームから通常の半額で 3 種類のアイスクリームを選べるという，格安 3 点セールを実施している．異なる 3 種類の組合せは何通りあるか答えよ.」という問題に対して，以下のような答案があった．これを詳しく解説せよ．

(答案) まず $4+3+2+1=10$ である．
次に $3+2+1=6$ となる．
さらに $2+1=3$ である．
最後に 1 がある．
よって $10+6+3+1=20$ なので求める組合せは 20 通りである．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の定理を証明せよ．

「三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，各中線はその交点でそれぞれ $2:1$ に内分される．」

$\boxed{\mathbf{11}}$ p を $0 < p < 1$ を満たす定数とする．関数 $y = x^3 - (3p+2)x^2 + 8px$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $t=0$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,-2,\ 2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,-3,\ 0)$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=6$

したがって　$\cos\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{6}{4\cdot3}=\dfrac{1}{2}$

よって　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{POQ}=60^\circ}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-t,\ t-2,\ 2\sqrt{3})$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=(-t)^2+(t-2)^2+(2\sqrt{3})^2=2t^2-4t+16\\&=2(t-1)^2+14\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{t=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\sqrt{14}}$

(3) 4 点 O，A，P，Q が同一平面上にあるとき

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-4,\ 0,\ 4\sqrt{3})$,　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-t,\ t-2,\ 2\sqrt{3})$,　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t,\ t^2+t-3,\ 0)$

は，1 次従属である．したがって

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{0}$$

をみたす α，β，γ が，$\alpha=\beta=\gamma=0$ 以外に存在する．

$$\alpha\begin{pmatrix}-4\\0\\4\sqrt{3}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-t\\t-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}t\\t^2+t-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\cdots(*)$$

上のベクトルの z 成分から $\beta=-2\alpha\cdots$① であるから

$$\begin{aligned}\alpha\begin{pmatrix}-4\\0\\4\sqrt{3}\end{pmatrix}-2\alpha\begin{pmatrix}-t\\t-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}t\\t^2+t-3\\0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ \alpha\begin{pmatrix}2t-4\\-2t+4\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}t\\t^2+t-3\\0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって　$\alpha\begin{pmatrix} 2t-4 \\ -2t+4 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} t \\ t^2+t-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2t-4 & t \\ -2t+4 & t^2+t-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix} 2t-4 & t \\ -2t+4 & t^2+t-3 \end{pmatrix}\cdots(**)$ が正則であるとき

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき，① より，$\alpha=\beta=\gamma=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は 1 次独立であり，1 次従属ではない．
したがって，行列 $(**)$ は正則ではないから

$$\begin{aligned}(2t-4)(t^2+t-3)-(-2t+4)t&=0\\(t-2)(t^2+2t-3)&=0\\(t-2)(t-1)(t+3)&=0\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{t=-3,\ 1,\ 2}$

別解 $(*)$ より　$\begin{pmatrix} -4 & -t & t \\ 0 & t-2 & t^2+t-3 \\ 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} -4 & -t & t \\ 0 & t-2 & t^2+t-3 \\ 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}&=\det\begin{pmatrix} -4 & -t & t \\ 0 & t-2 & t^2+t-3 \\ 0 & -\sqrt{3}(t-2) & \sqrt{3}t \end{pmatrix}\\&=-4\det\begin{pmatrix} t-2 & t^2+t-3 \\ -\sqrt{3}(t-2) & \sqrt{3}t \end{pmatrix}\\&=-4\sqrt{3}(t-2)\det\begin{pmatrix} 1 & t^2+t-3 \\ -1 & t \end{pmatrix}\\&=-4\sqrt{3}(t-2)(t^2+2t-3)\\&=-4\sqrt{3}(t-2)(t-1)(t+3)\end{aligned}$$

$x=y=z=0$ 以外の解をもつとき，上式は 0 であるから　$t=-3,\ 1,\ 2$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 線分 PQ の中点の中点が $l : y = mx$ 上にあるから

$$\frac{y+y'}{2} = m\left(\frac{x+x'}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad mx' - y' = -mx + y \quad \cdots ①$$

線分 PQ が l と垂直に交わっているから

$$m\cdot\frac{y'-y}{x'-x} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad x' + my' = x + my \quad \cdots ②$$

①，② から，$\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) f，g の表す行列を，それぞれ A，B とすると

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$g\circ f$ を表す行列 BA は

$$BA = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

$f\circ g$ を表す行列 AB は

$$AB = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

(3) $$BA = \begin{pmatrix} \cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi \\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$$

よって，$g\circ f$，$f\circ g$ の表す行列は，原点 O を中心に，それぞれ $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$，$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$ だけ回転する一次変換を表す．

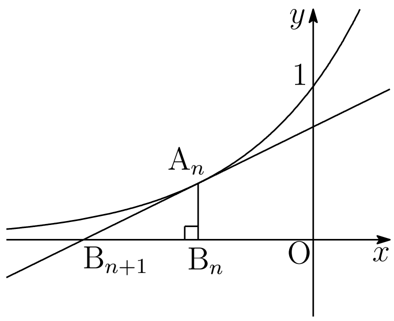
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=e^x$ より　$y'=e^x$

C の点 $\mathrm{A}_0(0,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=e^0(x-0)\quad \text{すなわち}\quad y=x+1$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が b_1 であるから　$\boldsymbol{b_1=-1}$

(2) C の点 $\mathrm{A}_n(b_n,\ e^{b_n})$ ににおける接線の方程式は



$$y-e^{b_n}=e^{b_n}(x-b_n)$$

ゆえに　$y=e^{b_n}(x-b_n+1)$

この直線と x 軸との交点の x 座標が b_{n+1} であるから

$$b_{n+1}-b_n+1=0$$

ゆえに　$\boldsymbol{b_{n+1}=b_n-1}$

上式および $b_1=-1$ から $\{b_n\}$ は

$$b_n=-1+(n-1)\cdot(-1)=\boldsymbol{-n}$$

(3) B_0 は原点であるから，(2) の結果は，$n\geqq 0$ について成り立つ．

したがって　$S_n=\dfrac{1}{2}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\cdot\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot e^{-n}=\dfrac{1}{2}e^{-n}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

$0<e^{-1}<1$ であるから

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-1})^n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-e^{-1}}=\boldsymbol{\frac{e}{2(e-1)}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=ax^2+b$，$g(x)=c\log x$ とおくと　$f'(x)=2ax$，$g'(x)=\dfrac{c}{x}$

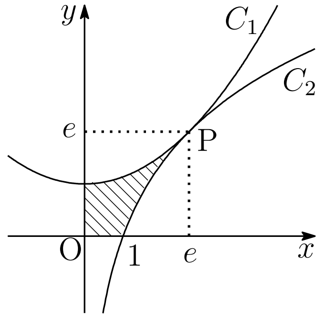
$C_1:y=f(x)$ と $C_2:y=g(x)$ が点 $\mathrm{P}(e,\ e)$ で接するから

$$f(e)=g(e)=e,\quad f'(e)=g'(e)$$

したがって　$ae^2+b=c=e,\quad 2ae=\dfrac{c}{e}$

これを解くと　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2e}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{e}{2}}$，$\boldsymbol{c=e}$

(2) 求める面積を S とすると，右の図から



$$\begin{aligned}S&=\int_0^e\left(\frac{x^2}{2e}+\frac{e}{2}\right)dx-\int_1^e e\log x\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{6e}+\frac{ex}{2}\right]_0^e-e\Big[x(\log x-1)\Big]_1^e\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}e^2-e}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a_{n+1}+b=2(a_n+b)$ より　$a_{n+1}=2a_n+b$

これが $a_{n+1}=2a_n+2$ に一致するから　$\boldsymbol{b=2}$

(2) (1) の結果から　$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$

ゆえに　$a_n+2=(a_1+2)\cdot 2^{n-1}=(2+2)\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

よって　$\boldsymbol{a_n=2^{n+1}-2}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{2^{2n+1}-2}{2^{n+1}-2}=\frac{2(2^{2n}-1)}{2(2^n-1)}=\frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n-1}=2^n+1$$

$\dfrac{a_{2n}}{a_n}\geqq 10^{25}+1$ より　$2^n+1\geqq 10^{25}+1$　ゆえに　$2^n\geqq 10^{25}$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}2\geqq 25$　ゆえに　$n\geqq\dfrac{25}{\log_{10}2}$

$\dfrac{25}{\log_{10}2}=\dfrac{25}{0.3010}=83.05\cdots$ より，上式をみたす最小の n は　$\boldsymbol{n=84}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(0^\circ)=1$，$f(90^\circ)=1$ より

$$f(0^\circ)=A\sin(0^\circ+\alpha)=A\sin\alpha=1 \qquad \cdots①$$
$$f(90^\circ+\alpha)=A\sin(90^\circ+\alpha)=A\cos\alpha=1 \qquad \cdots②$$

上の 2 式から　$(A\sin\alpha)^2+(A\cos\alpha)^2=1^2+1^2$

ゆえに　$A^2=2$　$A>0$ であるから　$\boldsymbol{A=\sqrt{2}}$

これと ①，② により　$\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\alpha<360^\circ$ より　$\boldsymbol{\alpha=45^\circ}$

(2) (1) の結果から　$f(\theta)=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$　$\cdots(*)$

$$\begin{aligned}f(\alpha+30^\circ)&=f(75^\circ)\\&=\sqrt{2}\sin(75^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 120^\circ\\&=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\\\sin(\alpha+30^\circ)\cos(\alpha+30^\circ)&=\sin 75^\circ\cos 75^\circ\\&=\frac{1}{2}\sin 150^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

(3) $\alpha = 45^\circ$，$g(\alpha + 30^\circ) = \sin(\alpha + 30^\circ)\cos(\alpha + 30^\circ)$ および (2) の結果から

$$g(75^\circ) = \frac{1}{4}$$

$(*)$ に $\theta = 75^\circ$ を代入すると

$$f(75^\circ) = \sqrt{2}\sin 120^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\theta = 75^\circ$ を

$$\{f(\theta)\}^2 g(\theta) - k\{f(\theta)\}^2 = 2\{g(\theta)\}^2 - 2kg(\theta) + g(\theta) - \frac{1}{4} \quad \cdots③$$

に代入すると

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \frac{1}{4} - k\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2k\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

これを解いて　$\boldsymbol{k = \frac{1}{4}}$

これを ③ に代入すると

$$\begin{aligned} \{f(\theta)\}^2 g(\theta) - \frac{1}{4}\{f(\theta)\}^2 &= 2\{g(\theta)\}^2 + \frac{1}{2}g(\theta) - \frac{1}{4} \\ \{f(\theta)\}^2\left\{g(\theta) - \frac{1}{4}\right\} &= \{2g(\theta) + 1\}\left\{g(\theta) - \frac{1}{4}\right\} \end{aligned}$$

ゆえに　$g(\theta) = \frac{1}{4}$　または　$\{f(\theta)\}^2 = 2g(\theta) + 1$

上の第 2 式は $(*)$ より　$\begin{aligned} 2g(\theta) &= 2\sin^2(\theta + 45^\circ) - 1 \\ &= -\cos 2(\theta + 45^\circ) \\ &= \sin 2\theta \end{aligned}$

よって　$\boldsymbol{g(\theta) = \frac{1}{4}}$　または　$\boldsymbol{g(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $y=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$　よって　$\mathbf{A(3,\ 2)}$

(2) l は 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,-2)$ を通る直線であるから

$$y-2=\frac{-2-2}{1-3}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x-4}$$

(3) $y=ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,-2)$ を通るから

$$2=9a+3b+c, \quad -2=a+b+c$$

よって　$\boldsymbol{b=-4a+2,\ c=3a-4}$

(4) $C_2: y=ax^2+(-4a+2)x+(3a-4)$ と $l: y=2x-4$ で囲まれた図形の面積を S とすると，$a>0$ より

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^3 [2x-4-\{ax^2+(-4a+2)x+(3a-4)\}]dx \\
&= -a\int_1^3 (x^2-4x+3)dx \\
&= -a\int_1^3 (x-1)(x-3)dx \\
&= -a\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}a}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 加法定理により

$$
\begin{aligned}
&\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta \\
=&\cos k\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}-\left(\cos k\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
=&2\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$　すなわち　$\theta\neq 2m\pi$ のとき (m は整数)，(1) の結果から

$$
\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right\} \\
&=\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\left\{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right\}
\end{aligned}
$$

$\theta=2m\pi$ のとき (m は整数)　$\sin k\theta=\sin 2km\pi=0$

ゆえに　　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\mathbf{0}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) (i) ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r = \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\{r + (n-r)\} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r$$

(ii) (i) の結果を用いて

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_r &= {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \\ &= {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-2}\mathrm{C}_r \end{aligned}$$

(iii) (i) の結果により，${}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_k\mathrm{C}_r - {}_{k-1}\mathrm{C}_r$ であるから $(k \geqq r+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=r+1}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1} &= \sum_{k=r+1}^{n} ({}_k\mathrm{C}_r - {}_{k-1}\mathrm{C}_r) \\ &= {}_n\mathrm{C}_r - {}_r\mathrm{C}_r \end{aligned}$$

したがって

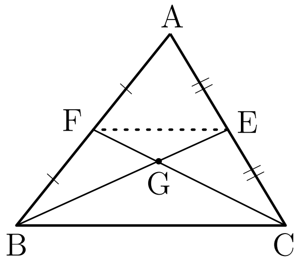
$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_r &= \sum_{k=r+1}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_r\mathrm{C}_r \\ &= \sum_{k=1}^{n-r} {}_{n-k}\mathrm{C}_{r-1} + {}_r\mathrm{C}_r \end{aligned}$$

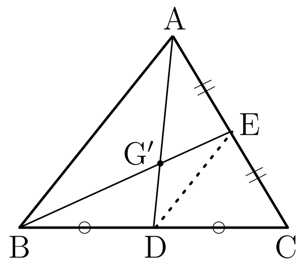
(2) 6種類のアイスクリームを A，B，C，D，E，F とする．

ABC，ABD，ABE，ABF	$\cdots$ 4通り	
ACD，ACE，ACF	$\cdots$ 3通り	
ADE，ADF	$\cdots$ 2通り	
AEF	$\cdots$ 1通り	ここまでで $4+3+2+1=10$ 通り
BCD，BCE，BCF	$\cdots$ 3通り	
BDE，BDF	$\cdots$ 2通り	
BEF	$\cdots$ 1通り	次に $3+2+1=6$ 通り
CDE，CDF	$\cdots$ 2通り	
CEF	$\cdots$ 1通り	さらに $2+1=3$ 通り
DEF	$\cdots$ 1通り	最後に1通り

したがって　$10+6+3+1=20$ 通り

$\boxed{10}$ **証明** $\triangle$ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G とし，中線 AD と中線 BE の交点を G$'$ とする．このとき，まず 2 点 G，G$'$ が一致することを示せばよい．





中点連結定理により

$$\mathrm{FE} \,/\!/\, \mathrm{BC},\quad \mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1$$

となるから　　$\mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{BC} : \mathrm{FE} = 2 : 1$

よって，点 G は線分 BE を $2:1$ に内分する．

同様にして　　$\mathrm{BG}' : \mathrm{G}'\mathrm{E} = \mathrm{AB} : \mathrm{ED} = 2 : 1$

よって，点 G$'$ は線分 BE を $2:1$ に内分する．

線分 BE を $2:1$ に内分する点は 1 点だけであるから，2 点 G，G$'$ は一致する．

したがって，3 つの中線は点 G で交わる．

また，$\mathrm{AG} : \mathrm{GD} = \mathrm{BG} : \mathrm{GE} = \mathrm{CG} : \mathrm{GF} = 2 : 1$ であるから，3 つの中線の交点は各中線を $2:1$ に内分する．　証終

$\boxed{\mathbf{11}}$ $f(x)=x^3-(3p+2)x^2+8px$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-2(3p+2)x+8p=(3x-4)(x-2p)$$

(i) $2p \geqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq p < 1$ のとき

$f(x)$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加であるから

最大値 $f(1)=5p-1$，最小値 $f(0)=0$

(ii) $0<2p<1$　すなわち　$0<p<\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4p^2(2-p)$	$\searrow$	$5p-1$

最大値 $f(2p)=4p^2(2-p)$，最小値 $\begin{cases} f(1)=5p-1 & (0<p<\frac{1}{5}) \\ f(0)=0 & (\frac{1}{5} \leqq p < \frac{1}{2}) \end{cases}$

(i)，(ii) より

$0<p<\dfrac{1}{5}$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{4p^2(2-p)}$，　最小値 $\boldsymbol{5p-1}$**

$\dfrac{1}{5} \leqq p < \dfrac{1}{2}$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{4p^2(2-p)}$，　最小値 $\boldsymbol{0}$**

$\dfrac{1}{2} \leqq p < 1$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{5p-1}$，　最小値 $\boldsymbol{0}$**