平成 21 年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成 21 年 2 月 25 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部は，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部は，$\boxed{9}$ ～ $\boxed{12}$ 数 I・II・A・B (100 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 等差数列 $\{a_n\}$ は，$a_5 = 14$，$a_{10} = 29$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-a_k}$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a_k}$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $x > 1$ において $f(x) = \sqrt{x} - \log x$，$g(x) = \dfrac{x}{\log x}$ とするとき，次の問いに答えよ．(ただし，対数は自然対数とする．)

(1) $f(x) > 0$ を示せ．

(2) $g(x) > \sqrt{x}$ を示せ．これを用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ を示せ．

(3) $g'(x)$，$g''(x)$ を計算し，$g(x)$ の極値，変曲点の座標を求めよ．

(4) 関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{4}\right)$ で囲まれた図形 D の面積 S を求めよ．

(2) 区間 $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{4}$ における，$|\sin x|$ と $|\cos x|$ の大小関係を述べよ．

(3) (1) の図形 D を x 軸の回りに一回転してできる立体の体積 V を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，E は 2 次の単位行列とし，O を 2 次の零行列とする．

(1) $(A-E)(A^4+A^3+A^2+A+E)=O$ を示せ．

(2) $A-E$ が逆行列を持つことを示せ．これを用いて

$$A^4+A^3+A^2+A+E=O$$

を示せ．

(3) $B=A+A^{-1}$ とおく．(2) を用いて，$B^2+B-E=O$ を示せ．

(4) (3) の行列 B について，$B = \begin{pmatrix} 2\cos 72^\circ & 0 \\ 0 & 2\cos 72^\circ \end{pmatrix}$ を示せ．

(5) $\alpha = \cos 72^\circ$ とおくとき，(3) と (4) を用いて，$4\alpha^2+2\alpha-1=0$ が成り立つことを示せ．さらに $\cos 72^\circ$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2}{5}, -\dfrac{11}{5}\right)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円を C_1 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 円 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 円 C_1 に内接する正三角形の面積を求めよ．

(3) 円 $C_2 : x^2+y^2=5$ の円周上を動く点 M に対して，3 点 M，P，Q が三角形を作るとする．このとき，△MPQ の重心の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 濃度 $a\,\%\,(a>0)$ の均一な食塩水がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 食塩水から質量の 10 分の 1 を取り出し，代わりに同じ質量の真水を加えて濃度が均一になるようにした．このときの食塩水の濃度を求めよ．

(2) (1) の操作を n 回繰り返してできる食塩水の濃度を求めよ．

(3) $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ を用いて，(2) において濃度が $\dfrac{a}{10}\%$ 以下になる n の最小値を求めよ．

7 $\mathrm{A_1}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{A_2}(2,\ 3,\ 1)$，$\mathrm{A_3}(2,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{A_4}(4,\ 2,\ 0)$ を空間内の 4 点とし，O を原点とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{A_3}$ と $\mathrm{A_4}$ の中点を B とするとき，$\triangle \mathrm{A_1A_2B}$ の面積を求めよ．

(2) 2 つの四面体 $\mathrm{A_1A_2A_3B}$，および $\mathrm{A_1A_2A_4B}$ の体積をそれぞれ求めよ．

(3)
$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_4}})$$
を位置ベクトルに持つ点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_1B}}$ を用いて表し，4 点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，B，P は同一平面上にあることを示せ．

(4) $\mathrm{A_1}$ と $\mathrm{A_2}$ の中点を C とするとき，4 点 $\mathrm{A_3}$，$\mathrm{A_4}$，C，P は同一平面上にあることを示せ．

8 $k>1$ とする．2 直線 $y=kx$，$y=(2k-1)x$ と放物線 $y=x^2$ によって囲まれた図形の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1) S を k を用いて表せ．

(2) S は k に関して単調に増加することを示せ．

(3) $6S<6k^3-7k^2+1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ．

9 以下の問いに答えよ．

(1) 次を満たす 2 数 x，y を求めよ．
$$x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$$

(2) 次を満たす 3 数 x，y，z を求めよ．
$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3,\quad xyz=1$$

$\boxed{\textbf{10}}$ 関数 $f(\theta) = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(\theta)$ のグラフをかけ．

(2) $-\pi < \theta < \pi$ のとき，方程式

$$f(\theta) = 1$$

を解け．

(3) $-\pi < \theta < \pi$ のとき，不等式

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta + 1$$

を解け．

$\boxed{\textbf{11}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ において，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

となることを証明せよ．

(2) (i) n は自然数とする．このとき，

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(ii) 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ において，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \begin{cases} na & (r = 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{12}}$ 放物線 $y = x^2$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ (ただし，$a < b$) がある．また，グラフ上の点 A と点 B の間に点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ をとり，点 P における放物線の接線，線分 AB，2 直線 $x = a$，$x = p$ で囲まれた部分の面積を S_1，放物線，点 P における放物線の接線，直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．点 P が点 A と点 B の間 (両端を含まない) を放物線のグラフに沿って動くとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ のとる値の範囲を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，$a_5=14$，$a_{10}=29$ より

$$a+4d=14,\quad a+9d=29\qquad \text{これを解いて}\quad a=2,\quad d=3$$

したがって　$a_n=2+(n-1)\cdot 3$　すなわち　$\boldsymbol{a_n=3n-1}$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}2^{-a_k}=\sum_{k=1}^{n}2^{-3k+1}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}}$$

(3) (1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2(3n+2)}}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{-a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2^{-a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}=\boldsymbol{\frac{2}{7}}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

x	(1)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小	↗

したがって　$f(x)\geqq f(4)=2(1-\log 2)>0$　　よって　$f(x)>0$

(2)
$$g(x)-\sqrt{x}=\frac{x}{\log x}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\log x}(\sqrt{x}-\log x)=\frac{\sqrt{x}}{\log x}f(x)$$

$x>1$ のとき $\dfrac{\sqrt{x}}{\log x}>0$，$f(x)>0$ であるから

$$g(x)-\sqrt{x}>0\qquad \text{すなわち}\qquad g(x)>\sqrt{x}$$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$　よって　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty}$

(3) $g(x) = x(\log x)^{-1}$ であるから，この両辺を微分すると

$$g'(x) = (\log x)^{-1} + x\cdot(-1)(\log x)^{-2}\frac{1}{x}$$
$$= (\log x)^{-1} - (\log x)^{-2}$$
$$g''(x) = -(\log x)^{-2}\cdot\frac{1}{x} + 2(\log x)^{-3}\cdot\frac{1}{x}$$

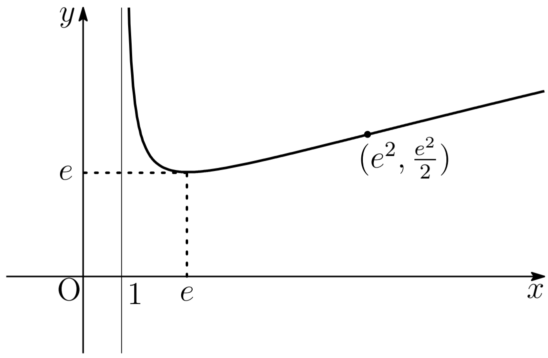
すなわち　$\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2}}$,　$\boldsymbol{g''(x) = \dfrac{2 - \log x}{x(\log x)^3}}$

したがって，$g(x)$ の増減および凹凸は次のようなる．

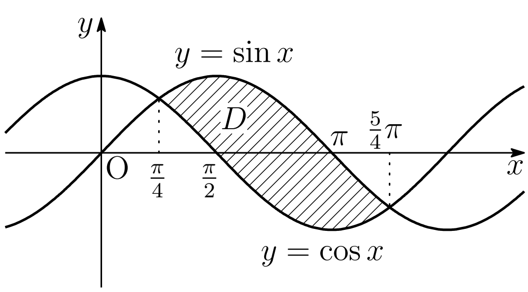
x	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$		↘	e	↗	$\frac{e^2}{2}$	↗

$x = e$ のとき極小値 $\boldsymbol{e}$，変曲点 $\boldsymbol{\left(e^2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} g(x) = \infty$ であるから，直線 $x = 1$ は漸近線．
よって，$y = g(x)$ のグラフは次のようになる．



3 (1) 図形 D の面積 S は



$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)dx$$
$$= \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$
$$= \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(2) $$(|\cos x|+|\sin x|)(|\cos x|-|\sin x|) = |\cos x|^2-|\sin x|^2 = \cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$$

$|\cos x|+|\sin x|>0$ であるから，$|\cos x|-|\sin x|$ と $\cos 2x$ は同符号．

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{2} \leqq 2x \leqq \dfrac{5}{2}\pi$ において

$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi$ のとき　$|\cos x|-|\sin x|=0$

$\dfrac{\pi}{2}<2x<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$|\cos x|-|\sin x|<0$

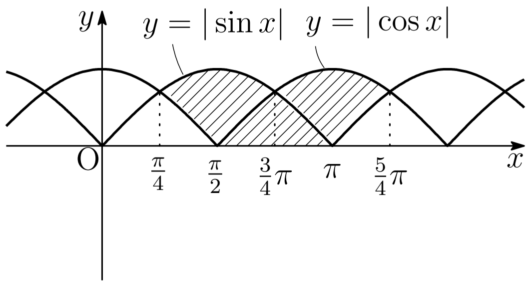
$\dfrac{3}{2}\pi<2x<\dfrac{5}{2}\pi$ のとき　$|\cos x|-|\sin x|>0$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi}$**のとき**　$\boldsymbol{|\sin x|=|\cos x|}$

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi}$**のとき**　$\boldsymbol{|\sin x|>|\cos x|}$

$\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi<x<\dfrac{5}{4}\pi}$**のとき**　$\boldsymbol{|\sin x|<|\cos x|}$

(3) (1) の x 軸の求める回転体の体積を V とすると，V は右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積である．このとき，図の斜線部分は，直線 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称であるから



$$\begin{aligned}
\frac{V}{2\pi} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} - \left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}+\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\pi\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\right)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\quad (A-E)(A^4+A^3+A^2+A+E)$

$$
\begin{aligned}
&= A^5 - E \\
&= \begin{pmatrix} \cos 72^\circ \times 5 & -\sin 75^\circ \times 5 \\ \sin 72^\circ \times 5 & \cos 72^\circ \times 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O
\end{aligned}
$$

(2) $A-E=\begin{pmatrix} \cos 72^\circ - 1 & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ - 1 \end{pmatrix}$ より

$$
\begin{aligned}
\det(A-E) &= (\cos 72^\circ - 1)^2 - (-\sin 72^\circ)\sin 72^\circ \\
&= 2(1-\cos 72^\circ) \neq 0
\end{aligned}
$$

ゆえに $A-E$ は正則であるから，(1) より

$$A^4+A^3+A^2+A+E=O$$

(3) (2) の結果の両辺に $(A^{-1})^2$ を掛けると

$$
\begin{aligned}
A^2+A+E+A^{-1}+A^{-2} &= O \\
(A+A^{-1})^2+(A+A^{-1})-E &= O
\end{aligned}
$$

$B=A+A^{-1}$ より $\qquad B^2+B-E=O$

(4) $A=\begin{pmatrix} \cos 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ \sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}$ より $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos 72^\circ & \sin 72^\circ \\ -\sin 72^\circ & \cos 72^\circ \end{pmatrix}$

上の 2 式より $\quad B=A+A^{-1}=\begin{pmatrix} 2\cos 72^\circ & 0 \\ 0 & 2\cos 72^\circ \end{pmatrix}$

(5) $\alpha=\cos 72^\circ$ を (4) の結果に代入して

$$B=\begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{さらに} \quad B^2=\begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2 \end{pmatrix}$$

これらを (3) の結果に代入して

$$\begin{pmatrix} 4\alpha^2+2\alpha-1 & 0 \\ 0 & 4\alpha^2+2\alpha-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって $\qquad 4\alpha^2+2\alpha-1=0$

$\alpha=\cos 72^\circ>0$ に注意して解くと $\qquad \mathbf{\cos 72^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) C_1 が O を通ることに注意して，求める円 C_1 の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by=0$$

とおくと，これが 2 点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ を通るから

$$2a+b+5=0, \quad -\frac{2}{5}a-\frac{11}{5}b+5=0$$

これを解いて　$a=-4$，$b=3$　よって　$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+3y=0}$

(2) (1) の結果から　$(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$　ゆえに　C_1 の半径は $\frac{5}{2}$

C_1 に内接する正三角形の一辺の長さを d とすると，正弦定理により

$$\frac{d}{\sin 60^\circ}=2\times\frac{5}{2} \quad ゆえに \quad d=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める正三角形の面積は　$\frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60^\circ=\boldsymbol{\frac{75\sqrt{3}}{16}}$

(3) C_2 上の点 M の座標を $(s,\ t)$ とすると，M は P，Q 以外の点であるから

$$s^2+t^2=5\cdots①, \quad (s,\ t)\neq(2,\ 1), \ \left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

$\triangle\mathrm{MPQ}$ の重心を $\mathrm{G}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{s+2-\frac{2}{5}}{3}, \ y=\frac{t+1-\frac{11}{5}}{3}, \quad (x,\ y)\neq\left(\frac{6}{5}, -\frac{1}{15}\right), \ \left(\frac{2}{5}, -\frac{17}{15}\right)$$

すなわち　　$s=3x-\frac{8}{5}$，$t=3y+\frac{6}{5}$

これを ① に代入して　$\left(3x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(3y+\frac{6}{5}\right)^2=5$

$$\left(x-\frac{8}{15}\right)^2+\left(y+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{5}{9}$$

よって　**中心** $\boldsymbol{\left(\frac{8}{15}, -\frac{2}{5}\right)}$**，半径** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ **の円，**

ただし，2 点 $\boldsymbol{\left(\frac{6}{5}, -\frac{1}{15}\right)}$**，**$\boldsymbol{\left(\frac{2}{5}, -\frac{17}{15}\right)}$ **は除く**

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) この操作により，全体の質量は変わらず食塩の質量は $\dfrac{9}{10}$ になるから，
求める食塩水の濃度は

$$a \times \frac{9}{10} = \boldsymbol{\frac{9}{10}a}\ [\%]$$

(2) (1) の操作を n 回繰り返すから，求める食塩水の濃度は

$$a \times \left(\frac{9}{10}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{9}{10}\right)^n a}\ [\%]$$

(3) (2) の結果を条件に適用すると

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n a \leqq \frac{a}{10} \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{9}{10}\right)^n \leqq \frac{1}{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n \leqq -1 \quad \text{ゆえに} \quad n(2\log_{10}3 - 1) \leqq -1$$

したがって　$n \geqq \dfrac{1}{1 - 2\log_{10}3}$　$\cdots(*)$

ここで，$0.4771 < \log_{10}3 < 0.4772$ より，$0.0456 < 1 - 2\log_{10}3 < 0.0458$
であるから

$$21.8\cdots = \frac{1}{0.458} < \frac{1}{1 - 2\log_{10}3} < \frac{1}{0.456} = 21.9\cdots$$

よって，$(*)$ をみたす最小の n は　**22**

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $A_3(2,\ 2,\ 2)$ と $A_4(4,\ 2,\ 0)$ の中点 B の座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{2+2}{2},\ \frac{2+0}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 2,\ 1)$$

ゆえに $\overrightarrow{A_1A_2} = (2,\ 3,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ 2,\ 0)$,

$\overrightarrow{A_1B} = (3,\ 2,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = (2,\ 1,\ 0)$

よって 3 点 A_1，A_2，B は平面 $z=1$ 上にあるから，2 つのベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_1B}$ の x 成分および y 成分から

$$\triangle A_1A_2B = \frac{1}{2}|1\cdot 1 - 2\cdot 2| = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) 3 点 A_1，A_2，B は平面 $z=1$ 上にあるから，2 点 $A_3(2,\ 2,\ 2)$，$A_4(4,\ 2,\ 0)$ からこの平面に下ろした垂線の長さは，ともに 1 である．

よって，四面体 $A_1A_2A_3B$ および四面体 $A_1A_2A_4B$ の体積は，ともに

$$\frac{1}{3}\triangle A_1A_2B \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)
$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} \\ &= (1,\ 1,\ 1) + (2,\ 3,\ 1) + (2,\ 2,\ 2) + (4,\ 2,\ 0) \\ &= (9,\ 8,\ 4) \end{aligned}$$

ゆえに $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{9}{4},\ 2,\ 1\right)$，$\overrightarrow{A_1P} = \left(\frac{9}{4},\ 2,\ 1\right) - (1,\ 1,\ 1) = \left(\frac{5}{4},\ 1,\ 0\right)$

上式および (1) の結果から，$\overrightarrow{A_1P} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{A_1B}$ とおくと

$$\left(\frac{5}{4},\ 1,\ 0\right) = \alpha(1,\ 2,\ 0) + \beta(2,\ 1,\ 0)$$

これを解いて $\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{2}$ ゆえに $\overrightarrow{A_1P} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}$

よって，4 点 A_1，A_2，B，P は同一平面上にある．

(4) $A_1(1,\ 1,\ 1)$ と $A_2(2,\ 3,\ 1)$ の中点 C の座標は

$$\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{1+1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{2},\ 2,\ 1\right)$$

これと (1) の結果から，4 点 A_3，A_4，C，P の y 座標が 2 であるから，これらの 4 点は，平面 $y=2$ 上にある．

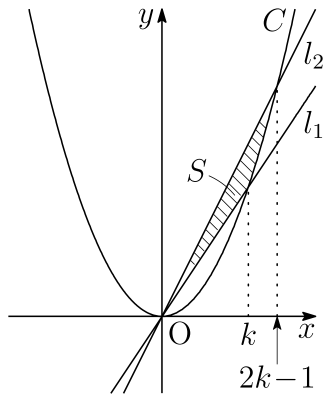
$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $C : y = x^2$，$l_1 : y = kx$，$l_2 : y = (2k-1)x$ とする．

C と l_1 の交点の x 座標は　$0,\ k$
C と l_2 の交点の x 座標は　$0,\ 2k-1$

$k > 1$ より　$(2k-1) - k = k - 1 > 0$

ゆえに　$2k - 1 > k$

C と l_1 で囲まれた部分の面積を S_1，C と l_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると



$$S_1 = \frac{1}{6}k^3, \quad S_2 = \frac{1}{6}(2k-1)^3$$

求める面積は，右の図の斜線部分で

$$\begin{aligned} S = S_2 - S_1 &= \frac{1}{6}(2k-1)^3 - \frac{1}{6}k^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{6}k^3 - 2k^2 + k - \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{dS}{dk} = \frac{7}{2}k^2 - 4k + 1 = \frac{7}{2}(k-1)^2 + 3(k-1) + \frac{1}{2}$$

$k > 1$ のとき，$\dfrac{dS}{dk} > 0$ であるから，S は k に関して単調に増加する．

(3) $6S < 6k^3 - 7k^2 + 1$ に (1) の結果を代入すると

$$6\left(\frac{7}{6}k^3 - 2k^2 + k - \frac{1}{6}\right) < 6k^3 - 7k^2 + 1$$

整理すると　$k^3 - 5k^2 + 6k - 2 < 0$

ゆえに　$(k-1)(k-2+\sqrt{2})(k-2-\sqrt{2}) < 0$

$k > 1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{1 < k < 2 + \sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ より　　$\dfrac{x+y}{xy}=2$

$x+y=2$ であるから　　$xy=1$

x，y を解とする 2 次方程式は　　$t^2-2t+1=0$

これを解いて　$t=1$　よって　$\boldsymbol{x=y=1}$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$ より　　$\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=3$

$xyz=1$ であるから　　$xy+yz+zx=3$

上の 2 式および $x+y+z=3$ から，x，y，z を解とする 3 次方程式は

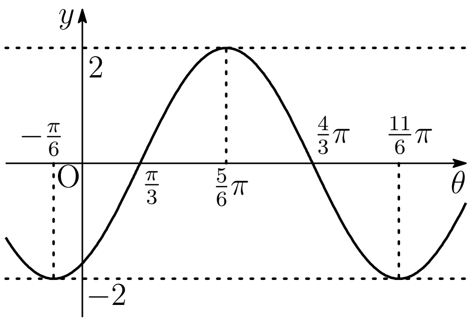
$$t^3-3t^2+3t-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=1$$

よって　　$\boldsymbol{x=y=z=1}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1)

$$f(\theta)=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$y=f(\theta)$ は $y=2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に，$\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもの.



(2) (1) の結果を $f(\theta)=1$ に代入すると

$$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$-\pi<\theta<\pi$ より，$-\dfrac{4}{3}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$ において，上の方程式を解くと

$$\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{7}{6}\pi,\ \frac{\pi}{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta=-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2}}$$

(3) $\sin\theta>\sqrt{3}\cos\theta+1$ より　$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)>\dfrac{1}{2}$

(2) の結果に注意して

$$-\frac{4}{3}\pi<\theta-\frac{\pi}{3}<-\frac{7}{6}\pi, \quad \frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi$$

よって　　$\boldsymbol{-\pi<\theta<-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) 初項 a，公差 d の等差数列において，第 n 項が l のとき，初項から第 n 項までの和を S_n で表すと，

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (l - d) + l \qquad \cdots ①$$

であり，足す項の順を逆にすると，S_n は次のようにも表される．

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + (a + d) + a \qquad \cdots ②$$

① と ② の各辺を足すことにより　　$2S_n = n(a + l)$
また，l は第 n 項であるから，$l = a + (n - 1)d$ と表される．

したがって　　$2S_n = n\{2a + (n - 1)d\}$

よって　　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{n\{2a + (n - 1)d\}}{2}$

(2) (i) $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \quad \cdots (*)$

［1］$n = 1$ のとき，$(*)$ は明らかに成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1})$$

この両辺に $(1 - x)x^k$ を加えると

$$\begin{aligned} 1 - x^k + (1 - x)x^k &= (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) + (1 - x)x^k \\ 1 - x^{k+1} &= (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1} + x^k) \end{aligned}$$

したがって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

(ii) $r = 1$ のとき

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n\text{ 個}} = na$$

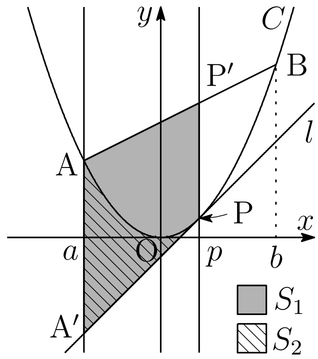
$r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} \\ &= a(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \end{aligned}$$

ここで，(i) の結果により　$1 + r + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

よって　　$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$\boxed{\textbf{12}}$ 曲線 $y=x^2$ を C，C 上の点 P における接線を l とする．また，l と直線 $x=a$ の交点を A$'$，線分 AB と直線 $x=p$ の交点を P$'$ とする．



$y=x^2$ を微分すると　　$y'=2x$

接線 l の方程式は

$$y-p^2=2p(x-p)\quad\text{すなわち}\quad y=2px-p^2$$

線分 AB の方程式は

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)\quad\text{すなわち}\quad y=(a+b)x-ab$$

ゆえに　　A$'(a,\ 2ap-p^2)$，P$'(p,\ (a+b)p-ab)$

したがって　　$\mathrm{AA}'=a^2-(2ap-p^2)=(p-a)^2$

$$\mathrm{PP}'=(a+b)p-ab-p^2=(p-a)(b-p)$$

$$\begin{aligned} S_1&=\frac{1}{2}(p-a)(\mathrm{AA}'+\mathrm{PP}')\\ &=\frac{1}{2}(p-a)\{(p-a)^2+(p-a)(b-p)\}=\frac{1}{2}(p-a)^2(b-a)\\ S_2&=\int_a^p\{x^2-(2px-p^2)\}dx=\int_a^p(x-p)^2\,dx\\ &=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_a^p=\frac{1}{3}(p-a)^3\\ \frac{S_2}{S_1}&=\frac{\frac{1}{3}(p-a)^3}{\frac{1}{2}(p-a)^2(b-a)}=\frac{2(p-a)}{3(b-a)} \end{aligned}$$

このとき，$a<p<b$ であるから　$0<p-a<b-a$

よって　　$\boldsymbol{0<\dfrac{S_2}{S_1}<\dfrac{2}{3}}$